

## ОТЧЕТ

### ведущего ученого о научных исследованиях, проведенных в 2017 году

Договор между Министерством образования и науки Российской Федерации, федеральным государственным автономным образовательным учреждением высшего образования "Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики" (Университет ИТМО) и Ортега Мартинес Ромео Сальвадор о выделении гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных организациях высшего образования, научных учреждениях, подведомственных Федеральному агентству научных организаций, и государственных научных центрах Российской Федерации

от 04 марта 2014 г. № 14.Z50.31.0031

Область наук: Компьютерные и информационные науки

Направление научного исследования: Робастные и адаптивные системы управления, коммуникации и вычисления

Наименование лаборатории: Нелинейные адаптивные системы управления

**Ведущий ученый**

\_\_\_\_\_

(подпись)

Ортега Мартинес Ромео Сальвадор

(фамилия, имя, отчество (при наличии))

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Ведущий ученый, руководитель лаборатории	_____ (подпись, дата)	Р.С. Ортега Мартинес
Зав. кафедрой, д-р техн. наук	_____ (подпись, дата)	А.А. Бобцов
Доцент, канд. техн. наук	_____ (подпись, дата)	А.С. Кремлев
Инженер, без уч. Звания	_____ (подпись, дата)	Е.А. Алтай
Инженер, без уч. Звания	_____ (подпись, дата)	С.А. Александрова
Профессор, д-р техн. наук	_____ (подпись, дата)	Б.Р. Андриевский
Доцент, канд. техн. наук	_____ (подпись, дата)	С.В. Арановский
Инженер, без уч. Звания	_____ (подпись, дата)	К. Артемов
Инженер, без уч. Звания	_____ (подпись, дата)	Д.Н. Базылев
Ведущий н.с., д-р физ.-мат. наук	_____ (подпись, дата)	Н.Е. Барабанов
С.н.с., канд. физ.-мат. наук	_____ (подпись, дата)	А.А. Белов
Инженер, без уч. Звания	_____ (подпись, дата)	М.Е. Беляев
Доцент, канд. техн. наук	_____ (подпись, дата)	В.И. Бойков
Инженер, без уч. звания	_____ (подпись, дата)	О.И. Борисов
Инженер, без уч. звания	_____ (подпись, дата)	Е.Л. Буксина
Доцент, канд. техн. наук	_____ (подпись, дата)	С.В. Быстров

Ассистент, канд. техн. Наук	_____	А.А. Ведяков
	(подпись, дата)	
Инженер, без уч. звания	_____	Д. Волошин
	(подпись, дата)	
Инженер, без уч. Звания	_____	С.А. Вражевский
	(подпись, дата)	
Инженер, без уч. Звания	_____	Н.А. Вундер
	(подпись, дата)	
Доцент, канд. техн. наук	_____	Д.Н. Герасимов
	(подпись, дата)	
Доцент, канд. техн. наук	_____	А.А. Горбачев
	(подпись, дата)	
Ассистент, без уч. звания	_____	В.С. Громов
	(подпись, дата)	
Инженер, без уч. звания	_____	Н.Ю. Дема
	(подпись, дата)	
Инженер, без уч. звания	_____	Д. Добриборщ
	(подпись, дата)	
С.н.с., д-р техн. наук	_____	Д.В. Ефимов
	(подпись, дата)	
Инженер, канд. физ.-мат. наук	_____	Е.Е. Заварин
	(подпись, дата)	
Инженер, без уч. звания	_____	К.А. Зименко
	(подпись, дата)	
Инженер, без уч. звания	_____	Д.Д. Ибраев
	(подпись, дата)	
Ассистент, канд. техн. наук	_____	А.А. Капитонов
	(подпись, дата)	
С.н.с., канд. техн. наук	_____	С.А. Колюбин
	(подпись, дата)	
Инженер, без уч. звания	_____	А.Ю. Краснов
	(подпись, дата)	
Доцент, канд. техн. наук	_____	П.В. Кустарев
	(подпись, дата)	

Инженер, без уч. звания	_____	И.А. Лосицкий
	(подпись, дата)	
Инженер, без уч. звания	_____	В.В. Мазулина
	(подпись, дата)	
Инженер, без уч. звания	_____	А.А. Маргун
	(подпись, дата)	
Инженер, без уч. Звания	_____	А.Н. Нехороших
	(подпись, дата)	
Проректор по науч. раб., д-р техн. наук	_____	В.О. Никифоров
	(подпись, дата)	
Доцент, канд. техн. наук	_____	Н.А. Николаев
	(подпись, дата)	
Лаборант, без уч. звания	_____	А.О. Овчаров
	(подпись, дата)	
С.н.с., д-р техн. наук	_____	Е.В. Пантелей
	(подпись, дата)	
Инженер, без уч. звания	_____	А.В. Паромонов
	(подпись, дата)	
Инженер, без уч. звания	_____	И.В. Петраневский
	(подпись, дата)	
С.н.с., канд. физ.-мат. наук	_____	А.Е. Поляков
	(подпись, дата)	
Инженер, без уч. звания	_____	Ф.А. Попченко
	(подпись, дата)	
Доцент, канд. техн. наук	_____	А.А. Пыркин
	(подпись, дата)	
Доцент, канд. техн. наук	_____	С.С. Резников
	(подпись, дата)	
Инженер, без уч. звания	_____	С.Н. Сомов
	(подпись, дата)	
Инженер, без уч. звания	_____	М.С. Тарасов
	(подпись, дата)	
Инженер, без уч. звания	_____	Н.Г. Тен
	(подпись, дата)	

Профессор,  
д-р техн. Наук

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

И.Б. Фуртат

Инженер,  
без уч. звания

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

Т.А. Харьковская

Доцент,  
канд. техн. наук

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

С.А. Чепинский

Инженер,  
без уч. Звания

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

Ю.В. Чугина

Ассистент,  
канд. техн. Наук

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

С.В. Шаветов

Нормоконтролер

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

Д.Н. Герасимов

## РЕФЕРАТ

Отчет 87 с., 37 рис., 1 табл., 70 источников.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ, АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ, УПРАВЛЕНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ, СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, ФИНИТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ, УПРАВЛЕНИЕ В УСЛОВИЯХ КАНАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ, УПРАВЛЕНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕУЧТЕННОЙ ДИНАМИКИ, КОМПЕНСАЦИЯ ВОЗМУЩАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ, РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И КОМПЛЕКСЫ, НЕЛИНЕЙНЫЕ НАБЛЮДАТЕЛИ.

Объектами исследования являются методы анализа и синтеза алгоритмов адаптивного и робастного управления линейными и нелинейными динамическими системами, предназначенные для автоматического регулирования различных технических систем и процессов в условиях неопределенности, запаздывания, возмущающих воздействий и канальных ограничений.

Цель исследований заключается в разработке новых методов робастного и адаптивного управления линейными и нелинейными динамическими системами, функционирующими в условиях запаздывания, неопределенностей, возмущающих воздействий и канальных ограничений, а также апробация разработанных методов на мехатронных и робототехнических комплексах различного назначения.

В ходе выполнения НИР была проведена разработка модификаций двух вариантов робастного, нелинейного и глобально сходящегося наблюдателя положения для неявнополюсных синхронных двигателей с постоянными магнитами. Была проведена экспериментальная апробация полученных наблюдателей, подтверждающая эффективность разработанных алгоритмов.

Был произведен синтез алгоритмов бессенсорного управления неявнополюсным синхронным двигателем с постоянными магнитами с применением разработанных наблюдателей положения. Система управления в сочетании с нелинейным наблюдателем сравнивалась с современным промышленным регулятором. Было показано, что предложенный бессенсорный регулятор с нелинейным наблюдателем позволяет значительно улучшить характеристики замкнутого контура при работе двигателя как на низких, так и на высоких скоростях.

Был проведен анализ робастности финитно устойчивых (устойчивых за конечное время) однородных систем по отношению к запаздыванию. Было доказано, что в случае глобальной устойчивости нелинейной системы с отрицательной степенью однородности,

при наличии запаздывания (в том числе, переменного) в системе все траектории асимптотически сходятся в некоторое компактное множество, содержащее начало координат.

На основе проведенного анализа робастности финитно устойчивых однородных систем были разработаны алгоритмы робастного управления нелинейными системами, которые в случае наличия запаздывания в канале управления обеспечивают схождение всех траекторий замкнутой системы в замкнутое множество. При отсутствии запаздывания гарантируется финитная устойчивость замкнутой системы.

Исследована задача регулирования по выходу многоканальных систем с гармоническими внешними входными воздействиями и параметрическими неопределенностями. Рассмотрена проблема робастной устойчивости с использованием свойства «робастной» минимальной фазовости. Разработан регулятор, построенный на базе классического метода внутренней модели совместно с контуром адаптивной настройки, который обеспечивает асимптотическую сходимость выходных переменных к положениям равновесия. Проведена экспериментальная апробация разработанного алгоритма для управления надводным судном.

Решена задача слежения за мультigarмоническим сигналом с неизвестными параметрами на базе робототехнической системы. Разработанный алгоритм обеспечивает быструю оценку частот сигнала с помощью метода динамического расширения регрессора, который позволяет улучшить качество переходных процессов одновременного оценивания нескольких частот. Разработанный алгоритм компенсации позволяет решать задачу в условиях наличия временных запаздываний.

Разработан алгоритм, позволяющий выделять полезную информацию из хаотического сигнала для оценки параметров системы. Был разработан наблюдатель, который использует только выходной сигнал хаотической системы при условии полной параметрической неопределенности модели.

Решена задача синтеза устройства оценивания параметров синусоидального сигнала. Предложена параметризация, позволяющая получить линейную регрессионную модель, вектор неизвестных параметров которой связан с параметрами исходного сигнала. Для оценивания параметров был использован градиентный метод. Сформулированы условия, при выполнении которых обеспечивается экспоненциальная сходимость к нулю ошибок оценивания.

Разработан алгоритм планирования маршрутов движения для промышленных роботов. Алгоритм основан на аппроксимации заданного маршрута с помощью дуг. Такое решение позволяет сократить количество опорных точек, уменьшить размер кода и

вычислительные затраты, увеличить качество выполняемых операций, а также упростить процесс программирования сложных движений. Проведены экспериментальные исследования с использованием шестизвенного манипулятора с вращательными сочленениями.

Разработан алгоритм оценки неизвестных параметров солнечного элемента с использованием итеративного метода Ньютона-Рафсона.

Разработан способ идентификации значения максимальной мощности фотоэлектрического источника при различных атмосферных условиях на основе применения методов Р&О и INC.

Разработан метод идентификации параметров солнечной батареи с использованием процедуры динамического расширения регрессора.



## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	11
1 Разработка робастных модификаций метода синтеза наблюдателей переменных состояния нелинейных динамических систем, основанных на идентификационных подходах .....	15
1.1 Обзор существующих решений .....	15
1.2 Наблюдатель положения для СДПМ.....	18
1.2.1 Модель СДПМ.....	18
1.2.2 Параметризация модели.....	18
1.2.3 Наблюдатель положения и скорости .....	19
1.2.4 Градиентный алгоритм оценки .....	19
1.2.5 Новый алгоритм оценки параметров.....	20
1.2.6 Оценка напряжения.....	23
2 Разработка алгоритмов бессенсерного управления электромеханическими объектами (включая асинхронные электрические машины и синхронные двигатели с постоянными магнитами) .....	23
2.1 Описание экспериментальной установки .....	23
2.2 Современный промышленный наблюдатель.....	24
2.3 Результаты сравнения .....	25
2.4 Нелинейный наблюдатель с ДРР устройством оценки.....	29
2.5 Комбинированный наблюдатель.....	31
3 Разработка алгоритмов стабилизации за конечное время нелинейных динамических систем с запаздыванием .....	35
3.1 Исследуемые системы .....	35
3.2 Предварительные сведения .....	35
3.3 Разработка алгоритма управления.....	40
4 Разработка процедуры динамического расширения регрессора для задач адаптации и идентификации динамических объектов .....	46
4.1 Адаптивное управление по выходу инвертируемыми многоканальными системами ...	46
4.2 Робототехническая следящая система с быстрой адаптацией к неизвестной траектории движения .....	49
4.3 Быстрое оценивание параметров генератора хаотического сигнала.....	52
4.4 Устройство оценки частоты гармонического сигнала .....	56
4.5 Алгоритм аппроксимации траектории движения промышленных роботов.....	58

4.6 Управление по выходу робастной минимально-фазовой многоканальной нелинейной системой .....	64
5 Разработка алгоритмов адаптивного управления фотоэлектрическими и электрическими объектами с применением процедуры динамического расширения и метода синтеза наблюдателей переменных состояния, построенного на базе идентификационного подхода .....	66
5.1 Определение параметров солнечного элемента итеративным методом .....	66
5.2 Отслеживание точки максимальной мощности фотоэлектрической панели методами P&O и INC .....	70
5.3 Идентификация параметров солнечной батареи с использованием процедуры динамического расширения регрессора .....	75
Заключение.....	81
Список использованных источников.....	83

## ВВЕДЕНИЕ

Существенное развитие техники и технологий, происходящее в последние годы, ведет к повышенному вниманию и востребованности интеллектуальных систем управления в промышленности и быту. Требуется, чтобы подобные системы функционировали в условиях неопределенности, запаздывания, изменяющейся окружающей среды и под воздействием возмущающих воздействий. Качество функционирования современных технических устройств и высокая экономическая эффективность внедрения программных и аппаратных средств накладывают на разработку и создание интеллектуальных систем управления строгие ограничения.

Одной из проблем, с которой сталкиваются разработчики систем управления, является регулирование объектов управления в условиях нестационарного окружения и меняющихся параметров (масса, трение и т.п.). Как правило, модели объектов управления описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, что, в совокупности с неопределенностью модели, приводит к сложностям синтеза регуляторов на основе классических методов. В настоящий момент в промышленности преобладает использование классических многоконтурных структур с ПИ и ПИД регуляторами, которые далеко не всегда обеспечивают требуемые показатели качества для систем с неучтенной динамикой и существенным влиянием внешней среды. Большинство стандартных существующих подходов имеют строгие ограничения, которые заключаются в том, что модель объекта управления должна быть частично линейна или близка к линейной. Это, в свою очередь, затрудняет и ограничивает использование данных методов на практике.

Для соответствия требуемым показателям качества системы управления, функционирующие в условиях, максимально приближенных к реальным, должны обладать адаптивными и робастными свойствами. Адаптивность системы управления заключается в автоматической настройке параметров регулятора в процессе функционирования, в то время как робастность обеспечивает определенную точность работы системы даже в случае неточно известной математической модели. Данные свойства позволяют управлять сложными техническими объектами в условиях запаздывания, возмущающих воздействий, параметрических, функциональных и структурных неопределенностей.

На сегодняшний день существуют различные подходы и алгоритмы построения интеллектуальных систем управления для ряда задач: управление линейными параметрически неопределенными объектами, компенсация гармонических возмущений, стабилизация нелинейных объектов и т.д. Однако до сих пор не существует универсальных алгоритмов и методов робастного и адаптивного управления, которые были бы широко

распространенными и реализованными на практике. С одной стороны это связано с тем, что разработка подобных универсальных методов требует получения трудоемких научно-теоретических результатов. С другой стороны, практическая реализация данных методов крайне сложна и громоздка.

В связи с этим, разработка современных универсальных интеллектуальных методов робастного и адаптивного управления, которые обладают простотой инженерной реализации, представляется актуальной и востребованной задачей. Подобные подходы могут найти широкое применение в промышленности и быту при регулировании различными техническими системами.

Одной из наиболее сложных задач современной теории управления является разработка методов адаптивного и робастного управления при неточном математическом описании нелинейного объекта управления, функционирующего в условиях внешних и внутренних возмущающих воздействий.

В качестве яркого примера нелинейной системы с параметрическими и структурными неопределенностями может быть представлен промышленный робототехнический манипулятор. Если параметры переносимого роботом груза выходят за допустимые значения, указанные в паспортных характеристиках манипулятора, то такие показатели качества функционирования, как скорость и точность отработки спланированных желаемых траекторий, существенно снизятся. Влияние неизвестной формы и большой массы перемещаемого манипулятором груза может быть рассмотрено как внешнее возмущение или как варьирование параметров робота. В последнем случае изменение математической модели проявляется в изменении моментов инерции и массы схвата или последнего звена манипуляционного устройства. Таким образом, для обеспечения высокого качества работы, система управления роботом должна обладать достаточным уровнем робастности и/или адаптации. Существует целый ряд других механических объектов, для которых разработка робастных и адаптивных алгоритмов управления также является открытой и весьма актуальной задачей. Среди подобных объектов можно выделить беспилотные летательные аппараты, экзоскелеты, антропоморфные роботы. Для данных объектов разработка методов робастного и адаптивного управления является нетривиальной задачей и для ее решения следует привлекать численные методы, средства теории оптимизации, математического моделирования и др.

Отдельным классом систем, представляющих особый интерес, являются гибридные системы, характеризующиеся наличием непрерывной нелинейной и дискретной составляющих в математической модели. В качестве примера подобных систем можно

привести двуногого шагающего робота, поскольку динамика маховой стадии одной ноги описывается непрерывными нелинейными дифференциальными уравнениями, а момент смены ног можно упрощенно представить в виде дискретного переключения с соответствующим преобразованием координат. Разработка алгоритмов адаптации для гибридных систем зачастую производится на основе анализа траекторий с использованием сечений Пуанкаре.

Традиционные подходы к синтезу регуляторов, обеспечивающих компенсацию внешних и внутренних возмущений, характеризуются повышением порядка астатизма системы, использованием интегральных регуляторов или же встраиванием известной модели возмущающего воздействия (комбинированные регуляторы). Однако использование подобных методов имеет ряд ограничений, поскольку в данных методах предполагается, что возмущения являются измеримыми, ограниченными или имеют известный закон изменения параметров. В отличие от вышеуказанных стандартных подходов, применение методов адаптивного управления обеспечит компенсацию возмущающих воздействий, которые имеют неизвестную ограниченную нерегулярную и неопределенную регулярную составляющие, а также позволит системе работать в условиях запаздывания.

Другая важнейшая задача, которая стоит перед разработчиками в современной теории управления, заключается в управлении линейными и нелинейными системами в условиях канальных ограничений и запаздывания. Современные структуры регулирования, позволяющие решать задачи управления в подобных условиях, характеризуются трудоемкой настройкой параметров и требуют достаточно высокого уровня знаний у инженеров. При этом все так же остро стоит задача управления в случае неточного математического описания системы, подверженной влиянию возмущений. В связи с этим, весьма актуальной задачей является разработка более мощных интеллектуальных систем управления с автоматическим расчетом параметров контроллеров. Автоматический расчет параметров, который производится в режиме реального времени, зависит от требований и ограничений на точность отработки желаемых траекторий системы, ее быстродействие и пр.

Стоит отметить, что в последние годы возрос интерес к управлению более простыми объектами, для которых разработано множество стандартных способов управления, в сложных условиях функционирования. При этом в случае бессенсорного управления, когда имеется лишь минимальный набор датчиков, а также в условиях присутствия неопределенностей, классические методы не могут быть применены по нескольким причинам. В первую очередь, это связано с неточно известной математической моделью

объекта. Во-вторых, при бессенсорном управлении часть переменных состояния объекта также становится неизвестной. Таким образом, задача управления в данных условиях сводится к адаптивному оцениванию неизвестных параметров модели с последующей разработкой наблюдателей состояния объекта.

Таким образом, целью исследований, проводимых на данном этапе НИР, является совершенствование существующих и разработка новых методов робастного и адаптивного управления линейными, нелинейными и гибридными динамическими системами, которые функционируют в условиях, максимально приближенных к реальным, и характеризуются наличием неопределенностей, запаздывания, возмущающих воздействий и канальных ограничений, а также апробация разработанных методов на практике.

Задачи, поставленные в рамках исследований, были определены исходя из состояния исследуемой области, и заключались в разработке методов и алгоритмов:

- робастного управления;
- адаптивного управления;
- компенсации возмущений;
- управления в условиях запаздывания;
- управления в условиях параметрических, сигнальных и структурных неопределенностей;
- интеллектуальных систем управления;
- управления в условиях канальных ограничений;
- апробация полученных методов и алгоритмов управления.

Для решения поставленных задач использовалось современное оборудование, приобретенное в соответствии с п.6 плана работ научного исследования, и программно-аппаратный комплекс, приобретенный в соответствии с п.8 плана работ научного исследования. Полный перечень и назначение оборудования отражены в Отчете о научных исследованиях. Затраты на приобретение оборудования отражены в Отчете о целевом использовании средств гранта.

Полученные в ходе выполнения этапа научные результаты были представлены на международных и всероссийских конференциях в соответствии с п.7 плана работ о научных исследованиях. Перечень конференций, в которых приняли участие сотрудники лаборатории, приведен в Отчете о научных исследованиях. Затраты на участие в конференциях отражены в Отчете о целевом использовании средств гранта.

# **1 Разработка робастных модификаций метода синтеза наблюдателей переменных состояния нелинейных динамических систем, основанных на идентификационных подходах.**

Данная глава посвящена модификациям и экспериментальному исследованию двух вариантов робастного, нелинейного и глобально сходящегося наблюдателя положения для неявнополюсных синхронных двигателей с постоянными магнитами (СДПМ). Ключевой особенностью робастного наблюдателя заключается в том, что для оценки положения ротора  $\theta$  требуется знание только сопротивления  $R$  и индуктивности  $L$  статора. Эффективность предложенного алгоритма бессенсорного управления рассматривается для случая, когда оценка положения используется для управления двигателем. Система управления в сочетании с нелинейным наблюдателем также сравнивается с современным промышленным регулятором. Показано, что предложенный бессенсорный регулятор с нелинейным наблюдателем позволяет значительно улучшить характеристики замкнутого контура при работе двигателя как на низких, так и на высоких скоростях.

## **1.1 Обзор существующих решений**

Прогресс в области микропроцессоров и силовых полупроводников позволяет реализовать бессенсорные алгоритмы управления (также известные как алгоритмы с самоочувствлением) во многих промышленных системах. Основные преимущества использования бессенсорного управления для СДПМ заключаются в упрощении конструкции, снижении затрат и повышении надежности функционирования двигателя. Также в некоторых технических устройствах, таких как краны, лифты, вакуумные насосы, установка датчика положения ротора может вызывать существенные трудности. В дорогостоящих системах отопления, вентиляции и кондиционирования, к которым предъявляются повышенные требования по надежности, использование высокопроизводительного процессора с применением бессенсорных технологий управления может повысить производительность. Еще одним преимуществом использования бессенсорных регуляторов является увеличение механической прочности из-за отсутствия кабелей, разъемов и периферийных модулей, связанных с установкой датчиков.

СДПМ часто используются в качестве генераторов в ветряных турбинах малой мощности. В целях снижения затрат и повышения надежности они часто проектируются без датчиков вала [1]. В таких случаях необходим надежный, высокоточный бессенсорный алгоритм управления генератором для повышения эффективности и извлечения энергии в условиях слабого ветра.

В связи с вышеупомянутыми причинами было разработано множество различных бессенсорных алгоритмов управления для СДПМ. Подробные обзоры приведены в работах [3], [2], [4], [6]. Большинство бессенсорных подходов для СДПМ используют один из следующих подходов:

1. Основные частотные составляющие напряжений и токов статора используются для получения электродвижущей силы (ЭДС), потока и положения ротора путем вычисления, оценки или наблюдателя.

2. Положение ротора получается, основываясь на паразитных и вторичных явлениях, таких как изменение индуктивности, связанное с насыщением или типом выполнения полюсов (явнополюсное, неявнополюсное исполнение) машины. При данном подходе популярным является метод, основывающийся на введении сигналов (обычно высоких частот).

Оба подхода сталкиваются с проблемами в некоторых промышленных применениях, особенно на низких скоростях, когда информация о положении ротора, содержащаяся в электродвижущей силе (ЭДС), достигает уровня шума. Смещения, неопределенности параметров и недостатки инвертора приводят к ошибкам в бессенсорных решениях на основе основных частотных составляющих напряжений и токов статора [7], [9], [8], [10]. Многие современные наблюдатели положения ротора, например, [11], [12] обеспечивают удовлетворительную оценку на средних и высоких скоростях.

В [11] предложен быстро сходящийся наблюдатель, основанный на режиме скольжения с применением сигмоидной функции. Данный наблюдатель обеспечивает гладкую оценку за конечное время и демонстрирует удовлетворительную эффективность без возникновения высокочастотных колебаний. Использование расширенных фильтров Калмана позволяет достичь улучшенные характеристики переходных процессов оценки при наличии шумов [13]. В работе [14] использован расширенный фильтр Калмана и предложены рекомендации по выбору матриц ковариации шумов. В целях повышения надежности в [15] разработан отказоустойчивый контроллер с двух этапным расширенным фильтром Калмана и адаптивным наблюдателем обратной ЭДС.

Одним из способов сравнения бессенсорных алгоритмов управления является проверка их работоспособности на низких скоростях. Алгоритмы [5] и [16] обеспечивают удовлетворительную оценку при скорости вращения ротора до 15 об/мин.

Метод оценки против-ЭДС [17] может работать со скоростью, равной 2% от номинальной скорости двигателя. Нелинейный алгоритм, предложенный в [17], позволяет оценивать изменения сопротивления статора с низковольтным двигателем и достигает 0,33% от номинальной скорости двигателя.



Как показано в [19], улучшенная работа на очень низких скоростях и в состоянии покоя может быть достигнута путем впрыска соответствующего тестового сигнала, тем самым обеспечивая средства для оценки колебаний индуктивности статора, которые, в свою очередь, связаны с положением ротора. В [20] используются методы впрыска сигналов в низкоскоростных областях, оценка ЭДС для более высоких скоростей и устанавливаются правила для области перехода.

С другой стороны, введение тестировочных сигналов неизбежно приводит к увеличению потерь, а также может требовать более дорогостоящих датчиков и более высокой производительности микроконтроллера. В то же время пульсации  $d$ -составляющей тока также вызывают некоторые пульсации крутящего момента из-за нелинейностей в магнитной цепи и из-за возможной неточности оценки исходной позиции. Стоит заметить, что пульсации момента могут быть недопустимы в некоторых применениях (например, станках) или могут усиливаться механическим резонансом (например, в лифтах).

В данной работе предпочтение отдается неинвазивным методам, которые не приводят к колебаниям крутящего момента, вызванные впрыском тестовых сигналов (например, при точном позиционировании). Рассматривается нелинейный бессенсорный регулятор, построенный на базе наблюдателя А.А. Бобцова [21]. Предложены модификации метода и проведены экспериментальные исследования.

Ключевой особенностью нелинейного наблюдателя положения, предложенного в [21], является независимость оценок от скорости вращения. Для оценки положения необходимо только знание сопротивления и индуктивности статора, в то время как механические параметры и постоянная магнитного потока не требуются. Последний параметр необходим, например, в [23] и [22]. В связи с этим нелинейный наблюдатель из [21], а также предлагаемые расширения робастны по отношению к магнитному потоку, генерируемому постоянными магнитами. Робастность нелинейного наблюдателя по отношению к различным коэффициентам настройки и начальным условиям также приведена в [21]. Предлагаемый в настоящей работе подход использует напряжение статора, которое не измеряется напрямую, а оценивается, как это реализовано в большинстве современных промышленных приводов. Алгоритм также модифицирован для работы на высоких скоростях. Эффективность предлагаемых решений продемонстрирована экспериментально путем сравнения на низких и высоких скоростях с современным регулятором, который является ярким представителем промышленных двигателей и сервоприводов в настоящее время. Предложенный подход концептуально подобен методу, предложенному в [20], который использует различные методы для низких

и высоких скоростей и правила перехода между ними.

## 1.2 Наблюдатель положения для СДПМ

### 1.2.1 Модель СДПМ

Рассмотрим классическую двухфазную  $\alpha\beta$  модель ненасыщенного неявнополюсного СДПМ, представленная в [24], [4]. В стационарной  $\alpha\beta$  системе координат модель двигателя описывается

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_{\alpha\beta} &= v_{\alpha\beta} - Ri_{\alpha\beta}, \\ J\dot{\omega} &= -B\omega + \tau_e - \tau_L, \\ \dot{\theta} &= \omega, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\lambda_{\alpha\beta} \in R^2$  - общий магнитный поток,  $i_{\alpha\beta} \in R^2$  - токи статора,  $v_{\alpha\beta} \in R^2$  - напряжения статора,  $R > 0$  - сопротивление обмоток статора,  $J > 0$  - момент инерции ротора,  $\theta \in S := [0, 2\pi)$  - угол поворота ротора,  $\omega \in R$  - механическая угловая скорость вращения ротора,  $B \geq 0$  - коэффициент вязкого трения,  $\tau_L \in R$  - нагрузочный момент, который может быть переменной величиной,  $\tau_e$  - электромагнитный момент, развиваемый двигателем.

Для неявнополюсного СДПМ общий магнитный поток удовлетворяет

$$\lambda_{\alpha\beta} = Li_{\alpha\beta} + \lambda_m \begin{bmatrix} \cos(n_p \theta) \\ \sin(n_p \theta) \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

где  $L > 0$  - индуктивность статора и  $n_p \in N$  - количество пар полюсов. Целью является оценка положения ротора  $\theta(t)$  и использование полученной оценки для управления двигателем.

### 1.2.2 Параметризация модели

Приведем кратко основные шаги параметризации модели СДПМ, предложенные в [21]. Обозначим компоненту магнитного потока  $\lambda(t)$  в качестве нового вектора

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda_m \begin{bmatrix} \cos(n_p \theta) \\ \sin(n_p \theta) \end{bmatrix}$$

и введем две новые вспомогательные переменные

$$\tilde{v}(t) = v_{\alpha\beta}(t), \quad \tilde{i}(t) = i_{\alpha\beta}(t).$$

Далее, дифференцируя (1.2) и объединяя полученное с первым уравнением системы (1.1), получим

$$\dot{x} = v_{\alpha\beta} - L di_{\alpha\beta} dt - Ri_{\alpha\beta}. \quad (1.3)$$

Интегрирование последнего уравнения дает

$$x(t) = m(t) + \eta, \quad (1.4)$$

где переменный вектор  $m(t) = z_1(t) - Li_{\alpha\beta}(t) - Rz_2(t)$  является известным, а вектор постоянных величин  $\eta = x(0) - z_1(0) + Li_{\alpha\beta}(0) + Rz_2(0)$  представляет собой начальные условия потока  $\lambda(0)$  – неизвестные постоянные величины, которые требуется идентифицировать.

### 1.2.3 Наблюдатель положения и скорости

Неизмеримый угол  $\theta$  может быть восстановлен в соответствии с уравнением (1.4) используя оценку вектора неизвестных параметров  $\eta$  и тригонометрическое свойство:

$$\hat{x} = m(t) + \hat{\eta}(t), \quad \hat{\theta} = \frac{1}{n_p} \arctan\left(\frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1}\right). \quad (1.5)$$

В [21] доказано, что построенный нелинейный наблюдатель положения глобально сходится при некоторых обоснованных предположениях, связанных с типовыми режимами работы двигателя, и все сигналы в системе ограничены.

Скорость двигателя оценивается с помощью стандартного алгоритма оценки скорости, основанном на методе фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\chi}}_1 &= K_p(\hat{\theta} - \chi_1) + K_i\chi_2, & \dot{\hat{\chi}}_2 &= \hat{\theta} - \chi_1, \\ \dot{\hat{\omega}} &= K_p(\hat{\theta} - \chi_1) + K_i\chi_2, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $K_p > 0$  и  $K_i > 0$  – пропорциональный и интегральный коэффициенты, соответственно, и  $\hat{\theta}$  – оценка положения, генерируемая нелинейным наблюдателем.

Далее рассмотрим методы идентификации вектора неизвестных параметров  $\eta$ .

### 1.2.4 Градиентный алгоритм оценки

Возведем в квадрат обе части уравнения (1.4) и используем основное тригонометрическое тождество [21]. В результате, зависимость от угла  $\theta$  будет устранена и полученное уравнение можно переписать в виде стандартной регрессионной модели:

$$g = 2m \cdot \eta + C, \quad (1.7)$$

где переменные  $g$  и  $m$  являются измеримыми, а  $C = -\lambda_m^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2$ .

Применим к обеим частям уравнения (1.7) фильтр  $F(p) := \left[ \frac{\alpha p}{p+\alpha} \right]$  с

дифференциальным оператором  $p = \frac{d}{dt}$ . Благодаря данной фильтрации, можно пренебречь влиянием неизвестной постоянной  $C$  и получить стандартную линейную регрессионную модель

$$y = 2q \dot{\eta}, \quad (1.8)$$

где сигналы  $y = F(p)g$  и  $q = F(p)m$  являются измеримыми.

Для оценки  $\eta$  можно использовать следующий классический градиентный алгоритм:

$$\dot{\hat{\eta}} = \Gamma \left( \frac{1}{2} qy - qq^T \hat{\eta} \right), \quad (1.9)$$

где  $\Gamma = \Gamma^* > 0$  - матрица адаптации. Общая структура наблюдателя [21] показана на рисунке 1.1.

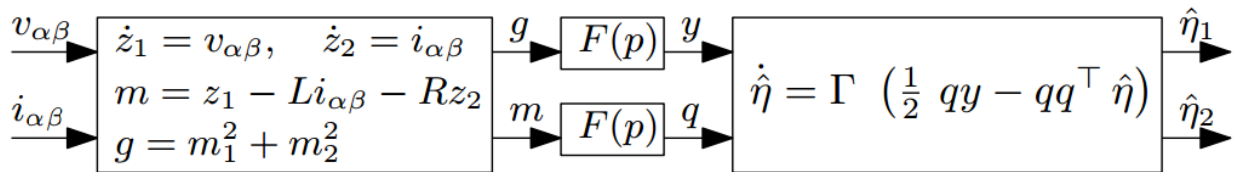


Рисунок 1.1 – Структура наблюдателя положения [21].

### 1.2.5 Новый алгоритм оценки параметров

Как показано в разделах 1.2.3 и 1.2.4, задача оценки положения может быть преобразована в задачу идентификации двух параметров  $\eta$ , которые могут оценены выполнены с использованием стандартного градиентного алгоритма (1.9).

Для того чтобы получить более высокую скорость сходимости и повысить качество переходных процессов, градиентный алгоритм оценки может быть заменен алгоритмом динамического расширения регрессии (ДРР) [25].

Процедура ДРР состоит из двух основных этапов:

1. Применение динамического оператора к исходной регрессионной модели, что приводит к получению новых регрессорных моделей.
2. Формирование расширенной регрессионной модели с соответствующим смешиванием новых регрессоров.

Динамические операторы в процедуре ДРР должны быть линейными и  $L_\infty$ -устойчивыми, а также для любых ограниченных входных воздействий их выход должен удовлетворять

$$(\cdot)(t) := [H(\cdot)](t) + \varepsilon_t, \quad (1.10)$$

где  $\varepsilon_t$  является экспоненциально затухающая компонента.

Число требуемых операторов равно  $k-1$  для  $k$ -мерной линейной регрессии. В рассматриваемой задаче имеется два параметра оценки  $\eta_1$  и  $\eta_2$  в (1.8), в связи с чем требуется только один динамический оператор. Выберем линейный стационарный фильтр

$$H(p) = \frac{\beta}{p + \beta}, \quad (1.11)$$

где  $\beta > 0$  является настраиваемым параметром.

Для получения второй регрессионной модели применим данный фильтр к обеим частям исходной модели регрессора (1.8) и пренебрежем экспоненциально затухающей компонентой

$$\bar{y}(t) = \bar{q}^*(t)\eta, \quad (1.12)$$

где здесь и далее в работе экспоненциально затухающие члены исключены из дальнейшего рассмотрения  $\bar{y} = H(p)y$  и  $\bar{q} = H(p)q$ .

Сформируем расширенный регрессор в виде

$$Y_e(t) = Q_e(t)\eta, \quad (1.13)$$

что в развернутой матричной записи представлено как

$$\begin{bmatrix} y \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ \bar{q}_1 & \bar{q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Далее, умножив последнее уравнение слева на союзную матрицу от  $Q_e$

$$\text{adj}\{Q_e\} = \begin{bmatrix} \bar{q}_2 & -q_2 \\ -\bar{q}_1 & q_1 \end{bmatrix}$$

получим

$$\begin{bmatrix} \bar{q}_2 y - q_2 \bar{y} \\ q_1 \bar{y} - \bar{q}_1 y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_2 q_1 - q_2 \bar{q}_1 & 0 \\ 0 & \bar{q}_2 q_1 - q_2 \bar{q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

Уравнение (1.15) представляет собой две отдельных регрессионных модели для каждого из неизвестных параметров  $\eta_1$  and  $\eta_2$  вместо одного исходного регрессора (1.8), сочетающего в себе оба параметра.

Обозначив

$$\xi_1 = \bar{q}_2 y - q_2 \bar{y}, \quad \xi_2 = q_1 \bar{y} - \bar{q}_1 y, \quad \phi = \bar{q}_2 q_1 - q_2 \bar{q}_1,$$

выполним последний шаг в ДРР процедуре – сконструируем скалярные устройства оценки для моделей  $\xi_1 = \phi \eta_1$  и  $\xi_2 = \phi \eta_2$

$$\hat{\eta}_1^* = \gamma_1 (\xi_1 \phi - \phi^2 \hat{\eta}_1), \quad \hat{\eta}_2^* = \gamma_2 (\xi_2 \phi - \phi^2 \hat{\eta}_2),$$

с коэффициентами адаптации  $\gamma_1 > 0$  и  $\gamma_2 > 0$  для градиентных алгоритмов оценки.

Структура нового предложенного наблюдателя представлена на рисунке 1.2.

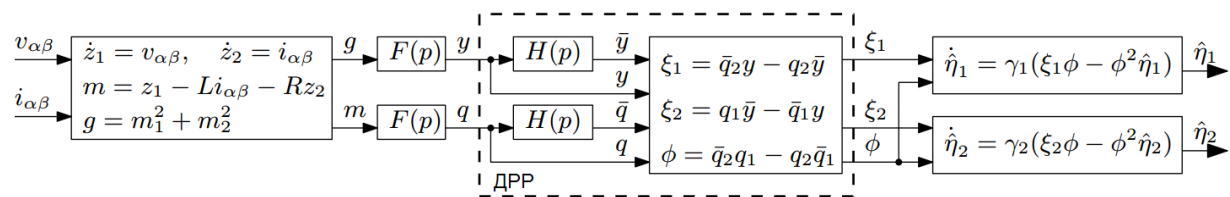


Рисунок 1.2 – Структура нового предложенного наблюдателя положения.

Общая структура бессенсорного алгоритма управления СДПМ с предложенным нелинейным наблюдателем приведена на рисунке 1.3.

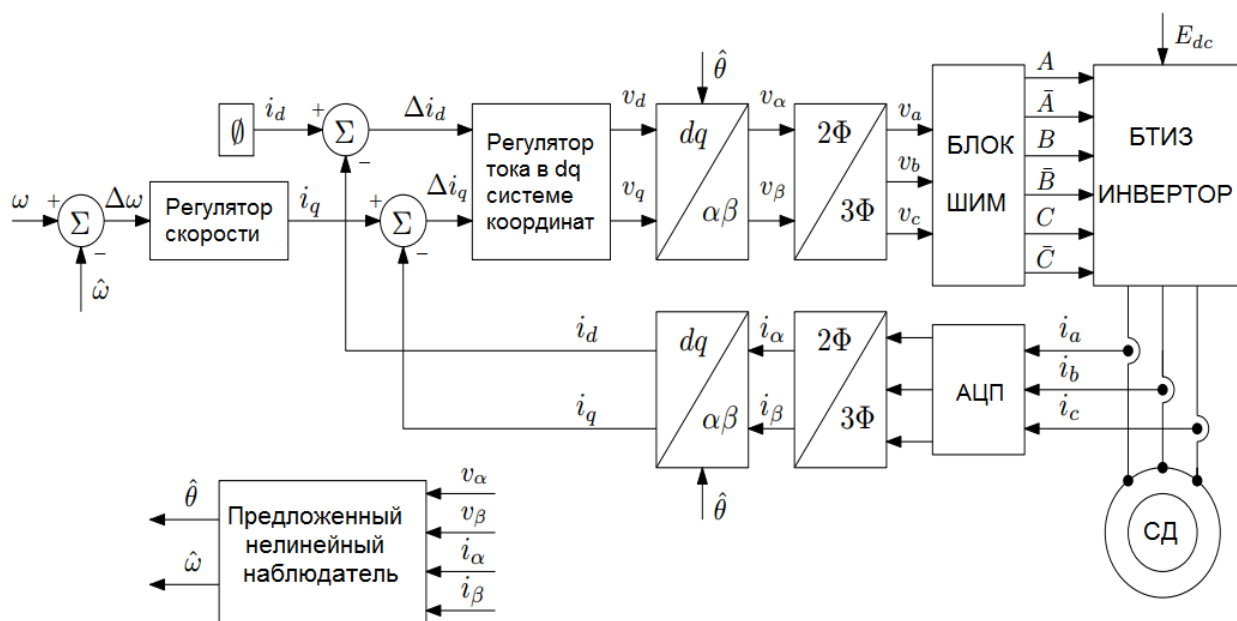


Рисунок 1.3 – Структура бессенсорного алгоритма управления СДПМ с предложенным нелинейным наблюдателем

Чтобы подчеркнуть преимущества использования алгоритма ДРР по сравнению со стандартным градиентным алгоритмом, выпишем их уравнения ошибок. Модель ошибки градиентного алгоритма (1.9), используемого в [21] задается дифференциальным уравнением

$$\dot{\varphi} = -\Gamma q q' \varphi$$

Необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости последней системы является строгое условие незатухающего возбуждения регрессионной функции  $q$ . С другой стороны новый подход, основанный на ДРР процедуре, приводит к двум отдельным моделям ошибок

$$\dot{\varphi}_{1,2} = -\gamma_{1,2} \phi^2 \varphi_{1,2},$$

решениями которых являются

$$\varphi_{1,2}(t) = e^{-\gamma_{1,2} \int_0^t \phi^2(s) ds} \varphi_{1,2}(0).$$

Таким образом, устройство оценки с ДРР требует более мягкого условия – функция  $\phi$  не должна быть квадратично интегрируемой.

### 1.2.6 Оценка напряжения

В большинстве современных сервоприводов и промышленных двигателей фазные напряжения  $V_a, V_b$  и  $V_c$  реконструируются из сигналов широтно-импульсной модуляции (ШИМ) и источника постоянного напряжения  $E_{dc}$ . Для оценки фазных напряжений используются управляющие сигналы от встроенного контроллера тока

$$V_{phase} = E_{dc} \frac{2t_{on} - T_{pwm}}{2T_{pwm}}, \quad (1.16)$$

где  $t_{on}$  - ширина импульса,  $T_{pwm}$  - период (ШИМ).

Для предотвращения коротких замыканий между транзисторами контроллеров тока искусственно вводится время блокировки  $t_{lck}$  (т.н. мертвое время - см., например, [26], [27]). В свою очередь, наличие данного времени блокировки наводит ошибку в (1.16). Поэтому во всех современных промышленных бессенсорных приводах используются схемы компенсации времени  $t_{lck}$ , зависящие, как правило, от знака фазного тока. Амплитуда коррекционных сигналов определяется мертвым временем  $t_{lck}$ , периодом ШИМ  $T_{pwm}$  и напряжением источника питания  $E_{dc}$ . К примеру, в используемом двигателе DM2020 время блокировки равно 3 мкс. Тем не менее, компенсация времени блокировки не устраняет всех ошибок, связанных с оценкой фазных напряжений, поскольку временные задержки при обработке сигналов ШИМ через оптопары и драйверы точно неизвестны.

## 2 Разработка алгоритмов бессенсорного управления электромеханическими объектами (включая асинхронные электрические машины и синхронные двигатели с постоянными магнитами).

### 2.1 Описание экспериментальной установки

Была проведена серия экспериментов на экспериментальной установке, включающей программируемый двухосевой промышленный серво усилитель [28] с контроллером DSP и двумя синхронными сервомоторами [29]. DSP контроллер служит для выполнения задач, необходимых для управления двигателем переменного тока, а также обеспечивает калькуляцию оценок положения, вырабатываемых современным наблюдателем,

нелинейным наблюдателем из [21] и предлагаемым модифицированным наблюдателем. Тестируемый двигатель соединен с другим двигателем того же типа зубчатым ремнем. Оба синхронных двигателя имеют 3 пары полюсов с постоянными магнитами, выполненными посредством поверхностного монтажа (т.е. используются двигатели с неявнополюсным ротором). Двигатели запитаны от инверторов на основе БТИЗ (биполярный транзистор с изолированным затвором) с напряжением источника питания 520 В. Измерения считываются по внутренним переменным DSP контроллера, которые регистрируются в реальном времени и сохраняются на выделенной SD-карте.

Управление тестируемым двигателем осуществляется в «режиме управления скоростью» (как показано на рисунке 1.3). Система управления вторым двигателем осуществляется в режиме управления крутящим моментом и используется в качестве программируемой нагрузки. Испытуемый двигатель также имеет датчик положения (резольвер), в связи с чем фактическое положение ротора известно. Данное измеренное положение используется для сравнения с оцененным сигналом положения (полученным посредством современного наблюдателя или новыми нелинейными наблюдателями) и не используется для управления двигателем. С целью повышения реалистичности экспериментов, программируемый крутящий момент нагрузки задан в форме медленно меняющегося пилообразного сигнала, который изменяется от +0,1 Нм до -0,1 Нм. Задание нагрузочного момента в таком виде соответствует усложненным условиям проверки эффективности бессенсорного алгоритма управления ввиду малых значений токов, знак которых критически важен для компенсации времени блокировки.

## 2.2 Современный промышленный наблюдатель

Предложенный нелинейный наблюдатель сравнивался с наблюдателем из [30], который зачастую используется при бессенсорном управлении двигателями переменного тока и основан на интегрировании ЭДС. Краткий обзор данного традиционного подхода приведен в [29]. Как показано в [24, рисунок 2] интегрирование не может быть идеальным из-за неизбежного наращивания выходного значения, вызванного некоторым (ограниченным) смещением постоянного тока. Идеальное интегрирующее звено при имплементации в реальном (неидеализированном) практическом приложении приводит к различным смещениям, насыщению и виндапу (от. англ. winding up – завершение, взвинчивание). Внесение утечки, усиление постоянного тока интегратором становится конечным, а смещение имеет лишь некоторые ограниченные эффекты на выходе. В связи с этим, используется аperiодическое звено первого порядка в виде  $1/(p+e)$  с малым числом  $e$  (см. [24, ур-е (2)], чтобы предотвратить явление нарастания. Отрицательный



эффект данной замены заключается в том, что пространственное положение соответствующей системы координат, потока и магнитодвижущей силы будет иметь фазовое отставание. Ориентация соответствующих векторов становится субоптимальной, что приводит к увеличению потерь энергии и меньшему крутящему моменту. Соответствующие ошибки в амплитудах и пространственном положении векторов рассчитываются исходя из значений электрической частоты и компенсируются в [24, рис.2]. Синус и косинус угла ротора получены из [29, ур-я, (11) и (12)] как соотношение между составляющими магнитного потока  $(\lambda_\alpha, \lambda_\beta)$  и амплитудой потока ротора. На основе сигналов синуса и косинуса скорость вращения ротора можно вычислить по выражению  $\lambda_\alpha d(\lambda_\beta)/dt - \lambda_\beta d(\lambda_\alpha)/dt$ .

На низких скоростях сигнал скорости ротора становится зашумленным и искаженным из-за паразитных явлений. В связи с этим, осуществляется фильтрация данного сигнала при помощи наблюдателя скорости [31]. Настройка последнего осуществляется таким образом, чтобы обеспечить настроенного таким образом, чтобы обеспечить надлежащую оценку скорости на частотах, значительно превышающих требуемую динамику контура скорости.

### 2.3 Результаты сравнения

В данном разделе представлены экспериментальные результаты для системы управления с современным наблюдателем и алгоритма бессенсорного управления, основанного на исходном нелинейном наблюдателе [21]. Результаты тестов приведены для трех случаев. В первом эксперименте к тестируемому двигателю приложен пилообразный нагрузочный момент, и сравниваются ошибки оценки положения на низких скоростях. Во втором случае, к двигателю приложена постоянная нагрузка и определяется минимальная скорость, на которой система управления сохраняет работоспособность. Третий эксперимент демонстрирует эффективность схем управления на очень высокой скорости с применением нагрузочного момента в виде импульсов.

В первой части рассмотрена работоспособность на скоростях, соответствующих электрическим частотам 2 Гц; для тестируемого двигателя с 6-ю полюсами соответствующая скорость вала равна 4,19 рад/с (40 об/мин).

В ходе экспериментов регистрировались следующие сигналы:

- 1) Для бессенсорного регулятора с современным наблюдателем, используемым в промышленности – ток фазы А  $I_{A1}$ , задающий ток  $I_{q1}$ , измеренная скорость  $\omega_1$ , измеренное положение ротора  $\theta_1$ , оцененное положение  $\hat{\theta}_1$  и ошибка оценки

положения  $\theta_1^0$ .

- 2) Для бессенсорного регулятора с нелинейным наблюдателем - ток фазы А  $I_{A2}$ , задающий ток  $I_{q2}$ , измеренная скорость  $\omega_2$ , измеренное положение ротора  $\theta_2$ , оцененное положение  $\hat{\theta}_2$  и ошибка оценки положения  $\theta_2^0$ .

Переходные процессы для двух регуляторов приведены на рисунке 2.1. Единицы измерения скорости и положения на показанных рисунках – [рад/с] и [рад], соответственно.

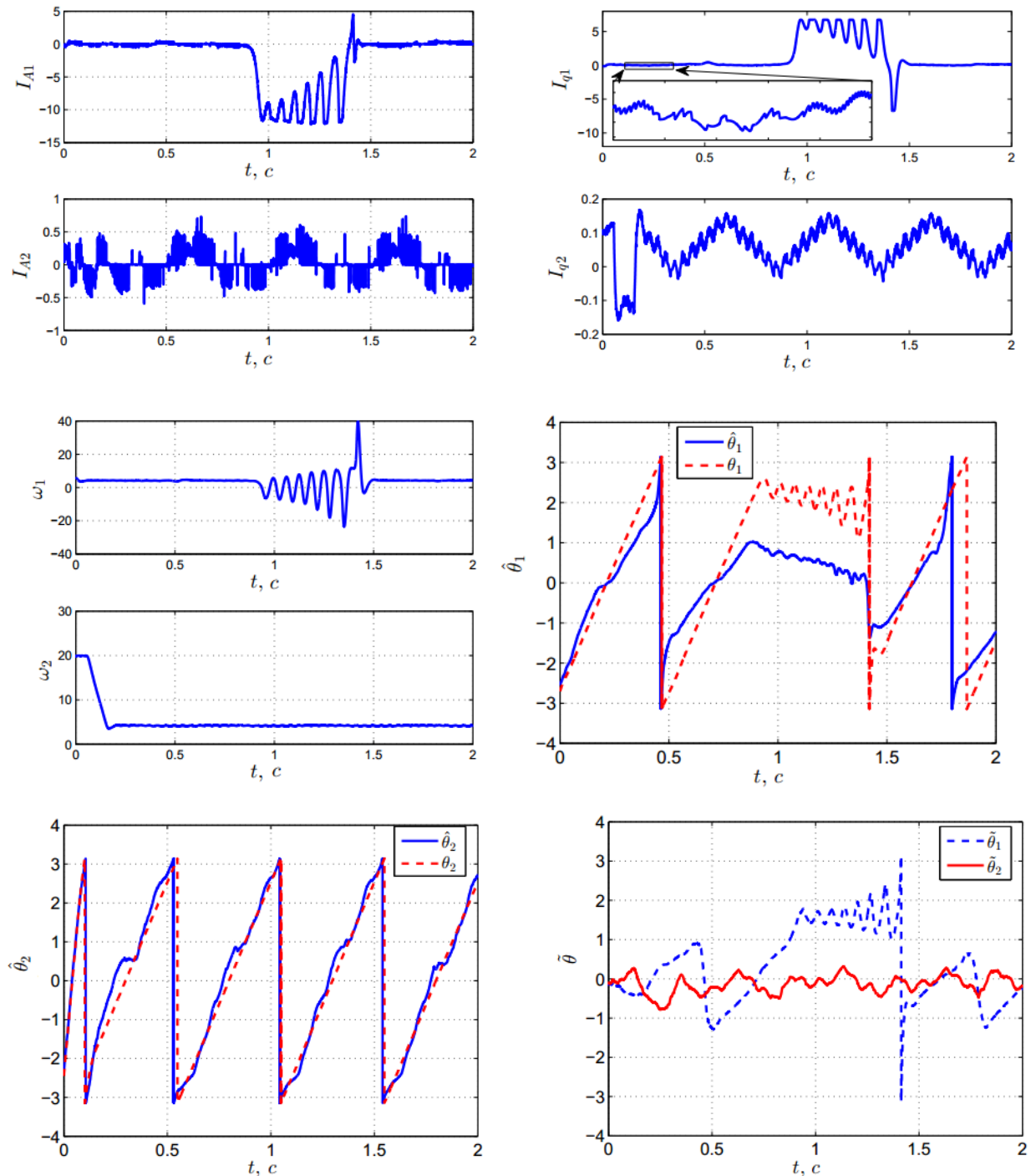


Рисунок 2.1 – Переходные процессы в бессенсорных системах управления, основанных на современном промышленном и нелинейном наблюдателях

В нелинейном наблюдателе использованы нулевые начальные значения для фильтра и стандартного градиентного алгоритма оценки (1.9). Также применены параметры без учета настройки:  $\alpha = 100, \Gamma = I_1$ .

Оценки, генерируемые обычным наблюдателем, не являются надежными, поскольку его ошибка оценки положения достигает отклонений до 3,14 рад (см. рисунок 2.1), что составляет примерно половине одного оборота. В то же время исходный нелинейный наблюдатель демонстрирует удовлетворительные результаты с ошибкой оценки положения в диапазоне  $(-0.4, 0.4)$  рад.

Второй эксперимент демонстрирует способность нового регулятора с нелинейным наблюдателем работать на очень низких скоростях. Переходные процессы, соответствующие электрической частоте питания 0,2 Гц, показаны на рисунке 2.2.

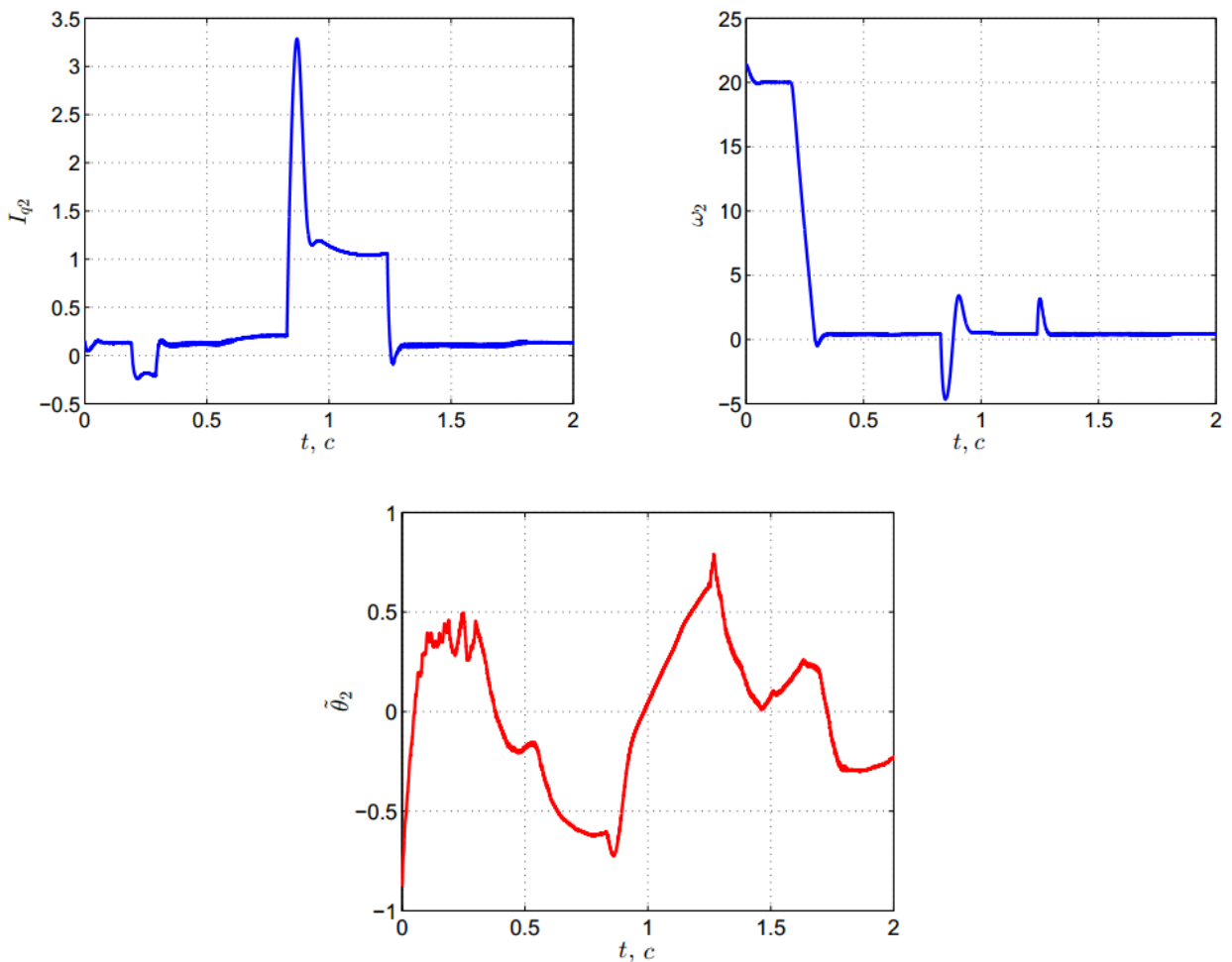


Рисунок 2.2 – Переходные процессы в бессенсорной системе управления, основанной на нелинейном наблюдателе, при очень низкой скорости вращения ротора 0.42 рад/с

В данном тесте отсутствуют пульсации крутящего момента, как в предыдущем эксперименте; желаемая скорость начинается примерно с 190 об/мин (20 рад/с). Затем скорость падает до финальной желаемой скорости 0,42 рад/с (4 об/мин). Начальный

нагрузочный момент нагрузки имеет малое значение, по сути, представляя собой трение. Далее на двигатель подается нагрузка в виде импульса равного 1 Нм, после чего ее заданное значение снова равно нулю. Остальные условия и настроечные параметры, как и в предыдущем тесте.

Как видно из рисунка 1.5, ошибка оценки положения  $\hat{\theta}_2$  исходного нелинейного наблюдателя при очень низких скоростях выше, чем в первом эксперименте. Тем не менее, предложенный бессенсорный алгоритм управления сохраняет работоспособность и демонстрирует удовлетворительные результаты для механического регулирования скорости.

Третий эксперимент, показанный на рисунке 2.3, иллюстрирует точность работы предложенного регулятора на высокой скорости, желаемое значение которой 5000 об / мин (или, примерно, 523 рад/сек). К двигателю применяется импульсный нагрузочный момент 5 Нм, который принимает положительное значение в течение 400 мс, затем отрицательное для следующих 400 мс и приравнивается к нулю после. Действительный крутящий момент, развиваемый двигателем, также имеет компоненты, которые компенсируют потери в обмотках и потери в механической коробке передач (зубчатый ремень). Как показано в данном тесте, новый алгоритм позволяет достичь очень низкого значения ошибки оценки и демонстрирует высокую робастность по отношению к внешними возмущениям.

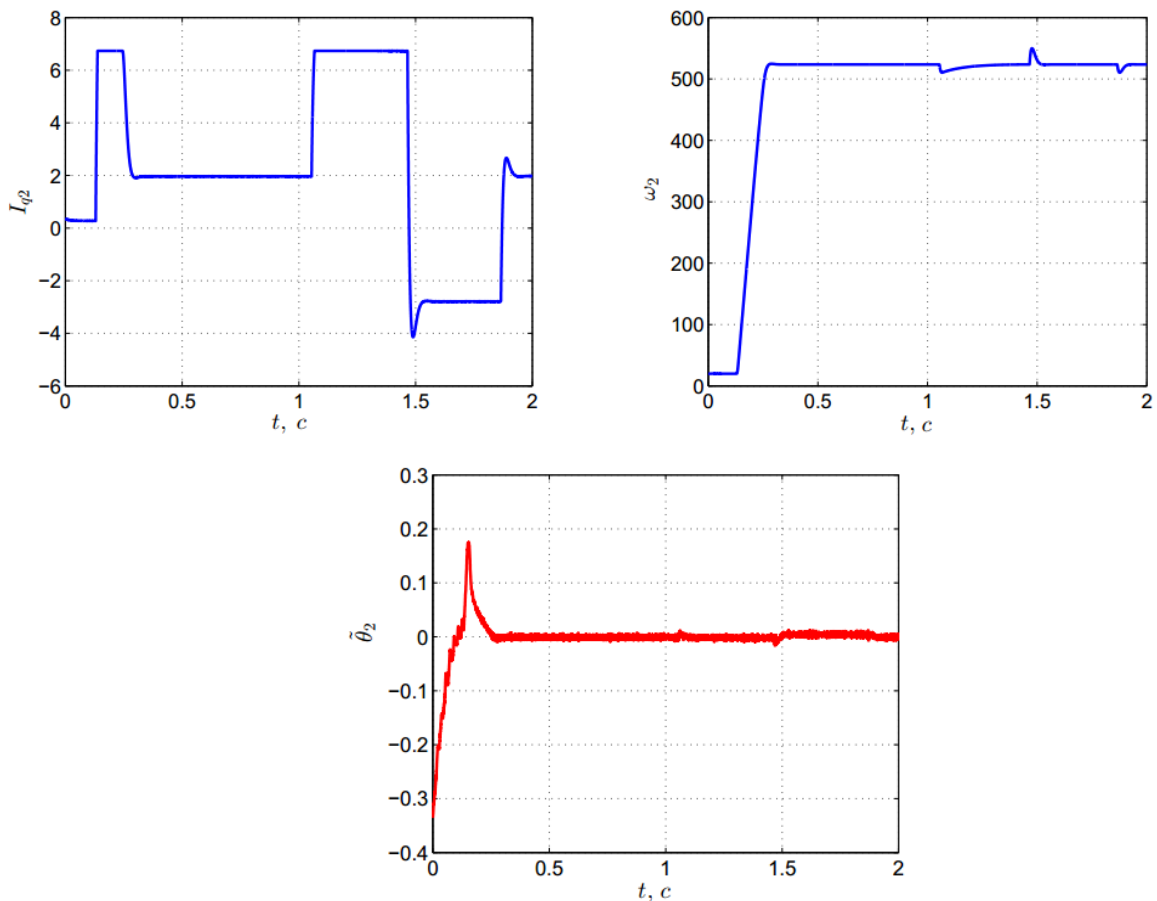


Рисунок 2.3 – Переходные процессы в бессенсорной системе управления, основанной на нелинейном наблюдателе, при высокой скорости вращения ротора 523 рад/с

#### 2.4 Нелинейный наблюдатель с ДРР устройством оценки

Эксперименты, представленные в данном разделе, иллюстрируют работу бессенсорных алгоритмов управления, основанных на исходном нелинейном наблюдателе [21] и его модифицированной версии с применением процедуры ДРР.

Для исходного наблюдателя настраиваемые параметры и начальные условия такие же, как и в предыдущих тестах. Начальные условия для наблюдателя с устройством оценки ДРР также равны нулю, а настраиваемые параметры  $\beta = 10, \gamma_{1,2} = 1$ . Первый тест, показанный на рисунке 2.4, выполнен для низкой скорости и демонстрирует преимущества системы управления с ДРР по сравнению с регулятором, использующего наблюдатель [21]. Желаемая скорость равна 3,77 рад / с, а крутящий момент нагрузки постоянный и равен примерно 1 Нм. Как видно из графиков, улучшенные переходные процессы в наблюдателе с ДРР оценителем приводят к более точной оценке положения.

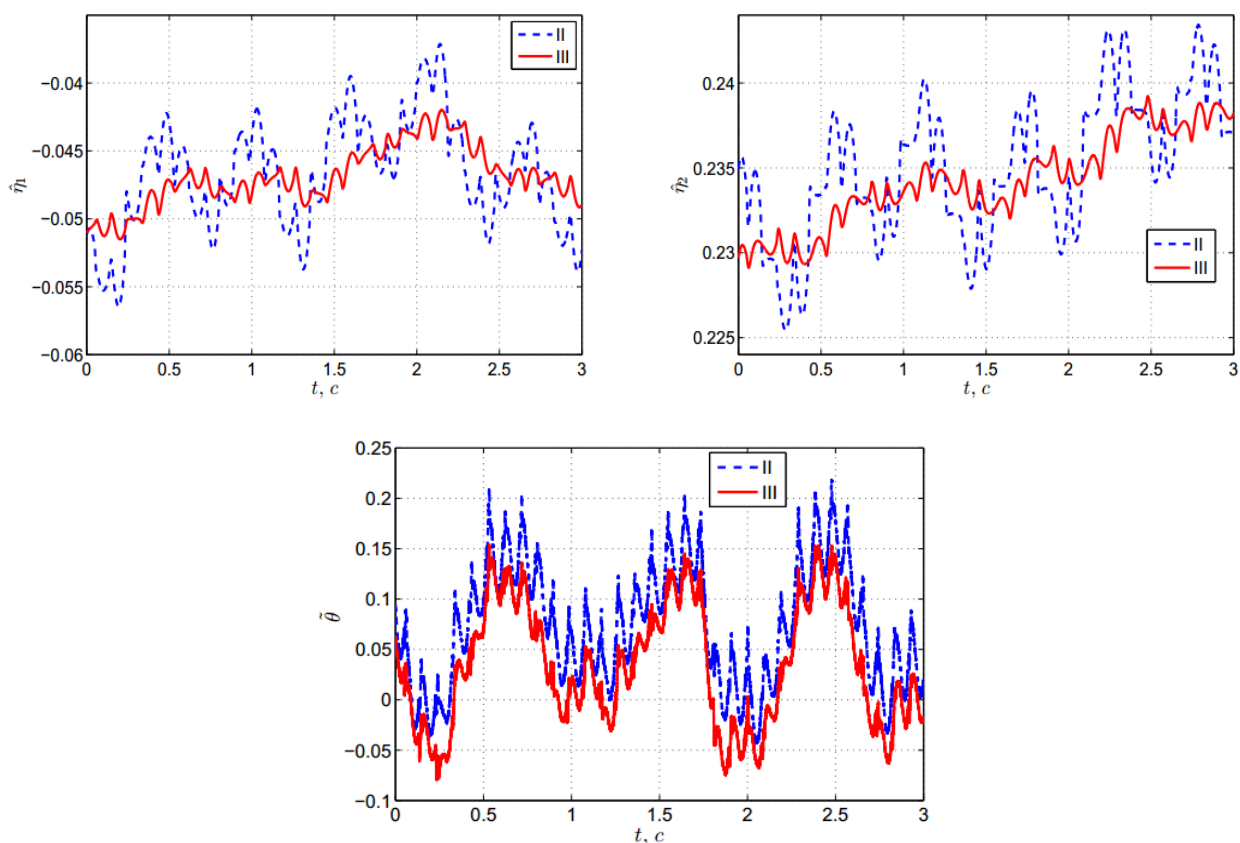


Рисунок 2.4 – Переходные процессы в бессенсорном регуляторе с градиентным алгоритмом оценки (II) и в бессенсорном регуляторе с устройством оценки, построенной на базе алгоритма ДРР (III)

Второй тест включает в себя следующее: для заданной электрической частоты (следовательно, заданной скорости) двигатель работает без нагрузочного момента, далее

нагрузка становится равной номинальному значению, после чего она снова приравняется к нулю.

Оба наблюдателя положения вырабатывают свои оценки, которые сравниваются с действительным положением, измеренным датчиком положения на валу двигателя. Также рассчитываются среднеквадратичные ошибки, которые строятся относительно электрической частоты (см. рисунок 2.5). Для того, чтобы результаты испытаний были более наглядными, на рисунке частота  $f_e$  построена в логарифмической шкале по горизонтальной оси графика. Как и в предыдущих экспериментах, ошибка положения исходного нелинейного наблюдателя  $\tilde{\theta}_2$ , в то время как обозначение  $\tilde{\theta}_3$  соответствует наблюдателю с ДРР оценителем.

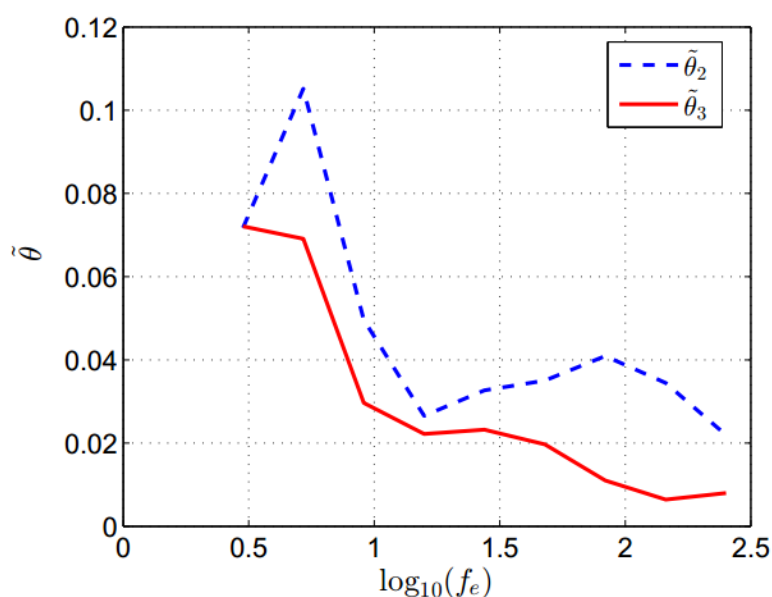


Рисунок 2.5 – Ошибки оценки положения для исходного нелинейного наблюдателя  $\tilde{\theta}_2$  и нелинейного наблюдателя  $\tilde{\theta}_3$  с применением процедуры ДРР

Как показано на рисунке 2.5, нелинейный наблюдатель с ДРР имеет более низкую ошибку, чем оригинальная версия из [21].

Наконец, на рисунке 2.6 показана устойчивость обоих методов при 1 Гц для случая, когда сопротивление статора уменьшено на 20%. Нагрузочный момент равен примерно 7.3 Нм, регулятор с оценкой на основе ДРР достигает более низкого значения ошибки положения, чем исходный наблюдатель.

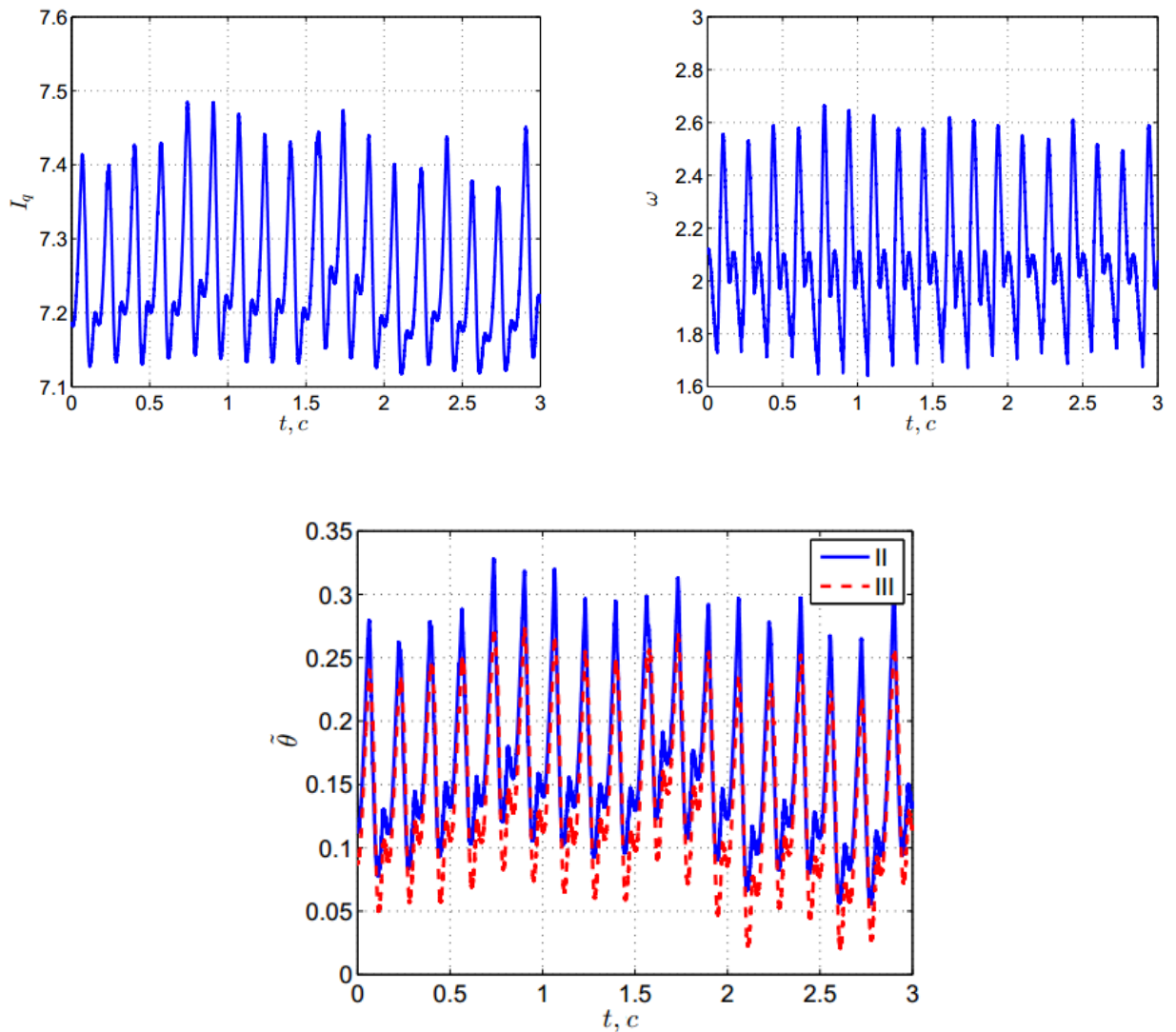


Рисунок 2.6 – Переходные процессы в бессенсорных системах управления, основанных на исходном нелинейном наблюдателе (II) и нелинейном наблюдателе с использованием ДРР (III) при 2,09 рад/с и  $R=0,8$  Ом

## 2.5 Комбинированный наблюдатель

Последний эксперимент иллюстрирует возможность использования объединенного наблюдателя, включающего в себя исходную и модифицированную версии нелинейного наблюдателя. Оценки положения  $\hat{\theta}_2$  исходного нелинейного наблюдателя используются для управления двигателем на более низких скоростях, тогда как оценки, генерируемые наблюдателем с ДРР  $\hat{\theta}_3$ , используются на более высоких скоростях. В граничной области оценка положения переходит между  $\hat{\theta}_2$  и  $\hat{\theta}_3$ .

Момент нагрузки установлен на 5 Нм +/- 0,1 Нм (с более высоким значением при высоких скоростях из-за потерь в обмотках). Оба наблюдателя генерируют оценки на протяжении всего времени работы. Начальная механическая скорость составляет 20 рад / с,

что соответствует электрической частоте, примерно, 10 Гц. Затем двигатель разгоняется равноускоренно до 100 рад /с, а затем замедляется до нулевого значения. Для  $\omega < 40$  рад/с используются оценки исходного нелинейного наблюдателя. По мере того, как скорость проходит 40 рад/с, исходный наблюдатель положения постепенно сменяется модифицированным с ДРР алгоритмом. Оценка положения от комбинированного наблюдателя рассчитывается как

$$\hat{\theta}_h = (1 - \rho)\hat{\theta}_2 + \rho\hat{\theta}_3, \quad (2.1)$$

где  $\hat{\theta}_2$  является оценкой положения исходного наблюдателя,  $\hat{\theta}_3$  - оценка наблюдателя с ДРР и  $\rho$  является переменной переключения, заданную в виде

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{for } \omega < 40 \text{ rad/s,} \\ \frac{t-40}{2} & \text{for } 40 \leq \omega \leq 42 \text{ rad/s,} \\ 1 & \text{for } \omega > 42 \text{ rad/s.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Представленные эксперименты ясно показывают, что данное переключение между наблюдателями является гладким и не вызывает отрицательных эффектов в переходных процессах. На рисунке 10 показаны переходные процессы для системы с замкнутым контуром с комбинированным наблюдателем. На последнем графике рисунка 2.7 показаны свойства робастности предложенного метода для случая, когда  $R$  и  $L$ : (А) уменьшены на 25% и (В) увеличены на 25%.

На рисунке 2.8 двигатель работает в генераторном режиме. Нагрузочный момент равен около  $-7$  Нм. Еще раз можно заметить, что бессенсорный регулятор работает с малой ошибкой оценки положения.



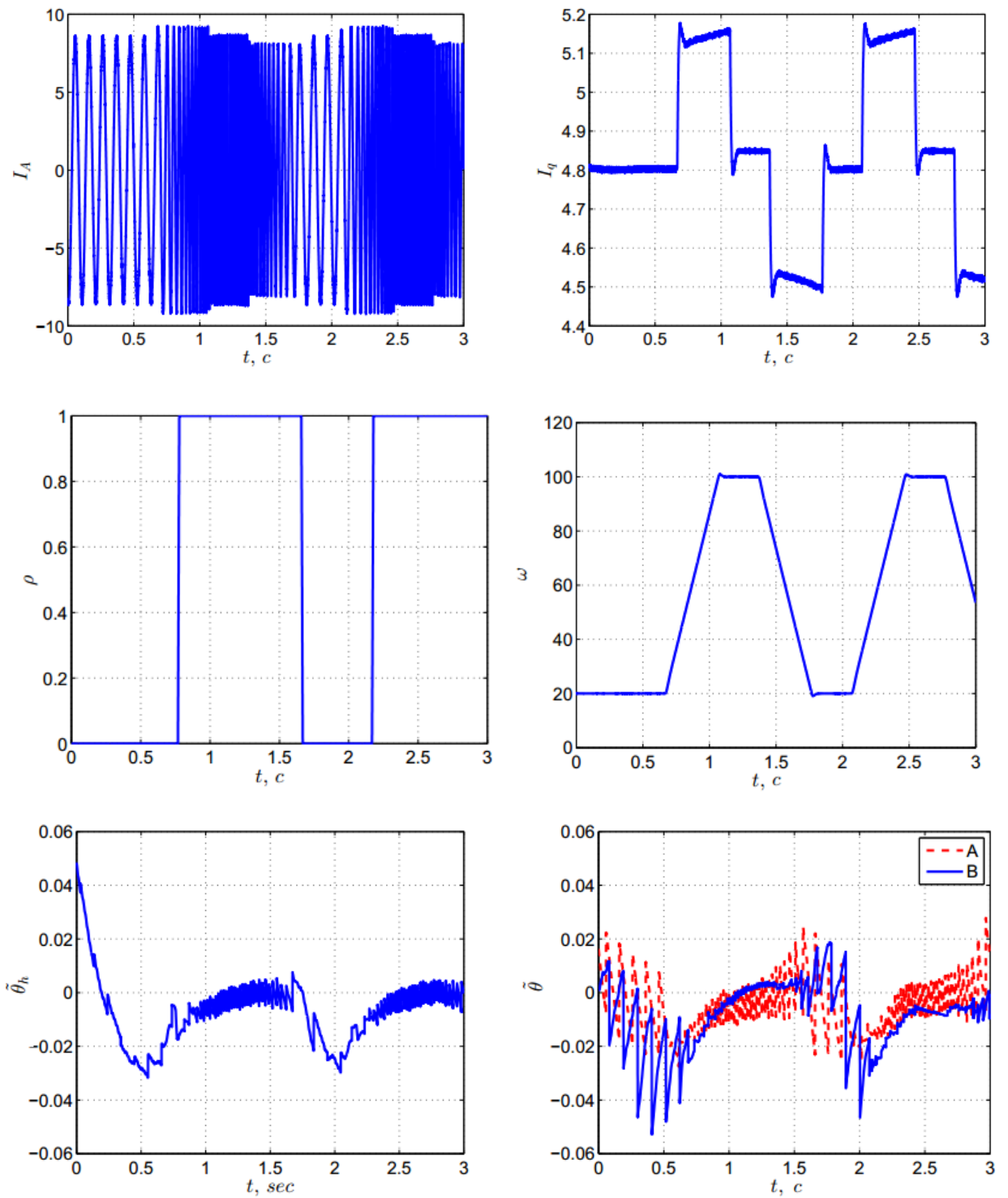


Рисунок 2.7 – Переходные процессы в бессенсорном регуляторе с комбинированным наблюдателем

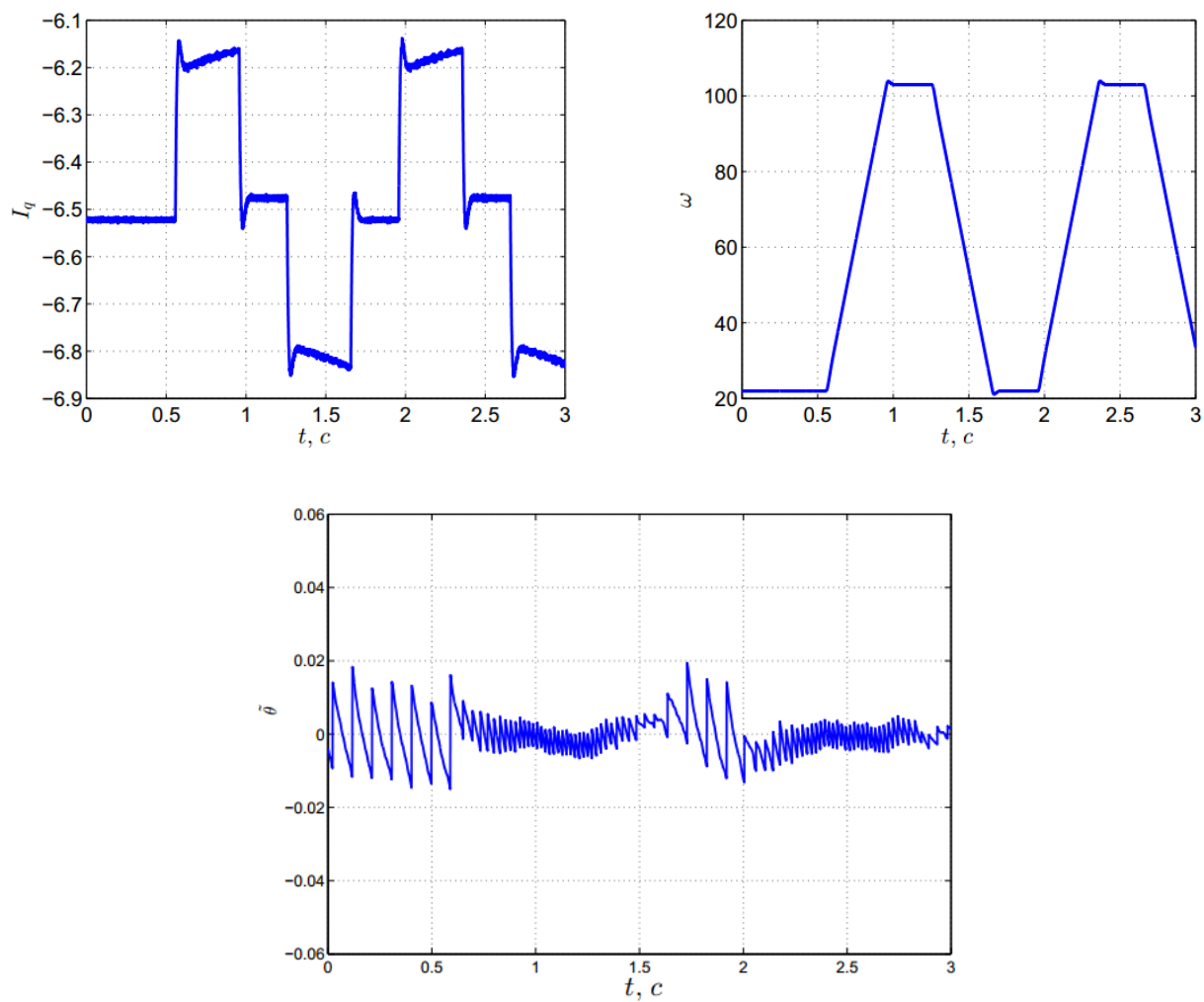


Рисунок 2.8 – Переходные процессы в бессенсорном регуляторе с комбинированным наблюдателем для генераторного режима

### 3 Разработка алгоритмов стабилизации за конечное время нелинейных динамических систем с запаздыванием

Динамические системы с запаздыванием являются объектом множества исследований, поскольку запаздывания появляются во многих областях науки и техники, как, например, в системной биологии, распределенных и сетевых системах [32], [33], [34], [35]. Такой интерес к изучению динамических систем с запаздыванием объясняется тем, что наличие запаздывания может привести к ухудшению работоспособности и даже к потере устойчивости системы. Несмотря на множество методов решения проблемы оценки робастности системы по отношению к величине запаздывания и синтезу алгоритмов стабилизации, в большинстве случаев речь идет о линейных системах с запаздыванием, что объясняется сложностью анализа устойчивости для нелинейного случая. Более того, конструктивные условия существуют только для линейных систем [36].

#### 3.1 Исследуемые системы

Рассмотрим нелинейную систему, приводимую к виду

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{d}(t, \mathbf{x}), \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{x} \in R^n$  – вектор состояния,  $u \in R$  – управляющее воздействие,  $\mathbf{d}(t, \mathbf{x})$  описывает

нелинейности, неопределенности системы и внешние возмущения,  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 \\ M & M & M & 0 & M \\ 0 & 0 & 0 & L & 1 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 \end{pmatrix}$

и  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Далее представлен метод синтеза алгоритмов стабилизации системы (3.1) за конечное время, которые при наличии запаздывания в канале управления обеспечивают сходимость траекторий системы в некоторую область, содержащую начало координат.

#### 2.2 Предварительные сведения

Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{x} \in R^n$  – вектор, содержащий полную информацию о состоянии системы,

$f \in R_+ \times R^n \rightarrow R^n$  - нелинейная непрерывная функция, либо разрывная по отношению к вектору состояния, для которой начало координат является положением равновесия.

### Финитная устойчивость

*Определение 3.1* Система (3.2) называется финитно устойчивой в начале координат, если:

- система финитно аттрактивна, то есть для функции установления  $T: R^n \setminus \{0\} \rightarrow R_+$  выполняется условие  $\lim_{t \rightarrow T(\mathbf{x}_0)} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = 0$  для всех  $\mathbf{x}_0 \in R^n \setminus \{0\}$ ;
- система является устойчивой по Ляпунову.

Функция установления зависит от начального положения системы и позволяет оценивать время, за которое система перейдет в начало координат.

*Теорема 3.1 [37]* Предположим, что существует положительно определенная функция  $V$  класса  $C^1$ , определенная на открытом множестве, включающем начало координат,  $D \subset R^n$ , и вещественные числа  $C > 0$  и  $\sigma > 0$  такие, что справедливо следующее неравенство для системы (2.1)

$$\dot{V} \leq -CV^\sigma(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in D \setminus \{0\}, \quad (3.3)$$

тогда в зависимости от значения  $\sigma$  точка начала координат является устойчивой с различными типами сходимости:

- если  $\sigma = 1$ , система экспоненциально устойчива;
- если  $0 \leq \sigma < 1$ , система финитно устойчива и

$$T(\mathbf{x}_0) \leq \frac{1}{C(1-\sigma)} V_0^{1-\sigma},$$

- если  $\sigma > 1$ , точка начала координат асимптотически устойчива, и для каждого  $\varepsilon$  множество  $B(0, \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in D : V(\mathbf{x}) < \varepsilon\}$  является сверхфинитно аттрактивным, где

$$T_{\max} = \frac{1}{C(\sigma-1)\varepsilon^{\sigma-1}}.$$

### Метод неявной функции Ляпунова

Следующая теорема представляет метод неявной функции Ляпунова [38] для анализа финитной устойчивости.

*Теорема 3.2 [38]* Пусть существует непрерывная функция Ляпунова, обозначенная в неявном виде  $Q(V, \mathbf{x}) : R^{n+1} \rightarrow R$ , такая, что:

- $Q(V, \mathbf{x})$  дифференцируема непрерывно для любого  $\forall \mathbf{x} \in R^n \setminus \{0\}$  и  $\forall V \in R_+$ ;
- для  $\forall \mathbf{x} \in R^n \setminus \{0\}$  существуют значения  $V^- \in R_+$  и  $V^+ \in R_+$ , такие, что

$$Q(V^-, \mathbf{x}) < 0 < Q(V^+, \mathbf{x});$$

$$- \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow 0 \\ (V, \mathbf{x}) \in \Omega}} V = 0^+, \quad \lim_{\substack{V \rightarrow 0^+ \\ (V, \mathbf{x}) \in \Omega}} \|\mathbf{x}\| = 0, \quad \lim_{\substack{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \\ (V, \mathbf{x}) \in \Omega}} V = +\infty, \quad \text{где } \Omega = \{(V, \mathbf{x}) \in R^{n+1} : Q(V, \mathbf{x}) = 0\};$$

$$- \text{ для любых } \forall \mathbf{x} \in R^n \setminus \{0\}, \forall V \in R_+ \text{ выполняется выражение } -\infty < \frac{\partial Q(V, \mathbf{x})}{\partial V} < 0;$$

$$- \text{ для } \forall (V, \mathbf{x}) \in \Omega \text{ и } 0 < \mu \leq 1, \eta > 0 \text{ выполняется } \frac{\partial Q(V, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \leq \eta V^{1-\mu} \frac{\partial Q(V, \mathbf{x})}{\partial V},$$

тогда система (3.2) финитно устойчива, а функция установления имеет следующую

$$\text{верхнюю границу } T(\mathbf{x}_0) \leq \frac{V_0^\mu}{\eta \mu}.$$

На основе данного результата в работе [39] для системы (3.1) был разработан закон финитной стабилизации.

Введем неявно определенную функцию Ляпунова в виде

$$Q(V, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{D}(V^{-1}) \mathbf{P} \mathbf{D}(V^{-1}) \mathbf{x} - 1, \quad (34)$$

где  $\mathbf{D}(\lambda)$  – диагональная матрица в виде  $\mathbf{D}(\lambda) = \text{diag}\{\lambda^{1+(n-i)\mu}\}_{i=1}^n$ ,  $\mu \in (0, 1]$ , и  $\mathbf{P} \in R^{n \times n}$  – симметрическая положительно определенная матрица. Обозначим диагональную матрицу  $\mathbf{H}_\mu = \text{diag}\{1 + (n-i)\mu\}_{i=1}^n$ .

*Теорема 3.3* [39], [40] Если

- система матричных неравенств

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{b}\mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{b}^T + \mathbf{L} + \mathbf{R} \leq 0, \\ \frac{1}{\alpha} \mathbf{L} \geq \mathbf{X}\mathbf{H}_\mu + \mathbf{H}_\mu \mathbf{X} > 0, \\ \mathbf{X} > 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

разрешима для некоторых  $\mathbf{R} \in R^{n \times n}$ ,  $\mathbf{R} > 0$ ,  $\mu \in (0, 1]$ ,  $\alpha \in R_+$ ,  $\mathbf{X} \in R^{n \times n}$  и  $\mathbf{y} \in R^{1 \times n}$ ;

- закон управления представлен в виде

$$u(V, \mathbf{x}) = V^{1-\mu} \mathbf{k} \mathbf{D}(V^{-1}) \mathbf{x}, \quad (3.6)$$

где  $\mathbf{k} = \mathbf{y} \mathbf{X}^{-1}$ ,  $V \in R_+ : Q(V, \mathbf{x}) = 0$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}$ ;

- функция внешних возмущающих воздействий удовлетворяет условию

$$\mathbf{d}^T(t, \mathbf{x}) \mathbf{D}(V^{-1}) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D}(V^{-1}) \mathbf{d}(t, \mathbf{x}) \leq \beta V^{-2\mu} \mathbf{x}^T \mathbf{D}(V^{-1}) \mathbf{P} \mathbf{L} \mathbf{P} \mathbf{D}(V^{-1}) \mathbf{x},$$

где  $\beta \in (0, 1)$  и  $(t, \mathbf{x}) \in R_+ \times R^n$ .

Тогда замкнутая система (3.1), (3.6) глобально финитно устойчива, а оценка функции

установления представлена в виде

$$T(\mathbf{x}_0) \leq \frac{V_0^\mu}{\alpha\mu(1-\beta)},$$

где  $V_0 \in \mathcal{R}_+ : Q(V_0, \mathbf{x}_0) = 0$ .

### Метод Ляпунова-Разумихина

Рассматриваются системы, модель динамики которых представлена в виде [41]:

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t} = f(\mathbf{x}_t), \quad t \geq 0, \quad (3.7)$$

где  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$  и  $\mathbf{x}_t \in C_{[-\tau, 0]}$  – вектор состояния,  $\mathbf{x}_t(s) = \mathbf{x}(t+s)$ ,  $-\tau \leq s \leq 0$ ;  $f : C_{[-\tau, 0]} \rightarrow \mathcal{R}^n$  – непрерывная функция, гарантирующая уникальность решений,  $f(0) = 0$ . Предполагается, что решения системы (3.7) удовлетворяют начальным условиям  $\mathbf{x}_0 \in C_{[-\tau, 0]}$ , для которых система имеет единственное решение.

*Теорема 2.4 (теорема Ляпунова–Разумихина, [42])* Пусть  $f \in C_{[-\tau, 0]} \rightarrow \mathcal{R}^n$  и существуют функции  $u, v, w : \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}_+$  такие, что  $u(s)$  и  $v(s)$  – непрерывные неубывающие функции и положительные для  $s > 0$  и  $u(0) = v(0) = 0$ ,  $v$  – непрерывная строго возрастающая функция. Решение (3.7) является равномерно устойчивым, если существует дифференцируемая положительно определенная функция  $V : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}_+$ , т.е.:

$$u(|\mathbf{x}|) \leq V(\mathbf{x}) \leq v(|\mathbf{x}|),$$

и такая, что производная  $V$  вдоль решения (3.1)  $\mathbf{x}(t)$  удовлетворяет выражению

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}_t) \leq -w(|\mathbf{x}(t)|), \quad \text{если } V(\mathbf{x}_t(\theta)) \leq V(\mathbf{x}(t)) \quad \forall \theta \in [-\tau, 0]. \quad (3.8)$$

Если в дополнение  $w(s) > 0$  для  $s > 0$ , и существует непрерывная неубывающая функция  $p(s) > s$  для  $s > 0$  такая, что условие (2.8) может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}_t) \leq -w(|\mathbf{x}(t)|), \quad \text{если } V(\mathbf{x}_t(\theta)) \leq p(V(\mathbf{x}(t))) \quad \forall \theta \in [-\tau, 0],$$

тогда решение (3.7) равномерно асимптотически устойчивое. Если  $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$ , тогда решение глобально равномерно асимптотически устойчивое.

### Взвешенная однородность

Для любых  $r_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  и  $\lambda > 0$  обозначим матрицу дилиации  $\Lambda_r(\lambda) = \text{diag}\{\lambda^{r_i}\}_{i=1}^n$  и вектор весов  $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_n]^T$ . Для  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$  обозначим норму однородности в виде:

$$|\mathbf{x}|_r = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^{\rho/r_i} \right)^{1/\rho}, \quad \rho \geq \max_{1 \leq i \leq n} r_i.$$

Заметим, что для всех  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  евклидова норма соотносится с однородной как

$$\underline{\sigma}_r(|\mathbf{x}|_r) \leq |\mathbf{x}| \leq \bar{\sigma}_r(|\mathbf{x}|_r)$$

для некоторых  $\underline{\sigma}_r, \bar{\sigma}_r \in K_\infty$ . Однородная норма обладает важным свойством  $|\Lambda_r(\lambda)\mathbf{x}|_r = \lambda|\mathbf{x}|_r$  для всех  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  [43]. Обозначим сферу  $S_r = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n : |\mathbf{x}|_r = 1\}$ .

Представим понятие обобщенной однородности для банахового пространства  $C_{[-\tau, 0]}$ .

Для любых  $r_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  и  $\Phi \in C_{[-\tau, 0]}$  однородная норма может быть обозначена как

$$\|\Phi\|_r = \left( \sum_{i=1}^n \|\phi_i\|^{r_i} \right)^{1/\rho}, \quad \rho \geq \max_{1 \leq i \leq n} r_i.$$

Также, согласно [41] существуют такие функции  $\underline{\rho}_r, \bar{\rho}_r \in K_\infty$ , что для всех  $\Phi \in C_{[-\tau, 0]}$

$$\underline{\rho}_r(\|\Phi\|_r) \leq \|\Phi\| \leq \bar{\rho}_r(\|\Phi\|_r). \quad (3.9)$$

Норма однородности в банаховом пространстве обладает тем же свойством  $\|\Lambda_r(\lambda)\Phi\|_r = \lambda\|\Phi\|_r$  для всех  $\Phi \in C_{[-\tau, 0]}$ . В  $C_{[-\tau, 0]}$  обозначим соответствующую сферу  $\mathfrak{S}_r = \{\Phi \in C_{[-\tau, 0]} : \|\Phi\|_r = 1\}$ . Обозначим шар с радиусом  $\rho > 0$  в  $C_{[-\tau, 0]}$  как  $B_\rho^r = \{\Phi \in C_{[-\tau, 0]} : \|\Phi\|_r \leq \rho\}$ .

*Определение 3.2* [44] Функция  $g : C_{[-\tau, 0]} \rightarrow \mathfrak{R}$  (векторное поле  $f : C_{[-\tau, 0]} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ ) обобщенно однородна, если для любого  $\Phi \in C_{[-\tau, 0]}$  выражение  $g(\Lambda_r(\lambda)\Phi) = \lambda^d g(\Phi)$  ( $f(\Lambda_r(\lambda)\Phi) = \lambda^d \Lambda_r(\lambda)f(\Phi)$ ) выполняется для некоторого  $d \in \mathfrak{R}$  ( $d \geq -\min_{1 \leq i \leq n} r_i$ ) и всех  $\lambda > 0$ . Константа  $d$  называется степенью однородности. Система (3.7) обобщенно однородна, если она удовлетворяет данному свойству.

Стоит отметить, что представленное понятие обобщенной однородности для банахового пространства  $C_{[-\tau, 0]}$  сводится к стандартному понятию в  $\mathfrak{R}^m$ , если  $\tau = 0$ .

*Теорема 3.5* [43] Пусть  $f : R^n \rightarrow R^n$  - непрерывное однородное векторное поле со степенью  $d$  ( $d < 0$ ). Если система (3.2) локально асимптотически устойчива, то она является глобально асимптотически устойчивой (глобально финитно устойчивой), и существует непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова  $V$ , которая является однородной со степенью  $\nu > -d$ .

Согласно определению однородности существуют такие константы  $c_1, c_2 > 0$  такие, что

$$c_1 \|\mathbf{x}\|_r^\nu \leq V(\mathbf{x}) \leq c_2 \|\mathbf{x}\|_r^\nu. \quad (3.10)$$

Например, система (3.1), (3.6) для  $\mathbf{d}(t, \mathbf{x}) = 0$  однородна со степенью  $-\mu$  с вектором весов  $\mathbf{r} = (1 + (n-1)\mu, 1 + (n-2)\mu, \mathbf{K}, 0)$ , а неявно определенная функция Ляпунова однородна со степенью 1, где параметры  $c_1$  и  $c_2$  могут быть оценены согласно следующим выражениям

$$c_1 = \min \left\{ \frac{\lambda_{\min}^{2r_{\max}}(\mathbf{P})}{n^{\frac{1}{\rho}}}, \frac{\lambda_{\min}^{2r_{\min}}(\mathbf{P})}{n^{\frac{1}{\rho}}} \right\}, \quad (3.11)$$

$$c_2 = \max \left\{ (n\lambda_{\max}(\mathbf{P}))^{\frac{1}{2r_{\max}}}, (n\lambda_{\max}(\mathbf{P}))^{\frac{1}{2r_{\min}}} \right\}.$$

В работах [41], [45], [46], [47] был рассмотрен вопрос робастности однородных систем по отношению к запаздыванию.

*Лемма 3.1 [41]* Пусть  $f(\mathbf{x}_t) = F[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)]$  в (2.7), а система (3.7) обобщенно однородна со степенью однородности  $d \geq 0$  и глобально асимптотически устойчива в начале координат для  $\tau = 0$ , тогда для любого  $\rho > 0$  существует  $0 < \tau_0 < +\infty$  такое, что система (3.7) асимптотически устойчива в начале координат в  $B_\rho^\tau$  для любого  $0 \leq \tau \leq \tau_0$ .

*Лемма 3.2 [47]* Пусть  $f(\mathbf{x}_t) = F[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)]$  в (3.7) является равномерно непрерывной, а система (3.7) обобщенно однородна со степенью однородности  $d < 0$  и глобально асимптотически устойчива в начале координат для  $\tau = 0$ , тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $0 < \tau_0 < +\infty$  такое, что система (3.7) глобально асимптотически устойчива по отношению к  $B_\rho^\tau$  для любого запаздывания  $0 \leq \tau \leq \tau_0$ .

### 3.3 Разработка алгоритма управления

Предложим подход, основанный на применении линейных матричных неравенств, для оценки области притяжения финитно стабилизируемой системы управления (3.1), (3.6) в случае наличия запаздывания в канале управления.

*Теорема 3.6* Пусть система линейных матричных неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{b}\mathbf{y} + \mathbf{y}^T\mathbf{b}^T + \mathbf{L} + \mathbf{R} \leq 0, \\ \iota\mathbf{X} \geq \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T \geq -\iota\mathbf{X}, \\ \mathbf{X}\mathbf{H}_\mu + \mathbf{H}_\mu\mathbf{X} \geq \eta\mathbf{X}, \\ \mathbf{X} > 0, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{y}^T \\ \mathbf{y} & \varsigma \end{pmatrix} \geq 0, \\ \mathbf{L} \geq \varpi\mathbf{X} \end{array} \right. \quad (3.12)$$



разрешима для  $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n-1} & 0 \\ 0 & r_m \end{pmatrix}$  и некоторых  $\mu \in (0,1]$ ,  $r_m, \eta, l, \zeta, \varpi \in R_+$ ,  $\mathbf{X} \in R^{n \times n}$ ,  $\mathbf{y} \in R^{1 \times n}$ . Тогда система (3.1), (3.6) с  $\mathbf{d}(t, \mathbf{x}) = 0$  глобально асимптотически устойчива по отношению к  $B_{c/c_1}^{2\tau}$  для любого  $c \in R_+$ , если

$$\tau < \frac{\sqrt{r_m \varpi} c^\mu}{\eta^{-1} \sqrt{l_1} (t + 2\sqrt{P_m \zeta}) + \sqrt{l_2} + |k_n| \sqrt{\zeta}}, \quad (3.13)$$

где  $\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{y} \mathbf{X}^{-1}$ ,  $l_1 = \lambda_{\max}(\mathbf{X}^{1/2} ((1-\mu)\mathbf{I} + \mathbf{H}_\mu) \mathbf{k}^T \mathbf{k} ((1-\mu)\mathbf{I} + \mathbf{H}_\mu) \mathbf{X}^{1/2})$ ,  $l_2 = \lambda_{\max}(\mathbf{X}^{1/2} \mathbf{A}^T \mathbf{k}^T \mathbf{k} \mathbf{A} \mathbf{X}^{1/2})$ .

Отметим, что в отсутствии запаздывания ( $\tau = 0$ ) система является финитно устойчивой.

#### Доказательство

Система (3.1), (3.6) при  $\mathbf{d}(t, \mathbf{x}(t)) = 0$  - однородна со степенью  $-\mu$  и согласно [47] все траектории системы (3.1) остаются ограниченными для  $0 \leq t \leq \tau$  и асимптотически сходятся в некоторое компактное множество, содержащее точку начала координат.

В соответствии с теоремой 3.3 можно получить выражение

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}(t)) \leq -C V^{1-\mu}(\mathbf{x}(t)), \quad C \in R_+,$$

если выполняется следующее неравенство

$$\mathbf{d}_\tau^T(t) \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{d}_\tau(t) \leq \beta V^{-2\mu}(t) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{P} \mathbf{L} \mathbf{P} \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{x}(t)$$

для некоторого  $\beta \in (0,1)$ . Переписывая данное неравенство с учетом выражения

$\mathbf{d}_\tau(t) = \mathbf{b} \int_{t-\tau}^t \mathcal{W}(s) ds$ , можно получить

$$\left( \int_{t-\tau}^t \mathcal{W}(s) ds \right)^2 \leq r_m \beta \varpi V(t)^{2-2\mu}. \quad (3.14)$$

Теперь рассмотрим производную неявно определенной функции Ляпунова (3.4) для системы (3.1), (3.6) при  $t \geq \tau$ . Обозначим  $V(t) = V(\mathbf{x}(t))$ . Обозначим  $\gamma = 1 + c$  для некоторого  $c > 0$  и согласно методу Ляпунова-Разумихина рассмотрим  $\mathcal{V}(t)$  для случая  $\gamma V(t) \geq V(t + \theta)$ ,  $\forall \theta \in [-2\tau, 0]$ . Согласно [39] можно получить

$$\begin{aligned} |\mathcal{V}(\mathbf{x}(t))| = & \left| \left( V^{-1}(t) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{D}(V^{-1}(t)) (\mathbf{H}_\mu \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{H}_\mu) \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{x}(t) \right)^{-1} \times \right. \\ & \left( V^{-\mu}(t) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{D}(V^{-1}(t)) (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{x}(t) + \right. \\ & \left. \left. 2V^{-1}(t) V^{1-\mu}(t-\tau) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{k} \mathbf{D}(V^{-1}(t-\tau)) \mathbf{x}(t-\tau) \right) \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \eta^{-1} \left| V^{1-\mu}(t) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{D}(V^{-1}(t)) (\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{x}(t) \right| + \\
& \eta^{-1} \left| 2\gamma^{1-\mu} V^{1-\mu}(t) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{k} \mathbf{D}(V^{-1}(t-\tau)) \mathbf{x}(t-\tau) \right| \leq \\
& \eta^{-1} V^{1-\mu}(t) \left( t + 2\gamma^{1-\mu} \left| \mathbf{x}^T(t) \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{P}^{1/2} \left| \mathbf{P}^{1/2} \mathbf{b} \mathbf{k} \mathbf{D}(V^{-1}(t-\tau)) \mathbf{x}(t-\tau) \right| \right) \right) = \\
& \eta^{-1} V^{1-\mu}(t) \left( t + 2\gamma^{1-\mu} \left| \mathbf{P}^{1/2} \mathbf{b} \mathbf{k} \mathbf{D}(V^{-1}(t-\tau)) \mathbf{x}(t-\tau) \right| \right) \leq \eta^{-1} V(t)^{1-\mu} \left( t + 2\gamma^{1-\mu} \sqrt{P_m \zeta} \right).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Для того, чтобы применить теорему 3.4, предположим, что  $\gamma V(t) \geq \max\{c, \sup_{\theta \in [-2\tau, 0]} V(t-\theta)\}$  для  $c \in \mathbb{R}_+$ . Тогда рассматривая  $\int_{t-\tau}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{x}(s) ds$  с  $V(t) \geq \frac{c}{\gamma}$  и принимая в расчет выражение (3.15), можно получить

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{t-\tau}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{x}(s) ds \right| = \left| \int_{t-\tau}^t V^{-\mu}(s) \mathbf{x}^T(s) (1-\mu) \mathbf{k} \mathbf{D}(V^{-1}(s)) \mathbf{x}(s) ds + \right. \\
& \left. \int_{t-\tau}^t V^{-\mu}(s) \mathbf{x}^T(s) \mathbf{k} \mathbf{H}_\mu \mathbf{D}(V^{-1}(s)) \mathbf{x}(s) ds + \int_{t-\tau}^t V^{1-\mu}(s) \mathbf{k} \mathbf{D}(V^{-1}(s)) \mathbf{x}^T(s) ds \right| = \\
& \left| \int_{t-\tau}^t V^{-\mu}(s) \mathbf{x}^T(s) \mathbf{k} ((1-\mu) \mathbf{I} + \mathbf{H}_\mu) \mathbf{D}(V^{-1}(s)) \mathbf{x}(s) ds + \right. \\
& \left. \int_{t-\tau}^t V^{1-2\mu}(s) \mathbf{k} \mathbf{A} \mathbf{D}(V^{-1}(s)) \mathbf{x}(s) ds + \right. \\
& \left. \int_{t-\tau}^t V^{-\mu}(s) V^{1-\mu}(s-\tau) \mathbf{k} \mathbf{b} \mathbf{k} \mathbf{D}(V^{-1}(s-\tau)) \mathbf{x}(s-\tau) ds \right| \leq \\
& \eta^{-1} \left( t + 2\gamma^{1-\mu} \sqrt{P_m \zeta} \right) \sqrt{l_1} \left| \int_{t-\tau}^t V^{1-2\mu}(s) ds \right| + \\
& \sqrt{l_2} \left| \int_{t-\tau}^t V^{1-2\mu}(s) ds \right| + \gamma^{1-\mu} |k_n| \sqrt{\zeta} \left| \int_{t-\tau}^t V^{1-2\mu}(s) ds \right| \leq \\
& c^{-\mu} \left( \eta^{-1} \sqrt{l_1} \left( t + 2\gamma^{1-\mu} \sqrt{P_m \zeta} \right) + \sqrt{l_2} + \gamma^{1-\mu} |k_n| \sqrt{\zeta} \right) \left| \int_{t-\tau}^t V^{1-\mu}(s) ds \right| \leq \\
& \tau c^{-\mu} \gamma^{1-\mu} \left( \eta^{-1} \sqrt{l_1} \left( t + 2\gamma^{1-\mu} \sqrt{P_m \zeta} \right) + \sqrt{l_2} + \gamma^{1-\mu} |k_n| \sqrt{\zeta} \right) V^{1-\mu}(t).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Подставляя (3.16) в (3.14) можно получить

$$\tau \leq \frac{\sqrt{r_m \beta \varpi} c^\mu}{\gamma^{1-\mu} \left( \eta^{-1} \sqrt{l_1} \left( t + 2\gamma^{1-\mu} \sqrt{P_m \zeta} \right) + \sqrt{l_2} + \gamma^{1-\mu} |k_n| \sqrt{\zeta} \right)}.$$

Так как  $c$  может быть выбрано сколь угодно малым и  $\beta$  может быть выбрано сколь угодно близко к 1, полученное неравенство может быть переписано как строгое неравенство (3.13). Таким образом, согласно теореме 3.4 замкнутая система асимптотически устойчива по отношению к множеству  $a_c = \{\mathbf{x} \in C_{[-2\tau, 0]} \mid V(\mathbf{x}(s)) \leq c, s \in [-2\tau, 0]\}$ . Наконец, так как  $\Omega_c \subset B_{c/l_1}^{2\tau}$ , лемма 3.3 доказана.

На основе леммы 3.3, зная максимальное значение запаздывания, можно найти

множество  $B_{c/c_1}^{2\tau}$ , в которое асимптотически сходятся траектории системы. И наоборот, зная величину параметра  $c$ , можно найти значение  $\tau_0$  такое, что для любого запаздывания  $\tau < \tau_0$ , система (2.1), (2.6) глобально асимптотически устойчива по отношению к  $B_{c/c_1}^{2\tau}$ .

Данный результат справедлив и для случая переменного запаздывания.

**Пример 3.1** Рассмотрим систему (3.1) при  $n=3$  и  $(\mathbf{d}(t, \mathbf{x}(t))=0)$ . Представим управление в виде (3.6) с параметрами  $\mu=0.5$ . Матрица  $\mathbf{P} > 0$  и вектор  $\mathbf{k}$  получены из решения системы неравенств (3.12) с  $r_m=0.99$ ,  $\eta=1.2$ :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1.0169 & 2.0324 & 1.0147 \\ 2.0324 & 5.0786 & 3.0433 \\ 1.0147 & 3.0433 & 3.0427 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{k} = (-1.0035 \quad -3.0089 \quad -3.0065).$$

Полученное значение максимального запаздывания для  $c=1$  -  $\tau_0 = 3.75 \times 10^{-2}$ . Оценка параметра  $c_1 = 0.2076$  получена из выражения (3.11). Таким образом, система (3.1), (3.6) является глобально асимптотически устойчивой по отношению к  $B_{4.8174}^{2\tau}$  при запаздывании в канале управления  $\tau < \tau_0 = 3.75 \times 10^{-2}$ .

*Теорема 3.7* Пусть система линейных матричных неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{b}\mathbf{y} + \mathbf{y}^T\mathbf{b}^T) + \mathbf{L}_1 + \mathbf{R}_1 \leq 0, \\ (1-\kappa)(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{b}\mathbf{y} + \mathbf{y}^T\mathbf{b}^T) + \mathbf{L}_2 + \mathbf{R}_2 \leq 0, \\ \iota\mathbf{X} \geq \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T \geq -\iota\mathbf{X}, \\ \mathbf{X}\mathbf{H}_\mu + \mathbf{H}_\mu\mathbf{X} \geq \eta\mathbf{X}, \\ \mathbf{X} > 0, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{y}^T \\ \mathbf{y} & \zeta \end{pmatrix} \geq 0, \\ \mathbf{L}_1 \geq \varpi_1\mathbf{X}, \\ \mathbf{L}_2 \geq \varpi_2\mathbf{X}, \\ \mathbf{R}_2 \leq \varpi_3\mathbf{X} \end{array} \right. \quad (3.16)$$

разрешима для  $\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n-1} & 0 \\ 0 & r_m \end{pmatrix}$  и некоторых  $\mu \in (0,1]$ ,  $\kappa \in (0,1)$ ,  $r_m, \eta, \iota, \zeta, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3 \in \mathbb{R}_+$ ,

$\mathbf{R}_2 > 0$ ,  $\mathbf{L}_1 > 0$ ,  $\mathbf{L}_2 > 0$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , и выполняется неравенство

$$\mathbf{d}^T(t, \mathbf{x}(t))\mathbf{D}(V^{-1}(t))\mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{D}(V^{-1}(t))\mathbf{d}(t, \mathbf{x}(t)) \leq \beta V^{-2\mu}(t)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{D}(V^{-1}(t))\mathbf{P}\mathbf{L}_2\mathbf{P}\mathbf{D}(V^{-1}(t))\mathbf{x}(t) \quad (3.17)$$

для  $\beta \in (0,1)$  и  $V > c$ . Тогда система (3.1), (3.6) глобально асимптотически устойчива по

отношению к  $B_{c/c_1}^{2\tau}$  для любого  $c \in R_+$ , если

$$\tau < \frac{\sqrt{r_m \varpi_1} c^\mu}{\eta^{-1} \sqrt{l_1} (\iota + 2\sqrt{P_m \zeta} + 2\sqrt{\varpi_2 \varpi_3}) + \sqrt{l_2} + |k_n| \sqrt{\zeta} + \sqrt{\zeta \varpi_2 \varpi_3}}, \quad (3.18)$$

где  $\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{yX}^{-1}$ ,  $l_1 = \lambda_{\max}(\mathbf{X}^{1/2}((1-\mu)\mathbf{I} + \mathbf{H}_\mu)\mathbf{k}^T \mathbf{k}((1-\mu)\mathbf{I} + \mathbf{H}_\mu)\mathbf{X}^{1/2})$ ,  
 $l_2 = \lambda_{\max}(\mathbf{X}^{1/2} \mathbf{A}^T \mathbf{k}^T \mathbf{k} \mathbf{A} \mathbf{X}^{1/2})$ .

*Доказательство*

Перепишем выражение (3.15) для случая  $\mathbf{d}(t, \mathbf{x}(t)) \neq 0$

$$\begin{aligned} |\mathcal{V}(\mathbf{x}(t))| &= \left| \left( V^{-1}(t) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{D}(V^{-1}(t)) (\mathbf{H}_\mu \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{H}_\mu) \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{x}(t) \right)^{-1} \times \right. \\ &\quad \left( V^{-\mu}(t) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{D}(V^{-1}(t)) (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{x}(t) + \right. \\ &\quad \left. \left. 2V^{-1}(t) V^{1-\mu}(t-\tau) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{k} \mathbf{D}(V^{-1}(t-\tau)) \mathbf{x}(t-\tau) \right) \right| + \\ &\quad 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{P} \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{d}(t, \mathbf{x}(t)) \leq \\ &\quad \eta^{-1} V(t)^{1-\mu} \left( \iota + 2\gamma^{1-\mu} \sqrt{P_m \zeta} + 2\sqrt{\varpi_2 \varpi_3 \beta} \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

и выражение (3.16)

$$\begin{aligned} \left| \int_{t-\tau}^t \mathcal{U}(s) ds \right| &= \left| \int_{t-\tau}^t V^{-\mu}(s) \mathcal{V}(s) \mathbf{k}((1-\mu)\mathbf{I} + \mathbf{H}_\mu) \mathbf{D}(V^{-1}(s)) \mathbf{x}(s) ds + \right. \\ &\quad \left. \int_{t-\tau}^t V^{1-2\mu}(s) \mathbf{k} \mathbf{A} \mathbf{D}(V^{-1}(s)) \mathbf{x}(s) + \right. \\ &\quad \left. \int_{t-\tau}^t V^{-\mu}(s) V^{1-\mu}(s-\tau) \mathbf{k} \mathbf{b} \mathbf{k} \mathbf{D}(V^{-1}(s-\tau)) \mathbf{x}(s-\tau) ds + \int_{t-\tau}^t V^{1-\mu}(s) \mathbf{k} \mathbf{D}(V^{-1}(s)) \mathbf{d}(s, \mathbf{x}(s)) ds \right| \leq \\ &\quad \tau c^{-\mu} \gamma^{1-\mu} \left( \eta^{-1} \sqrt{l_1} \left( \iota + 2\gamma^{1-\mu} \sqrt{P_m \zeta} + 2\sqrt{\varpi_2 \varpi_3 \beta} \right) + \sqrt{l_2} + \gamma^{1-\mu} |k_n| \sqrt{\zeta} + \sqrt{\zeta \varpi_2 \varpi_3 \beta} \right) V^{1-\mu}(t). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Согласно [40] можно получить следующее выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathbf{x}(t)) &= \begin{pmatrix} \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{d}_\tau(t) \end{pmatrix}^T \mathbf{W}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{d}_\tau(t) \end{pmatrix} + \\ &\quad \begin{pmatrix} \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{d}(t, \mathbf{x}(t)) \end{pmatrix}^T \mathbf{W}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{d}(t, \mathbf{x}(t)) \end{pmatrix} + \\ &\quad V^\mu(t) \mathbf{d}_\tau^T(t) \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{d}_\tau(t) - \\ &\quad V^{-\mu}(t) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{P} \mathbf{L}_1 \mathbf{P} \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{x}(t) + \\ &\quad V^\mu(t) \mathbf{d}^T(t, \mathbf{x}(t)) \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{d}(t, \mathbf{x}(t)) - \\ &\quad V^{-\mu}(t) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{P} \mathbf{L}_2 \mathbf{P} \mathbf{D}(V^{-1}(t)) \mathbf{x}(t), \end{aligned}$$

где матрицы

$$\mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} V^{-\mu}(t)\kappa(\mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}) + (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k})^T \mathbf{P}) + \mathbf{P}\mathbf{L}_1\mathbf{P} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & -V^\mu(t)\mathbf{R}_1^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} V^{-\mu}(t)(1-\kappa)(\mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}) + (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k})^T \mathbf{P}) + \mathbf{P}\mathbf{L}_2\mathbf{P} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & -V^\mu(t)\mathbf{R}_2^{-1} \end{pmatrix}$$

положительно определены.

Тогда, учитывая выражение (3.17) можно получить

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}(t)) \leq & V^\mu(t)\mathbf{d}_c^T(t)\mathbf{D}(V^{-1}(t))\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{D}(V^{-1}(t))\mathbf{d}_c(t) - \\ & V^{-\mu}(t)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{D}(V^{-1}(t))\mathbf{P}\mathbf{L}_1\mathbf{P}\mathbf{D}(V^{-1}(t))\mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Дальнейшее доказательство теоремы 3.7 схоже с доказательством теоремы 3.6.

**Пример 3.2** Рассмотрим систему (3.1) при  $n=3$  и  $d_1(t, \mathbf{x}(t))=0$ ,  $d_2(t, \mathbf{x}(t))=0$ ,  $d_3(t, \mathbf{x}(t))=0.2$ . Представим управление в виде (3.6) с параметрами  $\mu=1$ . Матрица  $\mathbf{P} > 0$

и вектор  $\mathbf{k}$  получены из решения системы неравенств (2.16) с  $\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n-1} & 0 \\ 0 & \bar{r}_m \end{pmatrix}$

$r_m = 0.7911$ ,  $\bar{r}_m = 0.199$ ,  $\kappa = 0.799$ ,  $\eta = 1$ :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1.0072 & 2.0159 & 1.0087 \\ 2.0159 & 5.0414 & 3.0274 \\ 1.0087 & 3.0274 & 3.026 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{k} = (-0.9988 \quad -2.9976 \quad -2.9987).$$

Можно легко проверить, что неравенство (3.17) выполняется. Оценка параметра  $c_1 = 0.2475$  получена из выражения (3.11). Тогда, согласно теореме 3.7, значение максимального запаздывания для  $c=5$  -  $\tau_0 = 0.131$ . Таким образом, система (3.1), (3.6) является глобально асимптотически устойчивой по отношению к  $B_{20.1985}^{2\tau}$  при запаздывании в канале управления  $\tau < \tau_0 = 0.131$ .

## 4 Разработка процедуры динамического расширения регрессора для задач адаптации и идентификации динамических объектов

### 4.1 Адаптивное управление по выходу инвертируемыми многоканальными системами

В данном разделе исследуется задача регулирования по выходу многоканальных систем с гармоническими внешними входными воздействиями и параметрическими неопределенностями. Рассматривается проблема робастной устойчивости с использованием свойства «робастной» минимальной фазовости. Предлагаемый регулятор, построенный на базе классического метода внутренней модели совместно с контуром адаптивной настройки, обеспечивает асимптотическую сходимость выходных переменных к положениям равновесия. В качестве прикладного примера предлагаемого подхода приведена система управления надводным судном.

Рассмотрим задачу робастного регулирования по выходу объекта, заданного выражениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Pw \\ e &= C_e x + Q_e w \\ y &= Cx + Qw\end{aligned}\quad (4.1)$$

где  $e$  – регулируемая ошибка и  $y$  – дополнительная измеряемая переменная, используемая для стабилизации.

Внешнее входное воздействие  $w$  определяется линейной экзосистемой

$$\dot{w} = S(\rho)w$$

где  $\rho$  – вектор с неизвестными параметрами.

Задача робастного регулирования по выходу заключается в нахождении регулятора, независимого от параметров вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y + L_c e \\ u &= C_c x_c + D_c y + M_c e\end{aligned}$$

обеспечивающего устойчивую замкнутую систему, в которой регулируемая переменная асимптотически сходится к нулю при времени, стремящемся к бесконечности, при любых начальных условиях.

Система

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad e = C_e x, \quad y = Cx \quad (4.2)$$

робастно минимально фазовая, если существует динамическая система (постоянная)

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A_s \xi + B_s y_0 \\ u_0 &= C_s \xi + D_s y_0\end{aligned}\quad (4.3)$$

такая, что взаимосвязь обратной связи (4.3) и

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= A_0 x_0 + B_0 u_0 \\ y_0 &= C_0 x_0\end{aligned}$$

устойчивая для любых значений неопределенного параметра  $\mu$ .

Легко заметить, что в специальных координатах

$$\begin{aligned}\dot{z} &= (A_{00} + B_{02} F_2) z + \bar{B}_{01} u_0 \\ y_0 &= H_0 z\end{aligned}\quad (4.4)$$

устойчива для любых значений неопределенного параметра  $\mu$ .

Допустим, выполняются допущения 1 и 2, приведенные в статье [48],  $T_2 B U_2$  положительно определенная (для любого значения неопределенного параметра  $\mu$ ). Предположим, что система (4.2) робастно минимально фазовая. Тогда система (4.2) может быть робастно стабилизирована с помощью регулятора вида

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A_s \xi + B_s y \\ u &= U_1 (C_s \xi + D_s y) + U_2 (-k_2 T_2 x),\end{aligned}\quad (4.5)$$

где  $A_s, B_s, C_s, D_s$  такие, что система (4.3) стабилизирует систему (4.4) и  $k_2 > 0$  достаточно велико.

Поскольку объект (4.2) робастно минимально фазовый, таковым является и расширенная система:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{\eta} &= F\eta + G(\Gamma_\rho \eta + T_2 x) \\ \bar{e} &= \Gamma_\rho \eta + T_2 x \\ y &= Cx,\end{aligned}\quad (4.6)$$

при гурвицевости матрицы  $F$ .

Допустим, выполняются допущения 1 и 2, приведенные в статье [48],  $T_2 B U_2$  положительно определенная (для любого значения неопределенного параметра  $\mu$ ). Предположим, что система (4.2) робастно минимально фазовая. Рассмотрим расширенную систему (4.6) с гурвицевой матрицей  $F$  (поскольку это всегда возможно). Тогда такая система может быть робастно стабилизирована с помощью регулятора вида

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A_s \xi + B_s y \\ u &= U_1 (C_s \xi + D_s y) + U_2 (-k_2 (\Gamma_\rho \eta + T_2 x)),\end{aligned}\quad (4.7)$$

где  $A_s, B_s, C_s, D_s$  такие, что система (4.3) стабилизирует систему (4.4) и  $k_2 > 0$  достаточно велико.

Заметим, что все переменные, используемые в стабилизаторе, а именно  $y, e, \eta$ , доступны для измерения. Если вектор  $\rho$  неизвестен, тогда внутренняя модель, не может быть использована в явном виде. Заменяем матрицу  $\Gamma_\rho$  ее оценкой

$$\hat{\Gamma} = \text{diag}(\hat{\Gamma}_0, \hat{\Gamma}_0, \dots, \hat{\Gamma}_0).$$

Задача заключается в том, чтобы показать как динамика  $\hat{\Gamma}_0$  может быть

зафиксирована таким образом, чтобы объект (3.1) управлялся регуляторов вида

$$\begin{aligned} u &= U_1(C_s \xi + D_s y) + U_2(-k_2(\hat{\Gamma}\eta + e)) \\ \dot{\xi} &= A_s \xi + B_s y \\ \dot{\eta} &= F\eta + G(\hat{\Gamma}\eta + e), \end{aligned} \quad (4.8)$$

обеспечивая асимптотическую сходимость  $e(t)$  к нулю.

После соответствующей замены координат перепишем:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{e} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{00} + B_{02}F_2 & \bar{A}_{02} \\ A_{20} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ e \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \bar{B}_{01} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_0 \\ P_2 \end{pmatrix} w \\ y &= H_0 z + \bar{H}_2 e + P_y w, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где  $B_{22}$  положительно определенная матрица.

Зададим ошибку оценки как

$$\tilde{\Gamma} = \hat{\Gamma} - \Gamma_\rho.$$

Комбинируя (3.9) и (3.8) получим полноценную модель управляемой системы:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{e} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{00} + B_{02}F_2 + \bar{B}_{01}D_s H_0 & \bar{B}_{01}C_s & 0 & \bar{A}_{02} + \bar{B}_{01}D_s \bar{H}_2 \\ B_s H_0 & A_s & 0 & B_s \bar{H}_2 \\ 0 & 0 & F + G\Gamma_\rho & G \\ A_{20} + B_{21}D_s H_0 & B_{21}C_s & -k_2 B_{22}\Gamma_\rho & \bar{A}_{22} + B_{21}D_s \bar{H}_2 - k_2 B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \xi \\ \eta \\ e \end{pmatrix} - \\ &\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -G \\ k_2 B_{22} \end{pmatrix} \tilde{\Gamma}\eta + \begin{pmatrix} P_0 \\ P_2 \\ 0 \\ P_y \end{pmatrix} w. \end{aligned}$$

Запишем систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(\tilde{\Gamma}\eta) \\ e &= Cx, \end{aligned}$$

где  $x = (\tilde{z} \quad \tilde{\xi} \quad \tilde{\eta} \quad e)^T$  и

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} A_{00} + B_{02}F_2 + \bar{B}_{01}D_s H_0 & \bar{B}_{01}C_s & 0 & \bar{A}_{02} + \bar{B}_{01}D_s \bar{H}_2 \\ B_s H_0 & A_s & 0 & B_s \bar{H}_2 \\ 0 & 0 & F + G\Gamma_\rho & G \\ A_{20} + B_{21}D_s H_0 & B_{21}C_s & -k_2 B_{22}\Gamma_\rho & \bar{A}_{22} + B_{21}D_s \bar{H}_2 - k_2 B_{22} \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ G \\ -k_2 B_{22} \end{pmatrix}, C^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Существует такая положительно определенная симметрическая матрица  $P$  и число  $k_2^*$  такие, что если  $k > k_2^*$ , то



$$\begin{aligned} PA + A^T P &< 0 \\ PB &= (-k_2)C^T \end{aligned} \quad (4.11)$$

В работе [48] приведено доказательство этого утверждения и численный пример с использованием модели надводного судна. Результаты подтверждают эффективность предлагаемого подхода.

#### 4.2 Робототехническая следящая система с быстрой адаптацией к неизвестной траектории движения

В работах [49], [50] решена задача слежения за мультигармоническим сигналом с неизвестными параметрами на базе робототехнической системы. Основной особенностью разработанного алгоритма является быстрая оценка частот сигнала с помощью метода динамического расширения регрессора (ДРР), который позволяет улучшить качество переходных процессов одновременного оценивания нескольких частот. Разработанный алгоритм компенсации позволяет решать задачу в условиях наличия временных запаздываний. В работе представлены результаты экспериментальных исследований и сравнительного анализа робототехнической следящей системы на базе метода ДРР и на базе классического градиентного метода. Целью исследования является повышение качества оценивания частот с помощью метода динамического расширения регрессора (ДРР) и демонстрация его практической ценности в задаче слежения за мультигармоническим сигналом с помощью робототехнической системы в условиях наличия временных запаздываний, которые могут быть вызваны вычислительными и коммуникационными ограничениями. Работа представляет собой продолжение предыдущих исследований с улучшенными показателями качества.

Рассмотрим фильтр для сигнала  $\hat{g}(t)$ :

$$\xi(t) = \frac{\lambda^{2l+1}}{(p+\lambda)^{2l+1}} \hat{g}(t), \quad (4.12)$$

где  $\hat{g}(t)$  – оценка задающего сигнала,  $(p + \lambda)^{2l+1}$  – гурвицев полином.

Далее построим линейную регрессионную модель:

$$\xi^{(2l+1)}(t) = v^T(t)\vartheta + \varepsilon(t), \quad (4.13)$$

где  $\varepsilon(t)$  – экспоненциально затухающая функция,  $v^T(t) = [\xi^{(2l-1)}(t) \dots \xi^{(3)}(t) \xi^{(1)}(t)]$  – регрессор, составленный из производных выхода фильтра,  $\vartheta^T = [\bar{\theta}_1 \dots \bar{\theta}_{l-1} \bar{\theta}_l]$  – вектор с оцениваемыми элементами, удовлетворяющими системе:

$$\begin{cases} \bar{\theta}_1 &= \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_l, \\ \bar{\theta}_2 &= -\theta_1\theta_2 - \theta_1\theta_3 - \dots - \theta_{l-1}\theta_l, \\ \vdots & \\ \bar{\theta}_l &= (-1)^{l+1}\theta_1\theta_2 \dots \theta_l, \end{cases} \quad (4.14)$$

где  $\theta_i = -\omega_i^2$ .

Устройство оценки частоты на основе градиентного метода имеет вид:

$$\hat{\vartheta}(t) = K_\vartheta v(t)(\xi(t) - v^T \hat{\vartheta}(t)), \quad (4.15)$$

где  $K_\vartheta \in \mathbb{R}^{l \times l}$ ,  $K_\vartheta > 0$ . Он обеспечивает экспоненциальную сходимость ошибки оценивания  $\tilde{\vartheta}(t) = \hat{\vartheta}(t) - \vartheta$  к нулю.

Следуя процедуре ДРР, рассмотрим линейную регрессионную модель (4.13) и выберем  $l - 1$  линейных  $\mathcal{L}_\infty$ -устойчивых операторов запаздывания:

$$[H_i(\cdot)](t) := (\cdot)(t - d_i), \quad (4.16)$$

где  $i = \{1, 2, \dots, l - 1\}$ ,  $d_i > 0$  - различные запаздывания. Определим  $l - 1$  отфильтрованных сигнала:

$$v_{f_i}(t) = v(t - d_i), \quad \xi_{f_i}(t) = \xi(t - d_i). \quad (4.17)$$

Запишем вместе (4.17) и сигналы  $v(t)$ ,  $\xi(t)$  следующим образом:

$$Y_e(t) := \begin{bmatrix} v^T(t) \\ v_{f_1}^T(t) \\ \vdots \\ v_{f_{l-1}}^T(t) \end{bmatrix}, \quad \Xi_e(t) := \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \xi_{f_1}(t) \\ \vdots \\ \xi_{f_{l-1}}(t) \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

где  $Y_e(t) \in \mathbb{R}^{l \times l}$ ,  $\Xi_e(t) \in \mathbb{R}^{l \times 1}$ .

Определим:

$$\psi_\phi(t) := \det\{Y_e(t)\}, \quad \Xi(t) := \text{adj}\{Y_e(t)\}\Xi_e(t). \quad (4.19)$$

Таким образом, имеем набор  $l$  уравнений вида:

$$\Xi_i(t) = \psi_\phi \vartheta_i, \quad (4.20)$$

где  $i = \{1, 2, \dots, l\}$ .

Устройство оценки частоты, основано на градиентном методе, (4.15) заменим на:

$$\hat{\vartheta}_i(t) = \gamma_i \psi_\phi(t) (\Xi_i(t) - \psi_\phi(t) \hat{\vartheta}(t)), \quad (4.21)$$

где  $\gamma_i > 0$ .

Рассматривается многозвенная робототехническая система (см. рисунок 4.1) с цифровой камерой, закрепленной на последнем звене. Целью экспериментов является осуществление слежения камерой за объектом отображаемом на LCD панели перед роботом и осуществляющем движение по мультигармоническим законам, заданным вдоль горизонтальной и вертикальной осей.

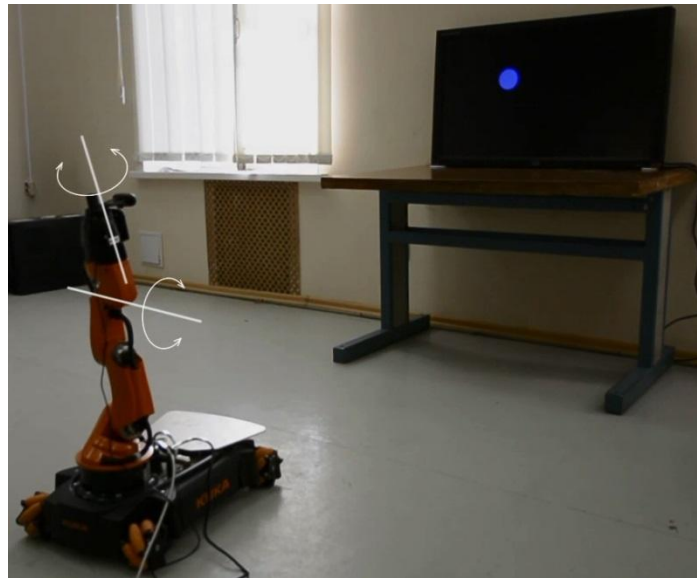


Рисунок 4.1 - Многозвенная робототехническая система

При проведении экспериментов было искусственно задано входное запаздывание системы управления равным  $h = 0,5$  с для демонстрации ее реализуемости в условиях ограничений вычислительных и коммуникационных процессов.

В первом эксперименте объект слежения движется по закону, представляющему собой сумму двух гармоник вдоль горизонтальной оси. Задающие сигналы для обеих подсистем имеют вид:

$$g_y(t) \approx 18 \sin(0,63t), \quad (4.22)$$

$$g_x(t) \approx 11 \sin(0,63t) + 14 \sin(t), \quad (4.23)$$

Как показали эксперименты, переходные процессы оценивания с использованием метода ДРР более быстрые и гладкие в сравнении с классическим градиентным методом, что позволило ускорить быстродействие системы в целом.

Во втором эксперименте на сотой секунде значения частот задающего сигнала были переключены на новые значения. Задающие сигналы для обеих подсистем имеют вид:

$$g_y(t) \approx \begin{cases} 18 \sin(t), & \text{если } t < 100, \\ 18 \sin(0,63t), & \text{если } t \geq 100, \end{cases} \quad (4.24)$$

$$g_x(t) \approx \begin{cases} 14 \sin(t) + 11 \sin(0,63t), & \text{если } t < 100, \\ 14 \sin(0,70t) + 11 \sin(1,16t), & \text{если } t \geq 100. \end{cases} \quad (4.25)$$

Настоящий эксперимент был поставлен для демонстрации способности следящей системы адаптироваться к изменениям частот с перенастройкой регулятора, а также для того, чтобы показать, насколько быстро этот процесс осуществляется. Как и в предыдущем эксперименте, система управления на базе ДРР по скорости сходимости превосходит систему с классическим градиентным методом. Таким образом, предлагаемый подход позволяет ускорить процесс переключения между меняющимися частотами.

В третьем эксперименте объект слежения движется по закону, представляющему

собой сумму трех гармоник вдоль горизонтальной оси. Задающие сигналы для обеих подсистем имеют вид:

$$g_y(t) \approx 18 \sin(t), \quad (4.26)$$

$$g_x(t) \approx 12 \sin(1,16t) + 8 \sin(0,90t) + 7 \sin(0,63t). \quad (4.27)$$

Настоящий эксперимент наглядно демонстрирует несомненное преимущество метода ДРР при оценке нескольких (в данном случае трех) частот. Практическая эффективность градиентного метода существенно падает при увеличении количества оцениваемых параметров. Результаты (рисунок 4.2) показывают, что оценивание трех частот с его помощью за выделенное время невозможно, в то время как метод ДРР справляется с задачей, обеспечивая достаточно высокое быстродействие и гладкость переходного процесса.

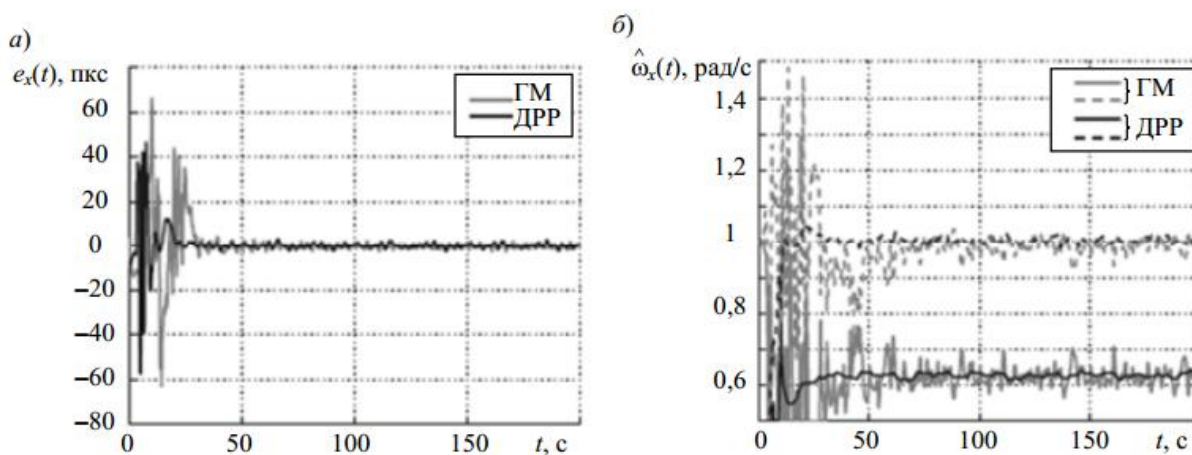


Рисунок 4.2 – Результаты первого эксперимента: а) графики сигналов ошибок, б) графики сигналов оценок

Таким образом, целью настоящего исследования является практическое применение устройства оценки на базе метода ДРР в задаче слежения за мультигармоническим сигналом и экспериментальное сравнение его с классическим градиентным методом оценивания. Были проведены эксперименты с использованием многосвязной робототехнической системы. Полученные результаты подтвердили практические преимущества использования метода ДРР в случае оценки нескольких частот в сравнении с классическим градиентным методом.

### 4.3 Быстрое оценивание параметров генератора хаотического сигнала

Основной задачей данной работы является выделение полезной информации из хаотического сигнала и оценка параметров системы. В данной работе наблюдатель использует только выходной сигнал хаотической системы при условии полной параметрической неопределенности модели. Важно достичь такого времени переходного

процесса, чтобы данную систему можно было использовать на практике.

Определим хаотическую систему Дуффинга в следующем виде:

$$\ddot{y}(t) + c_1\dot{y}(t) + c_2y(t) - \bar{\theta}f(t) - \delta(t) = 0, \quad (4.28)$$

где  $y$  является выходом системы,  $c_1$ ,  $c_2$  и  $\bar{\theta}$  являются неизвестными параметрами,  $\delta(t) = A \sin(\omega t + \phi)$  является неизмеряемым гармоническим сигналом,  $f(y) = y^3$ .

Основная задача состоит в разработке наблюдателя, обеспечивающего передачу параметра  $\bar{\theta}$  и оценки неизвестных параметров  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\omega$  в модели (4.28). Предположим, что выходные переменные  $y(t)$  и  $f(t)$  являются измеряемыми. Также предположим, что параметры хаотической системы  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $A$ ,  $\omega$  и  $\phi$  являются неизвестными.

Перепишем (4.28) в следующем виде:

$$p^2y(t) + c_0(p)y(t) - \bar{\theta}f(t) = \delta(t), \quad (4.29)$$

где  $c_0(p) = c_1p + c_2$  и  $p = d/dt$ .

Выполняя дополнительные дифференцирования и преобразование Лапласа для (3.29), получим:

$$s^4Y(s) = a_1(s)Y(s) + a_2(s)F(s) + D(s), \quad (4.30)$$

где  $s$  является оператором Лапласа;  $Y(s) = L\{y(t)\}$ ,  $F(s) = L\{f(y(t))\}$  являются изображениями Лапласа для  $y(t)$  и  $f(y(t))$  соответственно, полином  $D(s)$  обозначает сумму все компонент, содержащих начальные значения.

Преобразуем модель (3.30) к следующему виду:

$$\frac{p^4\lambda^4}{(p+\lambda)^4}y(t) = \frac{a_1(p)\lambda^4}{(p+\lambda)^4}y(t) + \frac{a_2(p)\lambda^4}{(p+\lambda)^4}f(t) + \varepsilon_y(t), \quad (4.31)$$

где  $\varepsilon_y(t) = L^{-1}\left\{\frac{D(s)\lambda^4}{(s+\lambda)^4}\right\}$  является экспоненциально затухающей функцией времени, вызванной начальными условиями. Параметризуем модель (4.31), пренебрегая затухающей компонентой  $\varepsilon_y(t)$ :

$$\xi_1^{(4)}(t) = a_1(p)\xi_1(t) + a_2(p)\xi_2(t); \quad \xi_1(t) = \frac{\lambda^4}{(p+\lambda)^4}y(t); \quad \xi_2(t) = \frac{\lambda^4}{(p+\lambda)^4}f(t) \quad (4.32)$$

Перепишем (4.32) в следующем виде:

$$z(t) = \gamma_1\psi_1(t) + \gamma_2\psi_2(t) + \gamma_3\psi_3(t) + \gamma_4\psi_4(t) + \gamma_5\psi_5(t) + \gamma_6\psi_6(t), \quad (4.33)$$

где  $z(t) = \xi_1^{(4)}(t)$ ,  $\psi_1(t) = \xi_1^{(3)}(t)$ ,  $\psi_2(t) = \xi_1^{(2)}(t)$ ,  $\psi_3(t) = \xi_1^{(1)}(t)$ ,  $\psi_4(t) = \xi_1(t)$ ,  $\psi_5(t) = \xi_2^{(2)}(t)$ ,  $\psi_6(t) = \xi_2(t)$ .

Уравнение (4.33) является регрессионной моделью, зависящей от измеряемых функций и неизвестных постоянных параметров. Отметим, что  $\gamma_5$  является требуемым параметром  $\bar{\theta}$ . Используя регрессионную модель (4.33), построим алгоритм идентификации в следующем виде:

$$\hat{z} = \hat{\gamma}_1\psi_1 + \hat{\gamma}_2\psi_2 + \hat{\gamma}_3\psi_3 + \hat{\gamma}_4\psi_4 + \hat{\gamma}_5\psi_5 + \hat{\gamma}_6\psi_6, \quad (4.34)$$

где  $k_i > 0, i = \overline{1,6}$ .

Для быстрого оценивания параметров генератора хаотического сигнала будем использовать процедуру динамического расширения регрессора (ДРР). Первым шагом процедуры ДРР для системы (4.34) будет введение пяти линейных,  $\mathcal{L}_\infty$ -устойчивых операторов  $H_i: \mathcal{L}_\infty \rightarrow \mathcal{L}_\infty, i \in \{1,2, \dots, 5\}$ . Применим данные операторы к регрессионной модели для получения фильтрованной регрессии:

$$z_{f_i} = m_{f_i}^T \gamma. \quad (4.35)$$

Дополняя исходную форму регрессора пятью фильтрованными регрессорами, построим расширенный регрессор системы:

$$Z_e(t) = M_e(t)\gamma, \quad (4.36)$$

где определим  $Z_e: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^6$  и  $M_e: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{6 \times 6}$  как:

$$\begin{aligned} Z_e &= \text{col}(z, z_{f_1}, \dots, z_{f_5}), \\ M_e^T &= [m \ m_{f_1} \ \dots \ m_{f_5}]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Умножая (4.36) на присоединенную матрицу для  $M_e$ , мы получим 6 скалярных регрессоров вида:

$$Z_i(t) = \phi(t)\gamma_i \quad (4.38)$$

с  $i = \overline{1,6}$ , где обозначим определитель  $M_e$  как

$$\phi(t) = \det\{M_e(t)\} \quad (4.39)$$

и вектор  $Z: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^6$

$$Z(t) = \text{adj}\{M_e(t)\}Z_e(t). \quad (4.40)$$

Оценки параметров  $\gamma_i$  могут быть получены из скалярной регрессионной формы через:

$$\hat{\gamma}_i = k_i \phi(Z_i - \phi \hat{\gamma}_i), \quad (4.41)$$

с настроечным коэффициентом  $k_i > 0$ .

Для моделирования адаптивной оценки параметра  $\bar{\theta}$  используем следующую модель хаотической системы Дуффинга (3.28):  $c_1 = 0, c_2 = 0,5, \bar{\theta} = -1, \delta(t) = \sin(0,1t)$ . В данном случае имеем:  $\gamma_1 = -c_1 = 0; \gamma_2 = \theta - c_2 = -0,51; \gamma_3 = \theta c_1 = 0; \gamma_4 = \theta c_2 = -0,005; \gamma_5 = \bar{\theta} = -1$  и  $\gamma_6 = -\theta \bar{\theta} = -0,01$ . Поведение такой хаотической системы представлено в виде фазового портрета на рисунке 4.3.

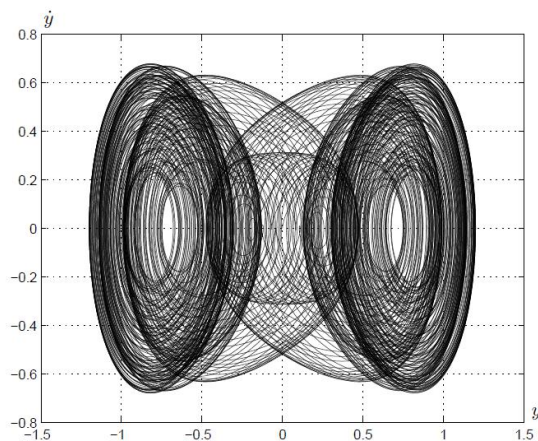


Рисунок 4.3 – Фазовый портрет хаотической системы

Предлагаемый подход будем сравнивать с обычным градиентным методом настройки параметров:

$$\begin{aligned}
 \hat{\gamma}_1(t) &= 20\psi_1(t) \left( \xi_1^{(4)} - \hat{z}(t) \right), \quad \hat{\gamma}_2(t) = 10\psi_2(t) \left( \xi_1^{(4)} - \hat{z}(t) \right), \\
 \hat{\gamma}_3(t) &= 10\psi_3(t) \left( \xi_1^{(4)} - \hat{z}(t) \right), \quad \hat{\gamma}_4(t) = 10\psi_4(t) \left( \xi_1^{(4)} - \hat{z}(t) \right), \\
 \hat{\gamma}_5(t) &= 13\psi_5(t) \left( \xi_1^{(4)} - \hat{z}(t) \right), \quad \hat{\gamma}_6(t) = 10\psi_6(t) \left( \xi_1^{(4)} - \hat{z}(t) \right).
 \end{aligned}
 \tag{4.42}$$

По результатам компьютерного моделирования градиентного метода при  $\lambda = 10$  с оценкой параметров  $\hat{\gamma}_i$ , время переходного процесса оценки параметра равняется 1000 секунд (см. рисунок 4.4).

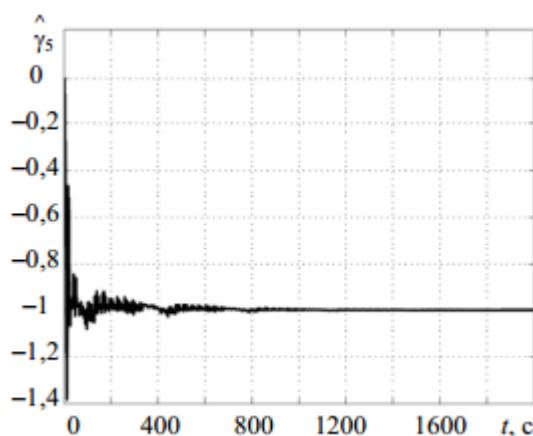


Рисунок 4.4 – Результат работы градиентного метода

Для моделирования предлагаемого быстрого метода оценки был выбран оператор запаздывания  $[H_i(\cdot)(t) = (\cdot)(t - d_i),]$  и коэффициент  $k = 2$ . Время переходного процесса оценки параметра системы равняется 4,5 секундам (см. рисунки 4.5, 4.6), что значительно меньше показателей градиентного метода. Также было устранено перерегулирование при оценке параметра  $\bar{\theta}$ . Все оценки сошлись к истинным значениям. Преимущества предлагаемого быстрого метода оценки позволяют использовать его на практике в составе различных систем управления для оценки параметров хаотической системы Дуффинга.

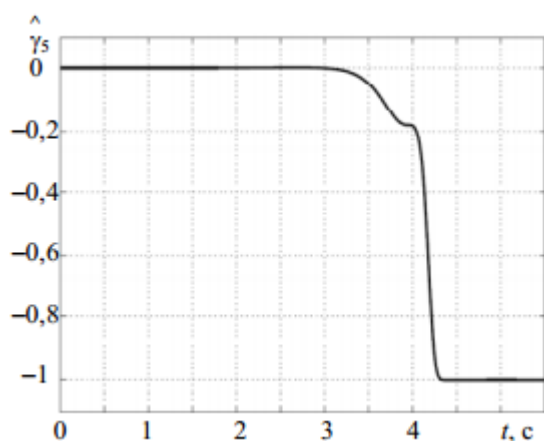


Рисунок 4.5 – Результат работы предложенного метода

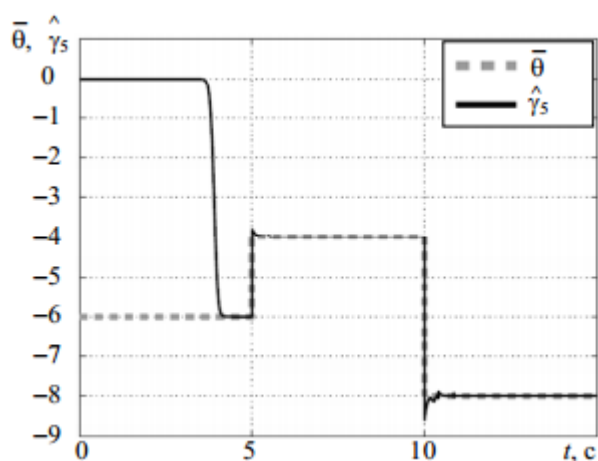


Рисунок 4.6 – Результаты моделирования с переключающимся сигналом

#### 4.4 Устройство оценки частоты гармонического сигнала

В статье [53] решается задача синтеза устройства оценивания параметров синусоидального сигнала. Предложена параметризация, позволяющая получить линейную регрессионную модель, вектор неизвестных параметров которой связан с параметрами исходного сигнала. Для оценивания параметров используется градиентный метод. Сформулированы условия, при выполнении которых обеспечивается экспоненциальная сходимость к нулю ошибок оценивания.

Рассматривается измеряемый сигнал

$$y(t) = \mu A(t) \sin(\omega t + \delta), \quad (4.43)$$

где  $\mu$ ,  $\omega$ ,  $\delta$  — неизвестные постоянные параметры,  $A(t)$  — функция времени.

Сигнал (4.43) можно рассматривать, как синусоидальный сигнал с частотой  $\omega$ , фазой  $\delta$  и нестационарной амплитудой  $\mu A(t)$ .

**Допущение.** Известна верхняя  $\bar{\omega}$  и нижняя  $\underline{\omega}$  границы частоты  $\omega$ , причем  $\underline{\omega} > 0$



Требуется синтезировать устройство оценки, обеспечивающее для любых  $\mu > 0$ ,  $\omega > 0$ ,  $\delta$  выполнение условий:

$$|\omega - \hat{\omega}(t)| \leq C_{11} e^{-a_{11} t}, \quad (4.44)$$

$$|\mu - \hat{\mu}(t)| \leq C_{12} e^{-a_{12} t}, \quad (4.45)$$

где  $\hat{\omega}(t)$  — текущая оценка коэффициента при частоте  $\omega$ ;  $\hat{\mu}(t)$  — текущая оценка коэффициента при амплитуде  $\mu$ ;  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  — некоторые положительные константы.

Произведем параметризацию и получим линейную регрессионную модель, оценив параметры которой сможем найти оценки для  $\mu$  и  $\omega$ .

$$A_1^2(t)y^2(t) + A^2(t)y_1^2(t) = 2\beta_1 A(t)A_1(t)y(t)y_1(t) + \mu^2(1 - \beta_1^2)A^2(t)A_1^2(t). \quad (4.46)$$

Выражение (4.46) есть искомая линейная регрессионная модель вида

$$\psi(t) = \Theta^T \Phi(t), \quad (4.47)$$

где  $\psi(t)$  — выход модели,  $\Theta$  — вектор неизвестных параметров,  $\Phi(t)$  — регрессор, равные:

$$\psi(t) = A_1^2(t)y^2(t) + A^2(t)y_1^2(t), \quad (4.48)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \mu^2(1 - \beta_1^2) \end{bmatrix}, \quad (4.49)$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2A(t)A_1(t)y(t)y_1(t) \\ A^2(t)A_1^2(t) \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

Следующим шагом является нахождение  $\hat{\omega}(t)$  и  $\hat{\mu}(t)$  на основе оценок параметров модели (4.47)–(4.50).

Из (3.49) найдем выражения для расчета оценок  $\hat{\mu}(t)$  и  $\hat{\omega}(t)$  на основе  $\hat{\theta}_1(t)$ ,  $\hat{\theta}_2(t)$ :

$$\hat{\omega}(t) = \frac{1}{\tau} \arccos \hat{\theta}_1(t), \quad (4.51)$$

$$\hat{\mu}(t) = \sqrt{\hat{\theta}_2(t) / (1 - \hat{\theta}_1^2(t))}. \quad (4.52)$$

Для однозначного определения  $\hat{\omega}(t)$  на основе  $\hat{\theta}_1(t)$  необходимо выполнение условия

$$\omega\tau < \pi. \quad (4.53)$$

Для этого следует выбирать запаздывание  $\tau$  согласно следующему неравенству

$$\tau < \frac{\pi}{\omega}. \quad (4.54)$$

#### **4.5 Алгоритм аппроксимации траектории движения промышленных роботов**

В данной главе предложен новый алгоритм планирования маршрутов движения для промышленных роботов. Алгоритм основан на аппроксимации заданного маршрута с помощью дуг. Такое решение позволяет сократить количество опорных точек, уменьшить размер кода и вычислительные затраты, увеличить качество выполняемых операций, а также упростить процесс программирования сложных движений. Настоящее исследование представляет собой расширение предыдущей работы на случай планирования пространственных движений в трехмерном пространстве. Проведены экспериментальные исследования с использованием шестизвенного манипулятора с вращательными сочленениями. Соответствующие результаты представлены в статье [54].

Для простоты начнем с описания алгоритма планирования плоских движений, заданных с помощью растровых изображений, который был предложен ранее. Целью является автоматическая генерация кода для реализации движения рабочего инструмента робота вдоль конуртов, заданных с помощью растрового изображения.

Первым шагом необходимо извлечь координаты последовательности исходных точек, представленных на изображении. Эта задача может быть решена с помощью алгоритма трасировки окрестности Мура. В результате получается последовательность координат точек, которые формируют заданный маршрут. Будем называть это множество последовательностью исходных точек.

Заметим, что уже сейчас найденная последовательность точек может быть запрограммирована с использованием базового линейного движения от точки к точке без какой-либо обработки, но такой подход имеет ряд недостатков. Контроллер робота может быть перегружен значительным объемом задаваемых данных. Поскольку робот пересчитывает конфигурацию в каждой опорной точке, его скорость движения при этом будет снижена. Эти недостатки могут быть устранены с помощью дуговой аппроксимации для планирования плоских движений. Этот подход основан на возможности стандартного программного обеспечения робота выполнять движение рабочего органа вдоль дуги, заданной тремя точками. Это элементарное движение, обеспечиваемое стандартным ПО, представляет собой более естественное движение для робота с вращательными сочленениями, чем множество линейных движений от точки к точке. В результате, робот пересчитывает свою конфигурацию только три раза в опорных точках, определяющих дугу. Такое решение позволяет сократить размер кода и увеличить скорость движения.

Необходимо обработать все исходные точки и аппроксимировать маршрут, который они образуют, с помощью нескольких дуг, в свою очередь опеределемых тремя опорными

точками

$$p_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad p_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Все промежуточные точки между  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  должны принадлежать соответствующей дуге в пределах  $\delta_{\text{arc}}$ -окрестности.

Рассмотрим две линии, попарно соединяющие эти точки,  $p_1 - p_2$  and  $p_2 - p_3$ , соответственно. Для того, чтобы найти координаты центра дуги  $c = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix}$ , рассмотрим три случая.

При  $x_2 = x_3$  и  $x_1 \neq x_2$ , тогда координаты центра дуги могут быть вычислены как

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{y_2 + y_3}{2}, \\ x_c &= -k_1 \frac{y_c - (y_1 + y_2)}{2} + \frac{x_1 + x_2}{2}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

где  $k_1$  – коэффициент наклона прямой  $(x_1; y_1) - (x_2; y_2)$  определяемый как

$$k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (4.57)$$

При  $x_1 = x_2$  и  $x_2 \neq x_3$ , тогда координаты центра дуги могут быть вычислены как

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{y_1 + y_2}{2}, \\ x_c &= -k_2 \frac{y_c - (y_2 + y_3)}{2} + \frac{x_2 + x_3}{2}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

где  $k_2$  – коэффициент наклона прямой  $(x_2; y_2) - (x_3; y_3)$  определяемый как

$$k_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}. \quad (4.59)$$

Если все  $x$ -координаты различны, тогда координаты центра дуги могут быть вычислены как

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{k_1 k_2 (y_1 - y_3) + k_2 (x_1 + x_2) - k_1 (x_2 + x_3)}{2(k_2 - k_1)}, \\ y_c &= -\frac{x_c - \frac{x_1 + x_2}{2}}{k_1} + \frac{y_1 + y_2}{2}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  определяются с помощью (4.57) и (4.59), соответственно.

После того, как получены координаты центра дуги, необходимо проверить все промежуточные точки между  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  на принадлежность рассматриваемой дуге.

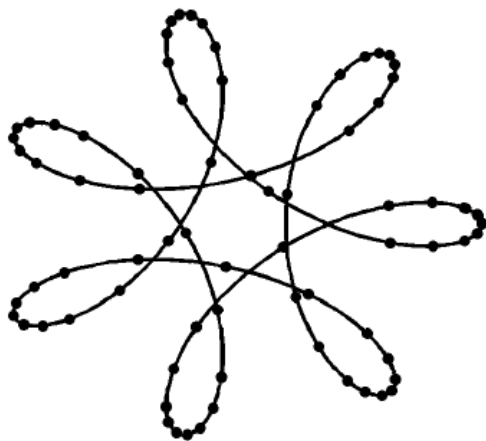
Рассчитаем расстояние от четвертой точки  $p_4 = \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix}$  к дуге, формируемой точками  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  следующим образом

$$d_{\text{arc}} = \left| \sqrt{(x_c - x_4)^2 + (y_c - y_4)^2} - r \right|, \quad (4.61)$$

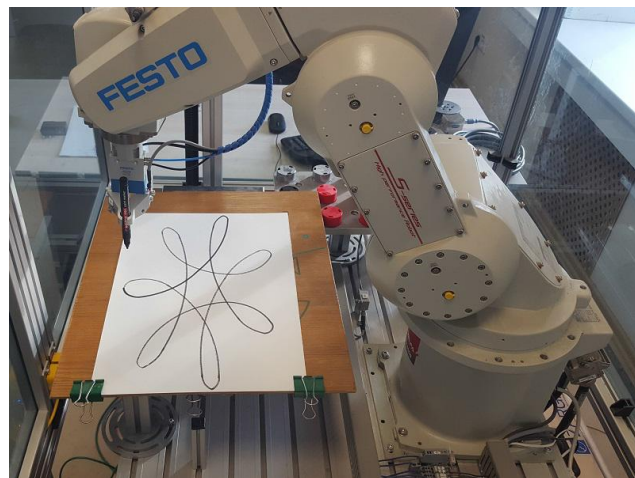
где  $r = \sqrt{(x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2}$  – радиус дуги.

В результате получается набор из дуг, каждая из которых определяется тремя последовательными точками. Координаты полученного множества точек могут быть

использованы совместно с оператором MVR P1 P2 P3, позволяющим выполнять движение вдоль дуги, заданной тремя опорными точками. Результаты экспериментальных исследований по планированию плоских движений приведены на рисунках 4.7 и 4.8.



(a)



(б)

Рисунок 4.7 - Выполнение плоских движений при рисовании гипотрохоиды



(a)



(б)

Рисунок 4.8 - Выполнение плоских движений при рисовании портрета

Описанный выше алгоритм позволяет аппроксимировать маршруты плоских движений с помощью последовательности из дуг. Однако, такие движения ограничены плоскостью. Для того, чтобы устранить это ограничения, следующей задачей является расширение алгоритма на случай пространственных движений, которые востребованы во множестве промышленных задач (например, сварка, гравировка, полировка).

Таким образом, второй задачей является автоматическая генерация кода для выполнения пространственных движений, заданных с помощью последовательности точек с декартовыми координатами и аппроксимированных с помощью дуг. Исходный набор

опорных точек при этом может быть получен из 3D модели обрабатываемой детали.

В сравнении с предыдущей задачей, очевидно, что, поскольку рассматривается трехмерное пространство, точки могут иметь различные  $z$ -координаты. Таким образом, различие с решением предыдущей задачи заключается в том, что необходимо проверять не только на принадлежность промежуточных точек дуге в пределах  $\delta_{\text{arc}}$ -окрестности, но и на их принадлежность плоскости в пределах  $\delta_{\text{plane}}$ -окрестности.

Рассмотрим три точки, которые не принадлежат одной прямой. Координаты векторов, заданных в декартовом пространстве, определены как

$$p_1^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ y_1^0 \\ z_1^0 \end{bmatrix}, \quad p_2^0 = \begin{bmatrix} x_2^0 \\ y_2^0 \\ z_2^0 \end{bmatrix}, \quad p_3^0 = \begin{bmatrix} x_3^0 \\ y_3^0 \\ z_3^0 \end{bmatrix}. \quad (4.62)$$

Известно, что существует единственная окружность (или дуга), проходящая через три точки, которые не принадлежат одной прямой.

Сначала необходимо вычислить координаты центра дуги, заданной этими тремя точками. Рассмотрим две системы координат. Первую  $x_0y_0z_0o_0$  примем за абсолютную систему, вторую  $x_1y_1z_1o_1$  примем как систему, связанную с тремя точками, формирующими плоскость  $x_1y_1o_1$ .

Получим нормаль к плоскости  $x_1y_1o_1$  с помощью векторного произведения

$$n = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = (p_2^0 - p_1^0) \times (p_3^0 - p_1^0). \quad (4.63)$$

Вычислим единичный вектор

$$z = \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \\ z_z \end{bmatrix} = \frac{n}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}}. \quad (4.64)$$

Вычислим преобразование с помощью матриц вращения

$$R_1^0 = R_{z,\alpha} R_{y,\beta}, \quad (4.65)$$

где углы  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть вычислены следующим образом

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \left( \frac{z_y}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}}, \frac{z_x}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}} \right), \\ \beta &= 2 \left( \sqrt{z_x^2 + z_y^2}, z_z \right). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Таким образом, подставим углы  $\alpha$  и  $\beta$  в базовые матрицы вращений вокруг осей  $z$  и  $y$ , получим

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}. \quad (4.67)$$

Рассчитаем координаты опорных точек относительно локальной системы координат с использованием матрицы вращения

$$p_1^1 = R_0^1 p_1^0, \quad p_2^1 = R_0^1 p_2^0, \quad p_3^1 = R_0^1 p_3^0, \quad (4.68)$$

где  $R_0^1 = [R_1^0]^T$ .

Обозначим координаты трех точек как

$$p_1^1 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ y_1^1 \\ z_1^1 \end{bmatrix}, \quad p_2^1 = \begin{bmatrix} x_2^1 \\ y_2^1 \\ z_2^1 \end{bmatrix}, \quad p_3^1 = \begin{bmatrix} x_3^1 \\ y_3^1 \\ z_3^1 \end{bmatrix}. \quad (4.69)$$

Для того, чтобы найти координаты центра дуги  $c^1 = \begin{bmatrix} x_c^1 \\ y_c^1 \\ z_c^1 \end{bmatrix}$  рассмотрим три случая.

При  $x_2^1 = x_3^1$  и  $x_1^1 \neq x_2^1$ , тогда координаты центра дуги могут быть вычислены как

$$\begin{aligned} y_c^1 &= \frac{y_2^1 + y_3^1}{2}, \\ x_c^1 &= -k_1 \frac{y_c^1 - (y_1^1 + y_2^1)}{2} + \frac{x_1^1 + x_2^1}{2}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

где  $k_1$  – коэффициент наклона прямой  $(x_1^1; y_1^1) - (x_2^1; y_2^1)$ , определяемый как

$$k_1 = \frac{y_2^1 - y_1^1}{x_2^1 - x_1^1}. \quad (4.71)$$

При  $x_1^1 = x_2^1$  и  $x_2^1 \neq x_3^1$ , тогда координаты центра дуги могут быть вычислены как

$$\begin{aligned} y_c^1 &= \frac{y_1^1 + y_2^1}{2}, \\ x_c^1 &= -k_2 \frac{y_c^1 - (y_2^1 + y_3^1)}{2} + \frac{x_2^1 + x_3^1}{2}, \end{aligned} \quad (4.72)$$

где  $k_2$  – коэффициент наклона прямой  $(x_2^1; y_2^1) - (x_3^1; y_3^1)$ , определяемый как

$$k_2 = \frac{y_3^1 - y_2^1}{x_3^1 - x_2^1}. \quad (4.73)$$

Если все x-координаты различны, тогда координаты центра дуги могут быть вычислены как

$$\begin{aligned} x_c^1 &= \frac{k_1 k_2 (y_1^1 - y_3^1) + k_2 (x_1^1 + x_2^1) - k_1 (x_2^1 + x_3^1)}{2(k_2 - k_1)}, \\ y_c^1 &= -\frac{x_c^1 - \frac{x_1^1 + x_2^1}{2}}{k_1} + \frac{y_1^1 + y_2^1}{2}, \end{aligned} \quad (4.74)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  определяются с помощью (4.71) и (4.73).

Третья z-координата может быть получена тривиально как

$$z_c^1 = z_1^1 = z_2^1 = z_3^1. \quad (4.75)$$

Выразим координаты центра дуги относительно базовой системы координат

$$c^0 = \begin{bmatrix} x_c^0 \\ y_c^0 \\ z_c^0 \end{bmatrix} = R_1^0 c^1. \quad (4.76)$$

Затем необходимо вычислить расстояния  $d_{\text{plane}}$  и  $d_{\text{arc}}$  от каждой точки между опорными  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  к плоскости и к дуге, формируемыми этими точками.

Уравнение плоскости имеет вид:

$$n_x x + n_y y + n_z z + n_0 = 0, \quad (4.77)$$

где  $n_0 = -(n_x x_3^0 + n_y y_3^0 + n_z z_3^0)$ .

Расстояния от четвертой точки  $p_4 = \begin{bmatrix} x_4^0 \\ y_4^0 \\ z_4^0 \end{bmatrix}$  соответственно к плоскости  $d_{\text{plane}}$  и к дуге

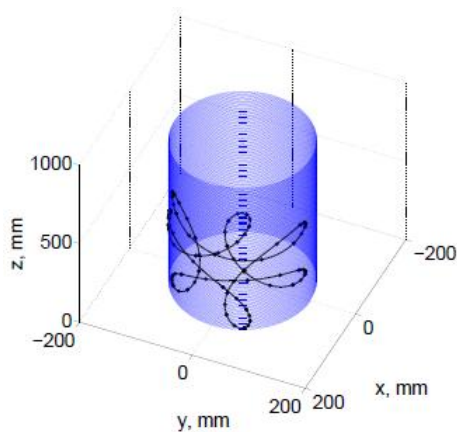
$d_{\text{arc}}$ , формируемыми точками  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$ , могут быть вычислены как

$$d_{\text{plane}} = \frac{|n_x x_4^0 + n_y y_4^0 + n_z z_4^0 + n_0|}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}}, \quad (4.78)$$

$$d_{\text{arc}} = \left| \sqrt{(x_c^0 - x_4^0)^2 + (y_c^0 - y_4^0)^2 + (z_c^0 - z_4^0)^2} - r \right|,$$

где  $r = \sqrt{(x_1^0 - x_c^0)^2 + (y_1^0 - y_c^0)^2 + (z_1^0 - z_c^0)^2}$  – радиус дуги.

Далее все точки должны быть обработаны и проверены на их принадлежность плоскости и дуге в пределах заданных  $\delta_{\text{plane}}$ - и  $\delta_{\text{arc}}$ -окрестностей, соответственно. В результате этой процедуры должна быть получена последовательность наборов из трех точек, каждый из которых определяет соответствующую дугу. Пространственное движение, заданное последовательностью дуг, может быть выполнено с использованием оператора MVR P1 P2 P3, позволяющего реализовывать движение вдоль дуги, заданной тремя опорными точками. Результаты экспериментальных исследований по планированию пространственных движений приведены на рисунках 4.9 и 4.10.

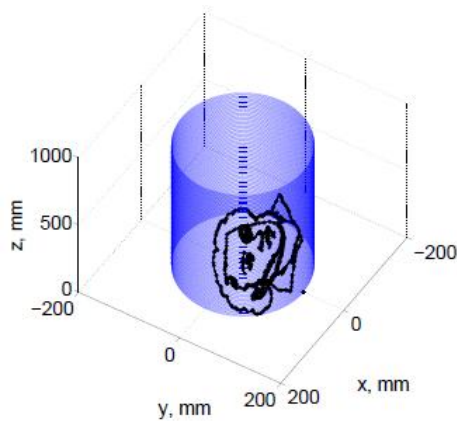


(a)



(б)

Рисунок 4.9 - Выполнение пространственных движений при рисовании гипотрохоиды



(a)



(б)

Рисунок 4.10 - Выполнение пространственных движений при рисовании портрета

#### 4.6 Управление по выходу робастной минимально-фазовой многоканальной нелинейной системой

Рассматривается задача робастного управления по выходу многоканальной нелинейной системой, представленной в виде следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(w, x) + g(w, x)u, \\ e &= h_e(w, x), \\ y &= h(w, x), \end{aligned} \quad (4.79)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}^m$  – управление,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  – возмущение вида  $\dot{w} = s(w)$  с  $w$ , находящимся в компактном инвариантном множестве  $W$ ,  $e \in \mathbb{R}^p$  – управляемая переменная, для которой необходимо найти управление,  $y \in \mathbb{R}^q$  – дополнительно измеряемая величина, предполагается, доступную для построения обратной связи вместе с  $e$ . Задача управления по выходу состоит в построении регулятора обеспечивающего такую замкнутую систему, у которой траектории будут ограничены и  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

Управление может быть построено, если объект управления связан с внутренней моделью в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= F\eta + G\left[\frac{1}{k}\gamma(k\eta) + e\right] \\ \bar{e} &= \frac{1}{k}\gamma(k\eta) + e \end{aligned} \quad (4.80)$$

в котором  $\eta = \text{col}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)$ ,  $F = \text{diag}(F_0, F_0, \dots, F_0)$ ,  $G = \text{diag}(G_0, G_0, \dots, G_0)$ ,  $\gamma(k\eta) = \text{col}(\gamma_1(k\eta_1), \gamma_2(k\eta_2), \dots, \gamma_p(k\eta_p))$ , с  $F_0$  гурвицевой матрицей и  $(F_0, G_0)$  управляемой, управление  $v_1$  выбирается в виде:

$$v_1 = -k\bar{e}. \quad (4.81)$$



Выражения  $\gamma_i(\cdot)$  определяются следующим фундаментальным результатом. Выбраны  $d \geq 2n_w + 2$ . Тогда, учитывая любую непрерывную функцию  $\psi_0: W \rightarrow \mathbb{R}$ , существует вещественное число  $\ell > 0$  и подмножество  $S \subset \mathbb{C}$  нулевой меры Лебега, такой, что если собственные значения  $F_0$  в  $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re}[\lambda] \leq -\ell\} \setminus S$ , то существует дифференцируемая функция  $\sigma_0: W \rightarrow \mathbb{R}^d$  и непрерывная ограниченная функция  $\gamma_0: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_0}{\partial w} s(w) &= F_0 \sigma_0(w) + G_0 \psi_0(w) \\ \psi_0(w) &= \gamma_0(\sigma_0(w)) \end{aligned} \quad (4.82)$$

для всех  $w \in W$ .

Функции  $\gamma_1(\cdot), \dots, \gamma_p(\cdot)$ , являются такими функциями, что для  $i = 1, \dots, p$ , тождества

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_i(w)}{\partial w} s(w) &= F_0 \sigma_i(w) - G_0 \psi_i(w) \\ -\psi_i(w) &= \gamma_i(\sigma_i(w)) \end{aligned} \quad (4.83)$$

выполняются для некоторых  $\sigma_i(w)$ , где  $\psi_i(w)$  это  $i$ -й элемент набора  $\psi(w)$ . Функции, определенные как

$$\bar{\sigma}_i(w) = \frac{1}{k} \sigma_i(w), \quad \bar{\gamma}_i(\eta_i) = \frac{1}{k} \gamma_i(k\eta_i), \quad \bar{\psi}_i(w) = \frac{1}{k} \psi_i(w)$$

удовлетворяют

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_i(w)}{\partial w} s(w) &= F_0 \bar{\sigma}_i(w) - G_0 \bar{\psi}_i(w) \\ -\bar{\psi}_i(w) &= \bar{\gamma}_i(\bar{\sigma}_i(w)). \end{aligned}$$

Настройка

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(\eta) &= \text{col}(\bar{\gamma}_1(\eta_1), \bar{\gamma}_2(\eta_2), \dots, \bar{\gamma}_p(\eta_p)) \\ \bar{\sigma}(w) &= \text{col}(\bar{\sigma}_1(w), \bar{\sigma}_2(w), \dots, \bar{\sigma}_p(w)) \\ \bar{\psi}(w) &= \text{col}(\bar{\psi}_1(w), \bar{\psi}_2(w), \dots, \bar{\psi}_p(w)) \end{aligned}$$

представлена как:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}(w)}{\partial w} s(w) &= F \bar{\sigma}(w) - G \bar{\psi}(w) \\ -\bar{\psi}(w) &= \bar{\gamma}(\bar{\sigma}(w)). \end{aligned} \quad (4.84)$$

## **5 Разработка алгоритмов адаптивного управления фотоэлектрическими и электрическими объектами с применением процедуры динамического расширения и метода синтеза наблюдателей переменных состояния, построенного на базе идентификационного подхода**

### **5.1 Определение параметров солнечного элемента итеративным методом**

Использование Солнца в качестве альтернативного источника энергии - актуальное направление исследований в области современной теории и практики автоматического управления. Одной из основных задач является моделирование и определение параметров эквивалентной схемы солнечного элемента (СЭ), которое играет важную роль при контроле качества в процессе производства и наблюдения характеристик работы устройств, а также позволяет улучшить качество работы солнечных батарей [57]. В настоящее время существует три основных метода определения параметров солнечных элементов: аналитический метод, итеративный метод и метод эволюционных вычислений [59]. В данной работе исследуется итеративный метод. Целью работы является определение неизвестных параметров солнечного элемента с использованием итеративного метода Ньютона-Рафсона.

Техническое описание фотоэлектрических модулей и элементов обычно дает самую важную информацию при стандартном тестировании. Эта информация получается в режимах холостого хода, короткого замыкания и максимальной выходной мощности. Напряжение холостого хода представляет собой верхний предел напряжения, который важен для определения уровня напряжения общей энергосистемы. Ток короткого замыкания указывает на верхний предел, который определяет уровень тока системы. Точка максимальной мощности показывает уровень мощности системы. Следовательно, имитационная модель должна содержать все три вышеуказанных параметра.

Фотоэлектрические модели, описанные в литературе, могут быть разделены на два основных вида: модель двойного диода (МДД) и модель одного диода (МОД). Модель двойного диода показывает более высокую точность, чем модель одного диода. Однако МДД не используется широко в связи со сложной параметризацией и высокой вычислительной нагрузкой. Таким образом, МОД обычно применяется для отображения фотоэлектрического выхода, идентификация параметров которого широко исследована.

Эквивалентная схема модели одного диода солнечных элементов показана на рисунке 4.1 [60].

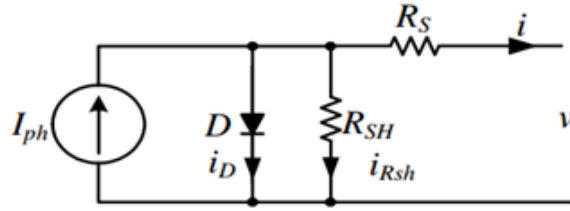


Рисунок 5.1 - Эквивалентная схема модели одного диода СЭ

Вольтамперная характеристика модели одного диода определяется следующим выражением:

$$i = I_{ph} - I_0 \left( e^{\frac{v+iR_s}{kAT_c}} - 1 \right) - \frac{v+iR_s}{R_{sh}} \quad (5.1)$$

где  $I_{ph}$  – фотоэлектрический ток,  $I_0$  – ток насыщения,  $R_s$  – последовательное сопротивление,  $R_{sh}$  – шунтирующее (параллельное) сопротивление,  $A$  – коэффициент идеальности,  $q$  – модуль заряда электрона,  $k$  – постоянная Больцмана и  $T_c$  – температура солнечного элемента.

Для модели одного диода необходимо определить пять неизвестных параметров это:  $I_{ph}$ ,  $I_0$ ,  $A$ ,  $R_s$  и  $R_{sh}$ . В техническом описании, как правило, ток короткого замыкания ( $I_{sc}, 0$ ), напряжение холостого хода ( $0, V_{oc}$ ) и максимум мощности ( $I_m, V_m$ ). Подставив эти значения в уравнения (1), получаем следующие выражения:

$$I_{sc} = I_{ph} - I_0 \left( e^{\frac{I_{sc}R_s}{kAT_c}} - 1 \right) - \frac{I_{sc}R_s}{R_{sh}}, \quad (5.2)$$

$$0 = I_{ph} - I_0 \left( e^{\frac{V_{oc}}{kAT_c}} - 1 \right) - \frac{V_{oc}}{R_{sh}}, \quad (5.3)$$

$$I_m = I_{ph} - I_0 \left( e^{\frac{V_m+I_mR_s}{kAT_c}} - 1 \right) - \frac{V_m+I_mR_s}{R_{sh}}. \quad (5.4)$$

Кроме того, точка ( $P_m, V_m$ ) является экстремумом P-V характеристики, следовательно:

$$\left. \frac{dp}{dv} \right|_{\substack{v=V_m \\ i=I_m}} = 0.$$

Производная уравнения мощности в точке максимальной мощности может быть выражено как:

$$\left. \frac{dp}{dv} \right|_{\substack{v=V_m \\ i=I_m}} = \left. \frac{d(iv)}{dv} \right|_{\substack{v=V_m \\ i=I_m}} = I_m + \left. \frac{di}{dv} \right|_{\substack{v=V_m \\ i=I_m}} V_m. \quad (5.5)$$

Принимая во внимание уравнение (5.1):

$$di = df(i, v) = \frac{\partial f}{\partial i} di + \frac{\partial f}{\partial v} dv,$$

$$\text{или } g(I_m, V_m) = \frac{di}{dv} \Big|_{\substack{v=V_m \\ i=I_m}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{\substack{v=V_m \\ i=I_m}}}{1 - \frac{\partial f}{\partial i} \Big|_{\substack{v=V_m \\ i=I_m}}}.$$

Исходя из выражения (4.5), можно получить следующее уравнение:

$$\frac{dp}{dv} \Big|_{\substack{v=V_m \\ i=I_m}} = I_m + g(I_m, V_m)V_m. \quad (5.6)$$

Если параметр  $A$  фиксируется в интервале  $[1;1.5]$ , то количество неизвестных параметров уменьшается на 4.

С помощью 4 известных уравнений (5.2), (5.3), (5.4), (5.6) можно найти значения 4 неизвестных  $I_{ph}$ ,  $I_0$ ,  $R_s$  и  $R_{sh}$ .

В данной работе для решения системы 4-х уравнений применяется метод Ньютона-Рафсона.

$$F(x_k) = \begin{bmatrix} I_{ph} - I_0 \left( e^{\frac{I_{sc} R_s}{q k A T_c}} - 1 \right) - \frac{I_{sc} R_s}{R_{sh}} - I_{sc} \\ I_{ph} - I_0 \left( e^{\frac{V_{oc}}{q k A T_c}} - 1 \right) - \frac{V_{oc}}{R_{sh}} \\ I_{ph} - I_0 \left( e^{\frac{V_m + I_m R_s}{q k A T_c}} - 1 \right) - \frac{V_m + I_m R_s}{R_{sh}} - I_m \\ I_m + g(I_m, V_m)V_m \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

$$J_F(x_k) = \left[ \frac{\partial F_i}{\partial I_{ph}} \quad \frac{\partial F_i}{\partial I_0} \quad \frac{\partial F_i}{\partial R_s} \quad \frac{\partial F_i}{\partial R_{sh}} \right], \quad i=\overline{1,4}, \quad (5.8)$$

$$\text{где } x_k = \left[ I_{ph} \quad I_0 \quad R_s \quad R_{sh} \right]^T.$$

Чтобы метод Ньютона-Рафсона сходиллся при любом выборе начального значения, используются следующие формулы для шага перемещения  $\Delta x_k$  [58]:

$$\begin{aligned} \Delta x_{k+1} &= -J_F(x_k)^{-1} F(x_k) \\ \xi_{k+1} &= \min\left(\frac{d_{max}}{\|\Delta x_{k+1}\|}, 1\right) \\ x_{k+1} &= x_k + \xi_{k+1} \Delta x_{k+1} \end{aligned} \quad (5.9)$$

где  $\xi_{k+1}$  – коэффициент шага перемещения,  $d_{max}$  – максимум отклонения временной точки  $x_k$ . В эксперименте выбирается значение  $d_{max}$  в интервале  $[0.01;1]$ .

Следовательно, алгоритм определения параметров модели одного диода солнечного элемента представляется следующим образом:

*Старт:* Выбирается начальное значение вектора  $x_0$ .

Итератив:  $k=0,1,2,3\dots$

Вычисляется  $F(x_k)$  как (7)

Вычисляется  $J(x_k)$  как (8)

Вычисляется временная точка  $x_{k+1}$  как (9)

Стоп:  $\|F(x_k)\| < \text{точность вычисления } \varepsilon$

Первый эксперимент был исследован на солнечном элементе Motech IM156B3-164 ( $V_{oc}=0.614\text{В}$ ,  $I_{sc}=8.38\text{А}$ ,  $V_m=0.509\text{В}$ ,  $I_m=7.85\text{А}$ ). Было выбрано начальное значение:  $A=1.3$ ,  $I_{ph}=8.38\text{А}$ ,  $I_0=9.3\text{e-}8\text{В}$ ,  $R_s=1.58\text{e-}3\text{Ом}$  и  $R_{sh}=1\text{Ом}$ . Получен следующий результат:  $I_{ph}=8.38\text{А}$ ,  $I_0=8.6363\text{e-}8\text{В}$ ,  $R_s=1.6189\text{e-}3\text{Ом}$  и  $R_{sh}=249.2855\text{Ом}$ .

Также были проведены эксперименты на солнечных элементах JA Solar JACP6RF-3 ( $V_{oc}=0.644\text{В}$ ,  $I_{sc}=9.272\text{А}$ ,  $V_m=0.545\text{В}$ ,  $I_m=8.661\text{А}$ ), Sunpower Corporation A-300 ( $V_{oc}=0.670\text{В}$ ,  $I_{sc}=5.9\text{А}$ ,  $V_m=0.56\text{В}$ ,  $I_m=5.54\text{А}$ ).

Сравнение результатов, полученных нашим методом и другими методами, представлено в таблице.

Таблица 5.1 Сравнение методов определения параметров солнечных элементов

Элемент	Метод	$I_{ph}$ (А)	$I_0$ (В)	A	$R_s$ (Ом)	$R_{sh}$ (Ом)
IM156B3	Наш метод	8.380056	8.6187e-8	1.3	1.6197e-3	242.8156
	[6]	8.380061	8.6213e-8	1.3	1.6180e-3	235.6479
	[1]	8.380100	8.6185e-8	1.3	1.6000e-3	223.9547
JACP6RF	Наш метод	9.272604	3.8432e-8	1.3	4.3382e-4	6.6587
	[6]	9.272546	3.8835e-8	1.3	3.9000e-4	6.6184
	[1]	9.272600	3.8432e-8	1.3	4.3382e-4	6.6587
A-300	Наш метод	5.900619	1.1291e-8	1.3	2.6468e-3	25.1980
	[6]	5.900624	1.1341e-8	1.3	2.6130e-3	24.7463
	[1]	5.900600	1.1291e-8	1.3	2.6000e-3	25.0057

Подставив значения ( $I_{ph}$ ,  $I_0$ ,  $A$ ,  $R_s$  и  $R_{sh}$ ), полученные нашим методом, в уравнение (5.1), получим вольт-амперную характеристику (I-V) и ватт-вольтовую характеристику (P-V), как показано на рисунке 5.2. На рисунке 5.2-б отчетливо видно, что точка максимальной мощности модели совпадает с точкой максимальной мощности в техническом описании, следовательно, полученные результаты имеют высокую точность.

Графики изменения I-V кривой при изменении температуры и облученности показаны на рисунке 5.3.

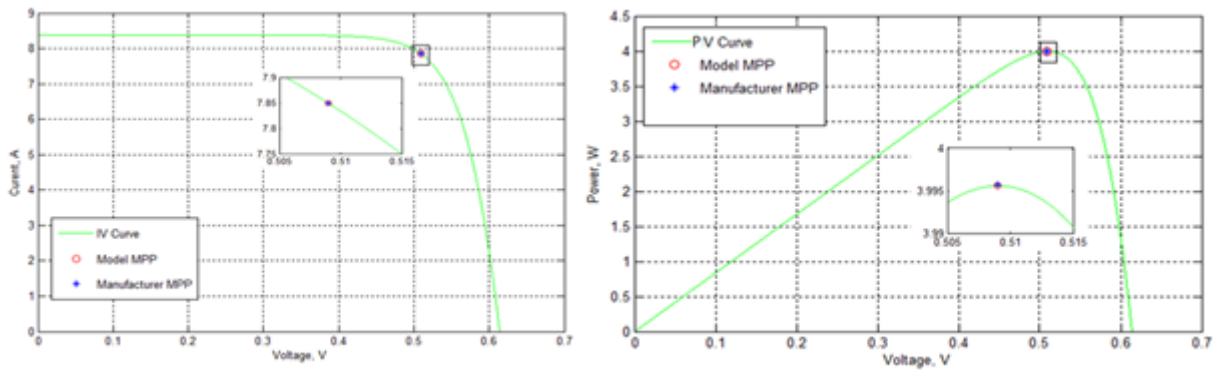


Рисунок 5.2 - Вольт-амперная характеристика (а) и ватт-вольтовая характеристика (б) модели одного диода солнечного элемента Motech IM156B3-164 при стандартных условиях тестирования

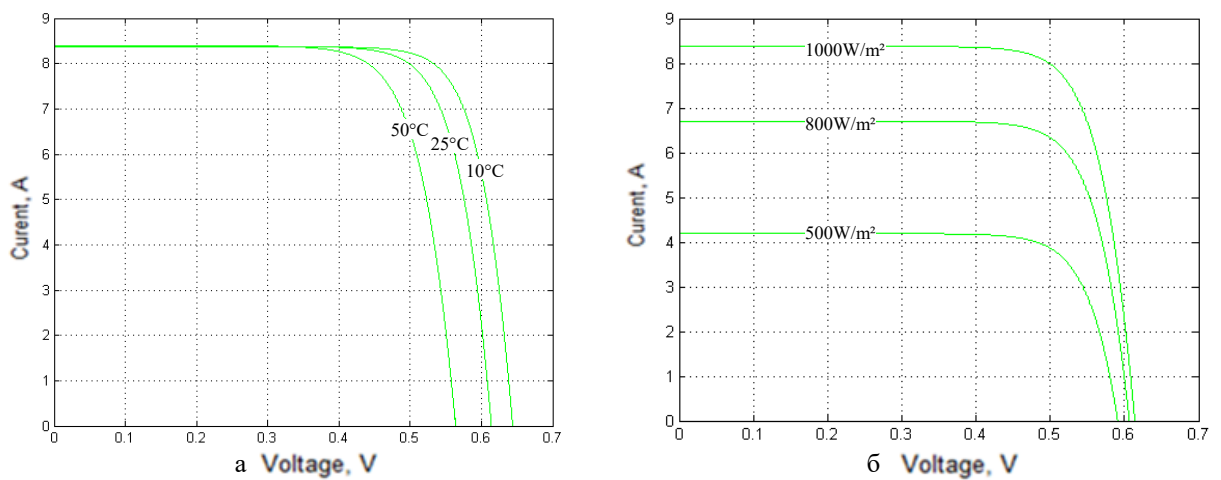


Рисунок 5.3 - Кривая I-V солнечного элемента Motech IM156B3-164 при разных температурах и облученности  $1000\text{W}/\text{m}^2$  (а) и при разных значениях облученности и температуре  $25^\circ\text{C}$  (б)

Для разных типов солнечных элементов (например, Motech IM156B3-164, JA Solar JACP6RF-3, Sunpower Corporation A-300 и другие) было осуществлено компьютерное моделирование, также иллюстрирующее высокую точность предложенного метода.

## 5.2 Отслеживание точки максимальной мощности фотоэлектрической панели методами P&O и INC

На I-V нелинейной характеристике фотоэлектрической панели (ФП) существует одна точка, где мощность максимальна. Отслеживание точки максимальной мощности (MPPT) является способом идентификации значения максимальной мощности фотоэлектрического источника при различных атмосферных условиях.

Существует много методов MPPT, представленных в литературах [62], [63]. Можно перечислить следующие методы MPPT: при постоянном напряжении или постоянном токе,

возмущение и наблюдение (P&O), возрастающая проводимость (INC), нечеткое логическое управление и т.д. Каждый метод имеет свои преимущества и недостатки. P&O и INC – это простые и широко применяемые методы. В данной главе представляются 2 метода P&O и INC, моделирование, анализ этих метода и открытое направление для дальнейшего исследования.

Эквивалентная схема модели фотоэлектрического элемента (ФЭ) показана на рисунке 5.4-а. Вольтамперная характеристика I-V модели ФЭ определяется следующим выражением:

$$I_{PV} = I_{ph} - I_0 \left( e^{\frac{q(V_{PV} + I_{PV}R_s)}{kAT}} - 1 \right) - \frac{V_{PV} + I_{PV}R_s}{R_p}, \quad (5.10)$$

где  $I_{ph}$  – фотоэлектрический ток,  $I_0$  – ток насыщения,  $R_s$  – последовательное сопротивление,  $R_p$  – параллельное (шунтирующее) сопротивление,  $A$  – коэффициент идеальности,  $q$  – модуль заряда электрона,  $k$  – постоянная Больцмана и  $T$  – температура солнечного элемента.

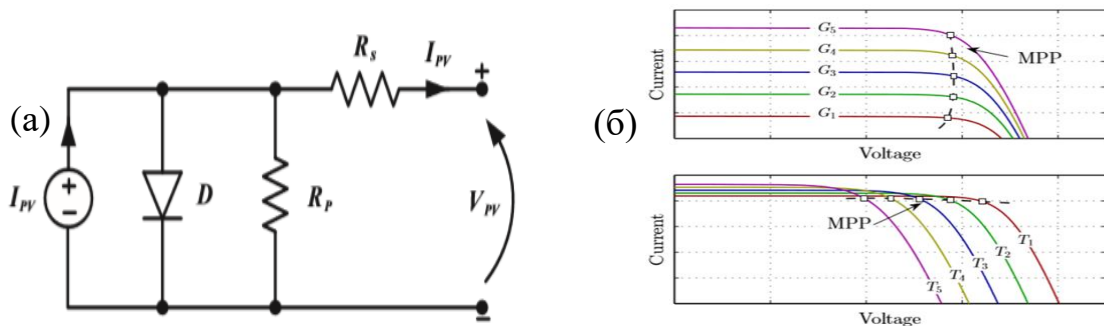


Рисунок 5.4 – а: Эквивалентная схема модели ФЭ; б: Кривая I-V при разных облученности ( $G_1 < G_2 < G_3 < G_4 < G_5$ ) и температурах ( $T_1 < T_2 < T_3 < T_4 < T_5$ ), соответственно

Фотоэлектрическая панель состоит из  $N_S \times N_P$  (последовательных и параллельных) ФЭ и имеет следующую формулу I-V характеристики [64]:

$$I_{PV} = N_P I_{ph} - I_0 \left( e^{\frac{q(V_{PV} + I_{PV} \frac{N_S}{N_P} R_s)}{N_S kAT}} - 1 \right) - \frac{V_{PV} + I_{PV} \frac{N_S}{N_P} R_s}{\frac{N_S}{N_P} R_p}. \quad (5.11)$$

Графики I-V кривой ФП при изменении температуры и облученности показаны на рисунке 1-б. Видно, что точка MPP изменяется и зависит от температуры и облученности. Структура системы с MPPT контроллером показана на рисунке 4.5.

#### P&O метод

В этом методе выходное напряжение ФП изменяется на величину  $\Delta V$ , следовательно,

изменяется значение мощности  $\Delta P$  [66]. На рисунке 5.6 показан принцип работы метода P&O.

- Если точка работы системы находится в слева точки MPP, то нужно увеличивать напряжение  $V_{ref}$  до значения  $V_{MPP}$ .

- Если точка работы системы находится в справа точки MPP, то нужно уменьшать напряжение  $V_{ref}$  до значения  $V_{MPP}$ .

Алгоритм «возмущение и наблюдение» показан на рисунке 5.7.

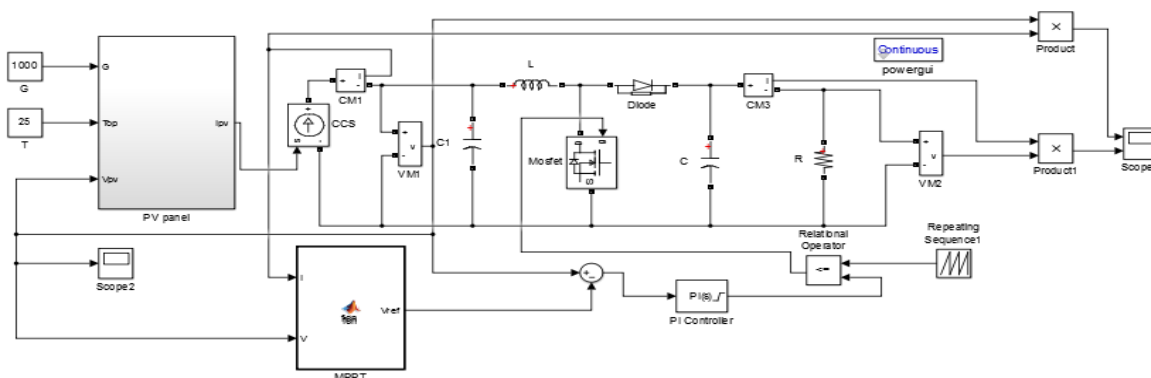


Рисунок 5.5 - Структура MPPT контроллера для фотоэлектрической системы с повышающим преобразователем

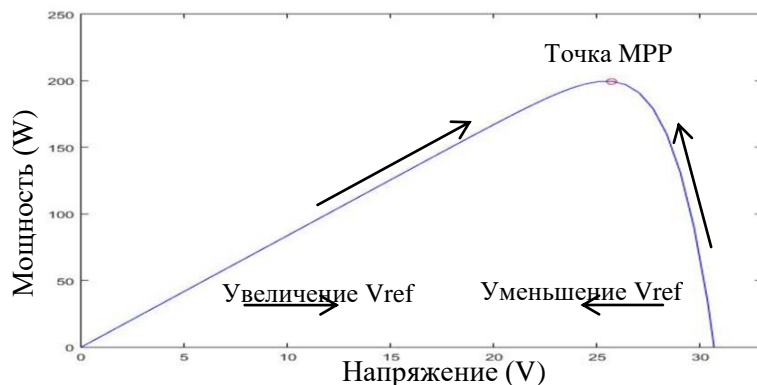


Рисунок 5.6 - Линия P-V

### INC метод

Метод INC [65] вычисляет точку максимальной мощности, сравнивая возрастающую проводимость ( $dI/dU$ ) с проводимостью ФП ( $I/U$ ).

Производную мощности от напряжения можно представить в виде:

$$\frac{dP}{dV} = \frac{d(VI)}{dV} = I + V \frac{dI}{dV}. \quad (5.12)$$

Алгоритм этого метода: если  $dI/dU > -I/U$ , то  $V_{ref} < V_{MPP}$ ; если  $dI/dU < -I/U$ , то  $V_{ref} > V_{MPP}$ ; если  $dI/dU = -I/U$ , то  $V_{ref} = V_{MPP}$ .

Блок-схема алгоритма возрастающей проводимости представлена на рисунке 5.8.



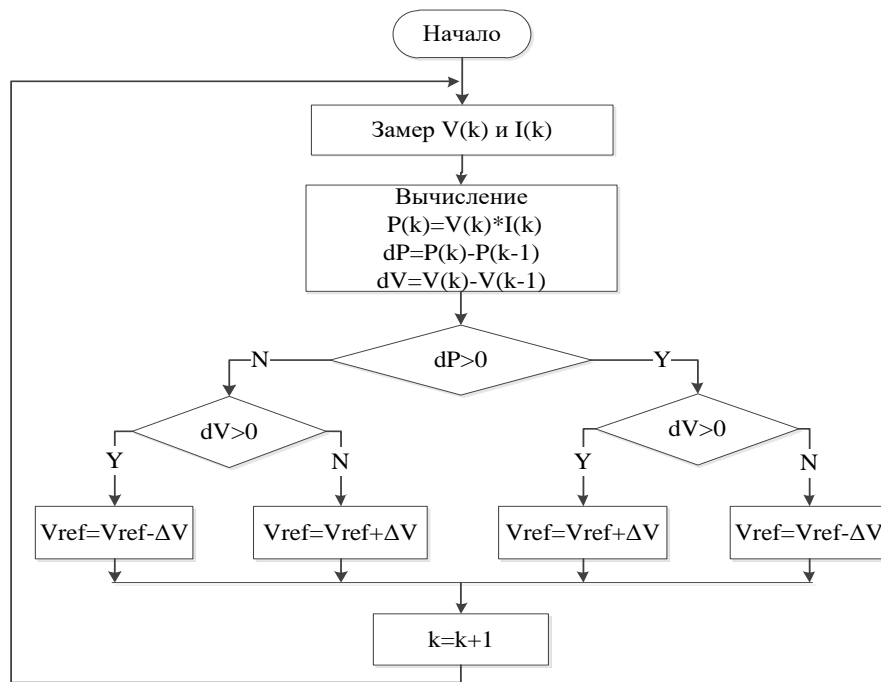


Рисунок 5.8 - Блок-схема алгоритма метода «возмущение и наблюдение»

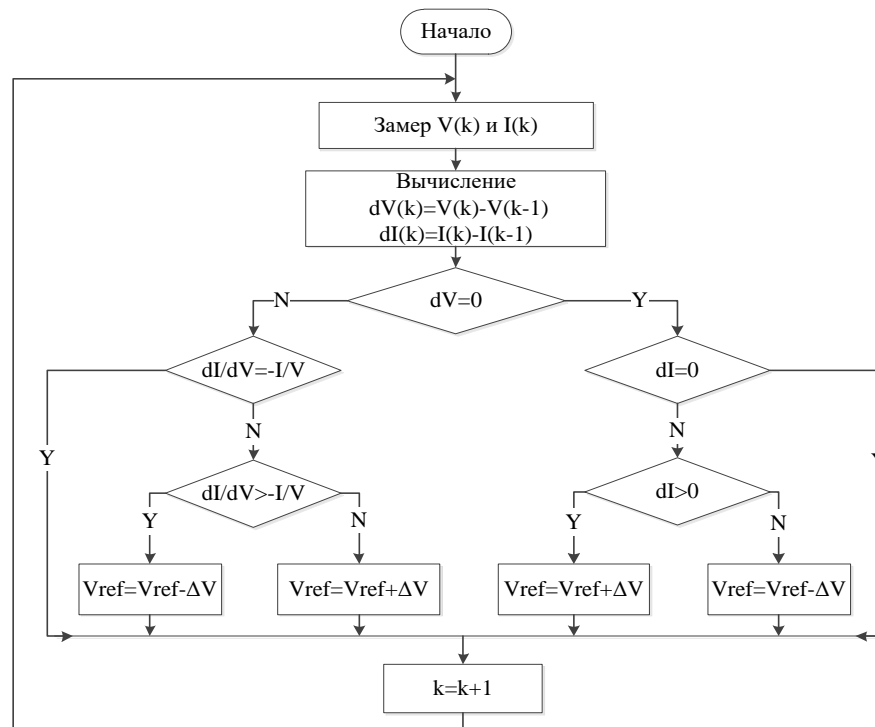


Рисунок 5.9 - Блок-схема алгоритма метода «Возрастающая проводимость»

Результаты моделирования и анализа показаны на рисунках 5.10, 5.11, 5.12, 5.13. Видно, что при изменении атмосферных условий (изменении облученности и температуры) оба метода P&O и INC дают хорошие результаты. Выходные значения хорошо отслеживают точку максимальной мощности (MPP) за короткое время. Однако на рисунках 5.10, 5.12 показано, что выходное напряжение колеблется вокруг точки максимальной MPP. Компенсация этих колебаний является направлением дальнейших исследований.

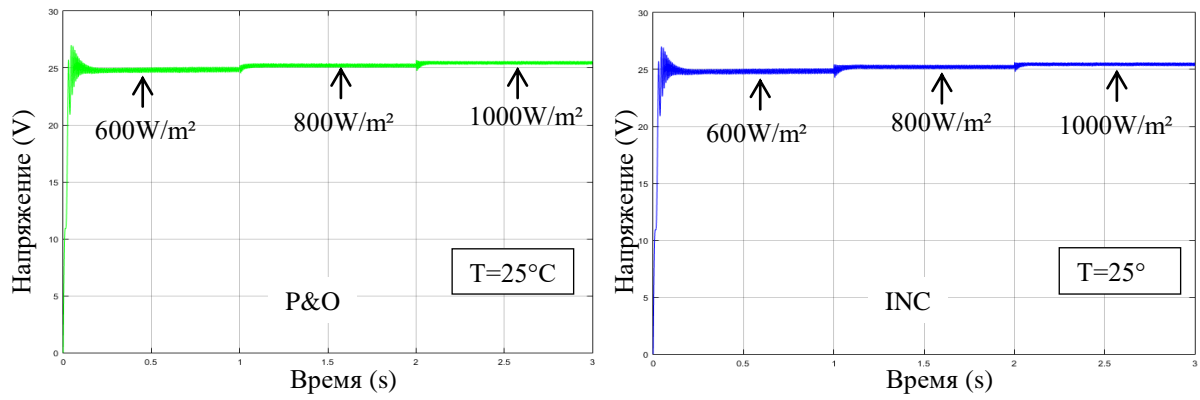


Рисунок 5.10 - Изменение напряжения ФП применением метода P&O и INC при изменении облученности

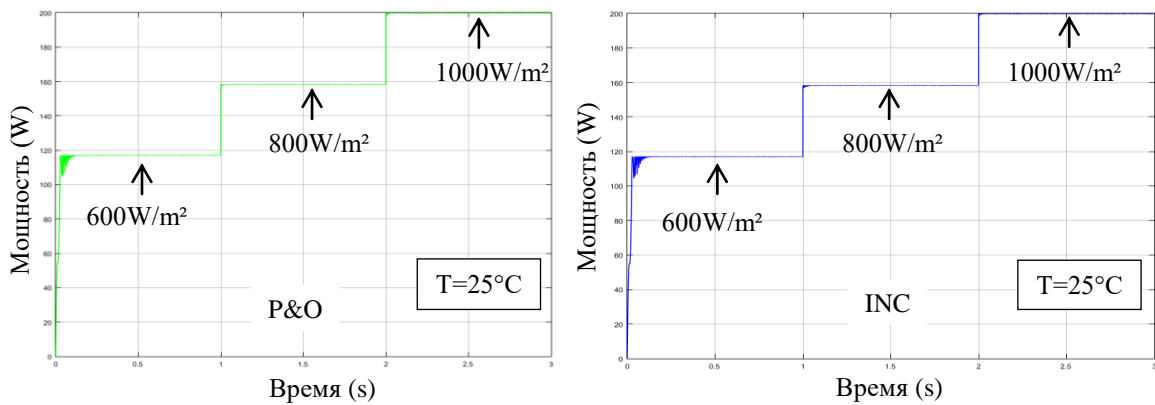


Рисунок 5.11 - Изменение мощности ФП применением метода P&O и INC при изменении облученности

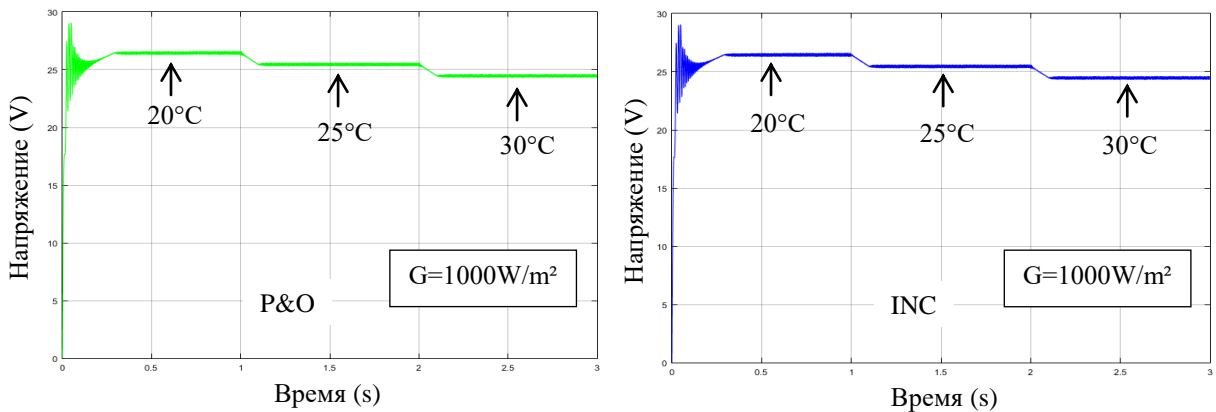


Рисунок 5.12 - Изменение напряжения ФП применением метода P&O и INC при изменении температуры

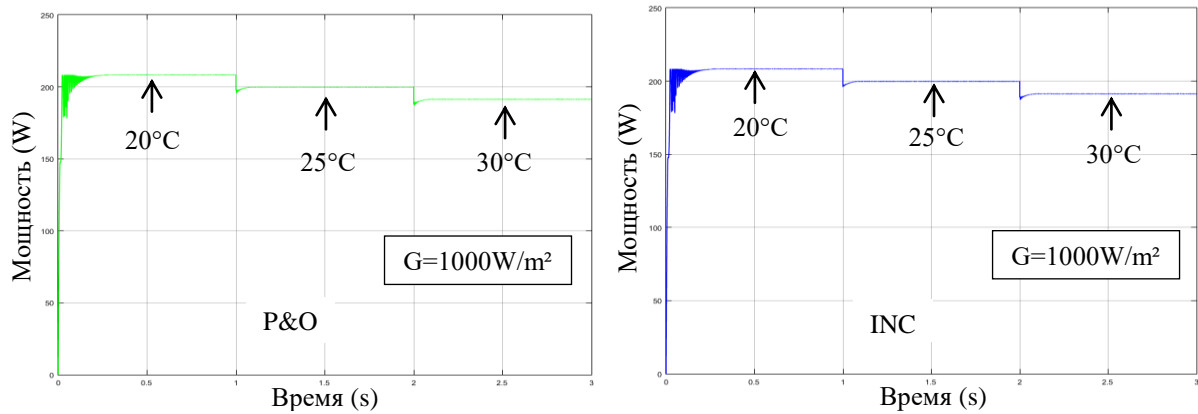


Рисунок 5.13 - Изменение мощности ФП применением метода P&O и INC при изменении температуры

### 5.3 Идентификация параметров солнечной батареи с использованием процедуры динамического расширения регрессора

Солнечная энергия – один из надёжных и многообещающих источников альтернативной энергии. Она обладает рядом преимуществ, таких, как отсутствие загрязнения окружающей среды, бесшумная работа, низкий эксплуатационный расход, длительный срок использования, нулевые затраты на входную энергию. Фотоэлектрические технологии развивается по двум направлениям: разработка фотоэлектрических материалов и управление мощностью (с использованием DC/DC и/или DC/AC преобразователей) для увеличения эффективности преобразования [67]. Несмотря на то, что технологии изготовления фотоэлектрических материалов развиваются большими темпами, фотоэлектрические системы остаются дорогостоящими решениями с относительно низкой эффективностью преобразования энергии. Следовательно, развитие систем управления мощностью играет важную роль в увеличении эффективности и уменьшении стоимости. Возможность точной идентификации параметров солнечной батареи дает повышение эффективности работы системы управления. В данном разделе описана идентификация параметров солнечной батареи новым методом DREM (динамического расширения регрессора), который представлен в [68].

Фотоэлектрическая панель (ФП) состоит из  $N_S \times N_P$  ФЭ (последовательных и параллельных фотоэлектрических элементов, характеристики которых приведены в [69]) и имеет следующую формулу I-V характеристики [70]

$$I_{PV} = N_P I_{ph} - N_P I_0 \left( e^{\frac{V_{PV} + I_{PV} \frac{N_S R_s}{N_P}}{N_S A k T}} - 1 \right) - \frac{V_{PV} + I_{PV} \frac{N_S R_s}{N_P}}{\frac{N_S}{N_P} R_P}, \quad (5.13)$$

где  $I_{ph}$  – фотоэлектрический ток,  $I_0$  – ток насыщения,  $R_s$  – последовательное сопротивление,  $R_p$  – параллельное (шунтирующее) сопротивление,  $A$  – коэффициент идеальности,  $q=1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$  – модуль заряда электрона,  $k=1,3806503 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  – постоянная Больцмана и  $T$  – температура солнечного элемента.

На P-V кривой ФП существует одна точка, где мощность фотоэлектрической панели максимальная, как показано на рисунке 5.14. Задачей является определение значения напряжения, соответствующего точке максимальной мощности. Возможность идентификации параметров фотоэлектрической панели дает возможность определения этой величины  $V_{MPP}$ .

Идентификация характеристических параметров I-V кривой сложна, так как содержит пять неизвестных параметров ( $I_{ph}$ ,  $I_0$ ,  $R_s$ ,  $R_p$ ,  $A$ ), а функция (5.13) нелинейна.

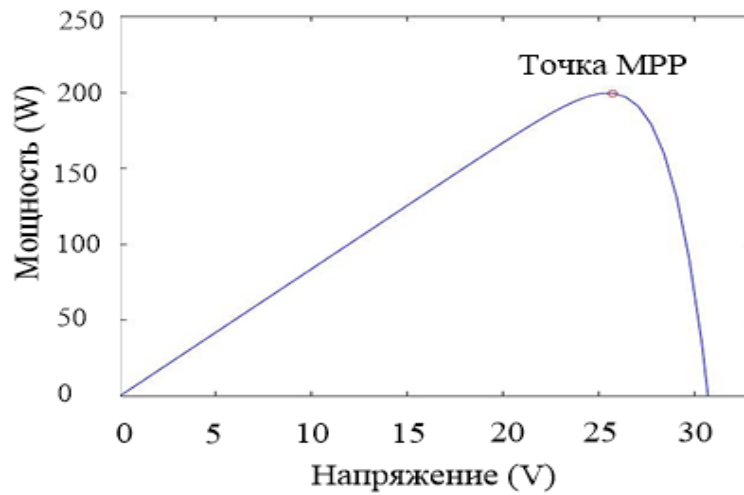


Рисунок 5.14 - P-V линия ФП

Рассмотрим простейший пример зарядки аккумулятора солнечной панелью с повышающим преобразователем (boost converter), который показан на рисунке 5.3.2 [70].

Пространство состояний модели системы можно определить по следующим уравнениям [70]

$$\begin{aligned} C\dot{v}_c &= uI - \frac{1}{R_b}(v_c - v_b), \\ L\dot{I} &= -uv_c + V, \\ I &= a_1 - a_2(e^{a_3(V+a_4I)} - 1) - a_5(V + a_4I), \end{aligned} \quad (5.14)$$

где:

- $(v_c, I, V, u)$  – положительные измеренные сигналы,  $u=1-d$ , где  $d$  – скважность, определяемая разработчиком,
- $L, C, R_b, v_b > 0$  – известные константы,
- $a := col(a_1, \dots, a_5)$  – положительные неизвестные параметры

$$- \begin{bmatrix} I_{ph} \\ I_0 \\ A \\ R_S \\ R_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N_p} a_1 \\ \frac{1}{N_p} a_2 \\ \frac{q}{N_s k T} \frac{1}{a_3} \\ \frac{N_p}{N_s} a_4 \\ \frac{N_p}{N_s} \frac{1}{a_5} \end{bmatrix}.$$

*Постановка задачи.* Рассмотрим систему (5.14) со значением  $u$ , которое выбирается разработчиком, таким образом, чтобы все сигналы были ограничены. Измеряя  $(v_C, I, V, u)$ , генерируется оценка  $\hat{a}$  всех параметров  $a$ . Эти оценки должны удовлетворять условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|a - \hat{a}(t)\| = 0,$$

где  $\|\cdot\|$  – евклидова норма.

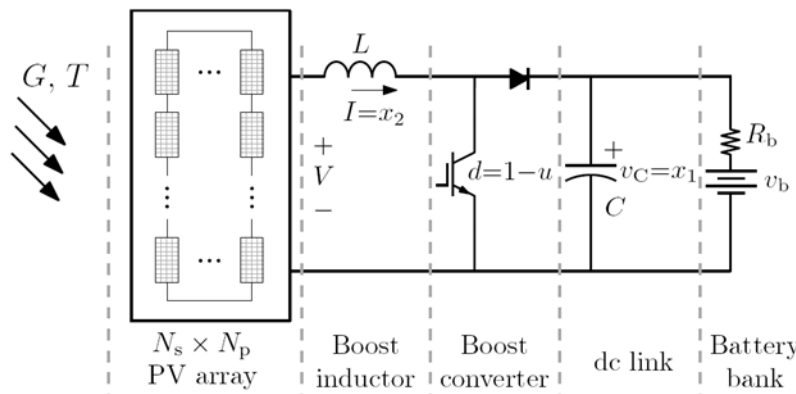


Рисунок 5.15 - Схема зарядки аккумулятора солнечной панелью с повышающим преобразователем

Систему (5.14) можно переопределить как модель линейного регрессора

$$y = \Omega^T \theta + \varepsilon_t, \quad (5.15)$$

где  $\Omega$  и  $y$  – измеряемые сигналы,  $\theta := \text{col}(\theta_1, \dots, \theta_5)$  – вектор неизвестных положительных параметров,  $\varepsilon_t$  – экспоненциально затухающий элемент.

$$\begin{aligned} \theta_1 &:= \frac{a_3}{1+a_3a_4b_1}, \theta_2 := \frac{a_3b_1+b_3}{1+a_3a_4b_1}, \theta_3 := \frac{a_3b_3}{1+a_3a_4b_1}, \theta_4 := \frac{a_3a_4}{1+a_3a_4b_1}, \theta_5 := \frac{a_3a_4b_3}{1+a_3a_4b_1} \\ b_1 &:= \frac{a_1+a_2}{1+a_3a_4}, b_2 := \frac{a_2}{1+a_3a_4}, b_3 := \frac{a_5}{1+a_3a_4}, \\ \Omega &:= \text{col}(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5), \\ \Omega_1 &:= I_{\xi_2} - \left[ \frac{1}{p+\lambda} \right] (I_{\xi_2}), \\ \xi_1 &= \left[ \frac{\lambda}{p+\lambda} \right] I, \xi_2 = \left[ \frac{-\lambda}{p+\lambda} \right] V, \xi_3 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\lambda}{p+\lambda} \right] V^2, \xi_4 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\lambda}{p+\lambda} \right] I^2, \xi_5 = \left[ \frac{-\lambda}{p+\lambda} \right] (VI). \end{aligned}$$

Применяя метод DREM [68], получим

$$y_{f_j}(t) := \beta y(t-d_j), \Omega_{f_j}(t) := \beta \Omega(t-d_j),$$

где  $d_j \in \check{Y}_+, j=1, \dots, 4$  и  $\beta \in \check{Y}_+$

или

$$y_{f_j} = \Omega_{f_j}^T \theta. \quad (5.16)$$

Объединив регрессор (5.15) с полученными равенствами вида (5.16), можно записать расширенную систему

$$Y_e = M_e \theta, \quad (5.17)$$

где  $Y_e \in \check{Y}^5$ ,  $M_e \in \check{Y}^{5 \times 5}$  определены как

$$Y_e = \begin{bmatrix} y \\ y_{f_1} \\ y_{f_2} \\ y_{f_3} \\ y_{f_4} \end{bmatrix}, \quad M_e = \begin{bmatrix} \Omega^T \\ \Omega_{f_1}^T \\ \Omega_{f_2}^T \\ \Omega_{f_3}^T \\ \Omega_{f_4}^T \end{bmatrix}.$$

Умножая (5.17) на присоединённую матрицу алгебраического дополнения  $M_e$ , получим

$$Y_i = \Delta \theta_i, \quad i=1 \text{K} 5,$$

где  $\Delta = \det\{M_e\}$  – определитель матрицы  $M_e$ ,  $Y = \text{adj}\{M_e\}Y_e$ ,  $Y = \text{col}(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5) \in R^5$ .

Оценка параметров  $\theta$  может быть получена в форме

$$\hat{\theta}_i = -\gamma_i \Delta (\Delta \hat{\theta}_i - Y_i),$$

где  $\gamma_i$  – положительные коэффициенты адаптации. Тогда последнее выражение для ошибки оценивания параметра  $\theta_i^0 = \hat{\theta}_i - \theta_i$  может быть переписано как

$$\dot{\theta}_i^* = -\gamma_i \Delta^2 \theta_i^*.$$

Откуда следует  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_i^*(t) = 0 \Leftrightarrow \Delta(t) \notin L_2$ .

Параметры  $a$  можно определить таким сюръективным отображением  $G: \check{Y}^6 \rightarrow \check{Y}^5$ :

$$a = G(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, V, I),$$

где

$$a_1 = - \left[ \theta_1^2 I + \theta_1 \theta_3 V + \frac{\theta_1^2 (\theta_1 \theta_2 - \theta_3)}{\theta_3 \theta_4 - \theta_1^2} \right] \frac{e^{\frac{\theta_3 \theta_4 - \theta_1^2 (V + \theta_4 I)}{\theta_1 - \theta_2 \theta_4}}}{\theta_3 \theta_4 - \theta_1^2} + \frac{\theta_1^2 (\theta_1 \theta_2 - \theta_3)}{(\theta_3 \theta_4 - \theta_1^2)^2},$$

$$a_2 = \left[ \theta_1^2 I + \theta_1 \theta_3 V + \frac{\theta_1^2 (\theta_1 \theta_2 - \theta_3)}{\theta_3 \theta_4 - \theta_1^2} \right] \frac{e^{\frac{\theta_3 \theta_4 - \theta_1^2 (V + \theta_4 I)}{\theta_1 - \theta_2 \theta_4}}}{\theta_3 \theta_4 - \theta_1^2}, \quad a_3 = \frac{\theta_3 \theta_4 - \theta_1^2}{\theta_2 \theta_4 - \theta_1^2}, \quad a_4 = \frac{\theta_4}{\theta_1}, \quad a_5 = \frac{\theta_1 \theta_3}{\theta_1^2 - \theta_3 \theta_4}.$$

Подробнее о том, как определить параметры  $a$ , указано в [70].

*Результаты моделирования.* Для проверки качества работы метода DREM проведен эксперимент на солнечной панели, которая состоит из солнечных элементов M156B3-164 [69] с такими параметрами:  $I_{ph,ref}=8.3800$ ,  $I_{0,ref}=8.6187 \times 10^{-8}$ ,  $R_{s,ref}=1.6197 \times 10^{-3}$ ,  $R_{p,ref}=242.8156$ ,  $A_{ref}=1.3$ ,  $N_s=1500$ ,  $N_p=50$ ,  $\alpha_I=0.0005$ ,  $E_g=1.12$ .

Отношение между этими параметрами и эталонной температурой, эталонной облученностью определяется следующими выражениями [70]

$$I_{ph} = \frac{G}{G_{ref}} [I_{ph,ref} + \alpha_I (T - T_{ref})],$$

$$I_0 = I_{0,ref} \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^3 \exp \left[ \frac{qE_g}{Ak} \left( \frac{1}{T_{ref}} - \frac{1}{T} \right) \right],$$

где эталонная температура  $T_{ref}=25^\circ C$ , эталонная облученность  $G_{ref}=1000 W/m^2$ .

Контрольный сигнал определяется таким образом

$$u(t) = 0.8 + 0.1 \sin(3t) + 0.1 \sin(4t).$$

Сигнал  $u(t)$  можно считать «достаточно богатым» для удовлетворения условия возбуждения  $\Delta(t) \notin L_2$ .

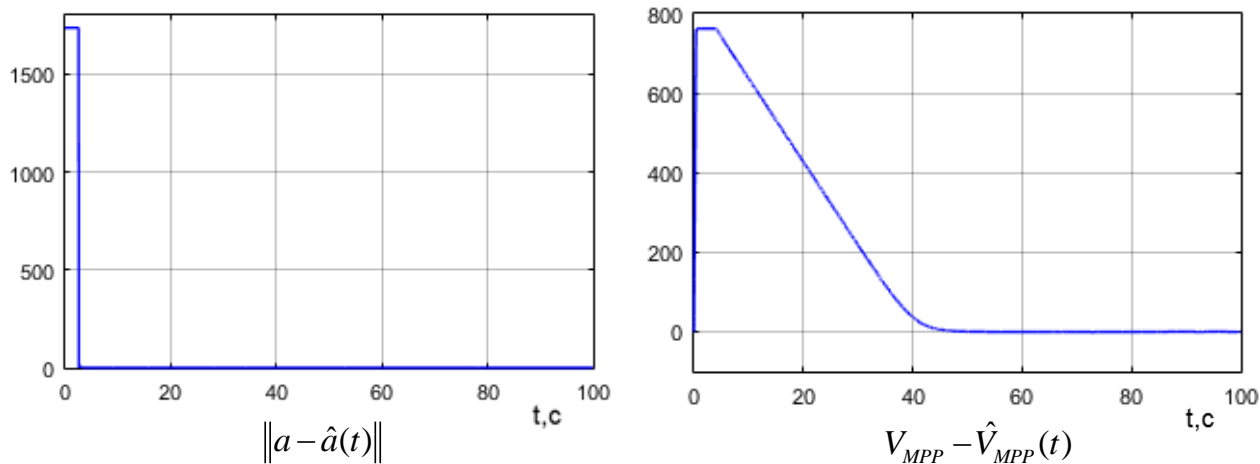


Рисунок 5.16 - Погрешность оценки параметров фотоэлектрической панели

Результаты моделирования показаны на рисунке 4.16. Очевидно, что предложенный подход позволяет отслеживать значение параметров  $a$  фотоэлектрической панели, из которых можно отслеживать выходное напряжение в точке MPP.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения этапа были разработаны новые методы робастного и адаптивного управления линейными и нелинейными параметрически неопределенными динамическими системами в условиях внешних возмущающих воздействий и неучтенной динамики, а также с канальными ограничениями, вызванными ограничениями вычислительных устройств и ограничениями на мощность передаваемого сигнала. Работоспособность полученных результатов была проверена компьютерным моделированием и на робототехнических, мехатронных системах.

На основе полученных результатов были разработаны, исследованы и апробированы:

- робастный наблюдатель положения для неявнополюсных синхронных двигателей с постоянными магнитами;
- алгоритмы бессенсорного управления неявнополюсным синхронным двигателем с постоянными магнитами;
- алгоритмы робастного управления нелинейными системами, которые в случае наличия запаздывания в канале управления обеспечивают схождение всех траекторий замкнутой системы в замкнутое множество, а при отсутствии запаздывания гарантируют финитную устойчивость замкнутой системы;
- алгоритм управления, построенный на базе классического метода внутренней модели совместно с контуром адаптивной настройки, который обеспечивает асимптотическую сходимость выходных переменных к положениям равновесия;
- алгоритмы управления по выходу для многоканальных систем с гармоническими внешними входными воздействиями и параметрическими неопределенностями;
- алгоритм слежения за мультигармоническим сигналом с неизвестными параметрами на базе робототехнической системы.
- алгоритм, позволяющий выделять полезную информацию из хаотического сигнала для оценки параметров системы;
- наблюдатель, который использует только выходной сигнал хаотической системы при условии полной параметрической неопределенности модели;
- алгоритм оценивания параметров синусоидального сигнала;
- алгоритм планирования маршрутов движения для промышленных роботов;
- алгоритм оценки неизвестных параметров солнечного элемента с

использованием итеративного метода Ньютона-Рафсона;

- метод идентификации значения максимальной мощности фотоэлектрического источника при различных атмосферных условиях на основе применения методов Р&О и INC;
- метод идентификации параметров солнечной батареи с использованием процедуры динамического расширения регрессора.

Полученные в ходе выполнения этапа научные результаты были представлены на международных и всероссийских конференциях и опубликованы в рецензируемых научных журналах. Перечень конференций, в которых приняли участие сотрудники лаборатории в соответствии с п.7 плана работ научного исследования, приведен в Отчете о научных исследованиях. Затраты на участие в конференциях отражены в Отчете о целевом использовании средств гранта. Также в рамках проводимых исследований было получено 6 объектов интеллектуальной собственности.

Для решения поставленных задач использовалось современное оборудование, приобретенное в соответствии с п.5 плана работ научного исследования, и программно-аппаратный комплекс, приобретенный в соответствии с п.8 плана работ научного исследования. Полный перечень и назначение оборудования отражены в Отчете о научных исследованиях. Затраты на приобретение оборудования отражены в Отчете о целевом использовании средств гранта.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. S. Bolognani, M. Tomasini, L. Tubiana, M. Zigliotto. Start-up strategy for sensorless direct drive PM generator for wind turbines // in *Proc. IEEE Int. Symp. Ind. Electron.*, vol. 4, pp. 1801-1806, June 2005.
2. G. Foo, M.F. Rahman. Sensorless vector control of interior permanent magnet synchronous motor drives at very low speed without signal injection // *IET Elect. Power Appl.*, vol. 4, no. 3, pp. 131-139, March 2010.
3. P.P. Acarnley, J.F. Watson. Review of position-sensorless operation of brushless permanent-magnet machines // *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 53, no. 2, pp. 352–362, Apr. 2006.
4. K. Nam. *AC motor control and electric vehicle applications* // CRC Press, 2010.
5. Z. Quiao et al. New sliding-mode observer for position sensorless control of permanent-magnet synchronous motor // *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 60, no. 2, pp. 710-719, Feb 2013.
6. D. Xiao, M. Rahman. Sensorless direct torque control and flux controlled IPM synchronous machine fed by matrix converter over a wide speed range // *IEEE Trans. on Ind. Informat.*, vol. 9 no. 4, pp 1855-1867, 2013.
7. K. Lu, X. Lei, F. Blaabjerg. Artificial inductance concept to compensate nonlinear inductance effects in the back EMF-based sensorless control method for PMSM // *IEEE Trans. Energy. Conv.*, vol. 28, no. 3, pp. 593-600, 2013.
8. M. Hinkkanen, T. Tuovinen, L. Harnefors, J. Luomi. A combined position and stator-resistance observer for salient PMSM drives: design and stability analysis // *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 27, no. 2, pp. 601-609, Feb. 2011.
9. D. Paulus, J.F. Stumper and R. Kennel. Sensorless Control of Synchronous Machines based on Direct Speed and Position Estimation in Polar Stator-Current Coordinates // *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 28, no. 5, pp. 2503-2513, 2013.
10. F. Genduso, R. Miceli, C. Rando, G.R. Galluzzo. Back EMF sensorless-control algorithm for high-dynamic performance PMSM // *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 57, no. 6, pp. 2092-2100, 2010.
11. H. Kim, J. Son, J. Lee. A high-speed sliding-mode observer for the sensorless speed control of a PMSM // *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 58, no. 9, pp. 4069-4077, 2011.
12. S.K. Kommuri, K.C. Veluvolu, M. Defoort. Robust observer with higher-order sliding mode for sensorless speed estimation of a PMSM // in *Proc. of Europ. Contr. Conf.*, pp. 4598-4603, 2013.
13. Y. Shi, K. Sun, L. Huang, Y. Li. Online identification of permanent magnet flux based on extended kalman filter for IPMSM drive with position sensorless control // *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 59, no. 11, pp. 4169-4178, Nov. 2012.

14. S. Bolognani, L. Tubiana, M. Zigliotto. Extended Kalman filter tuning in sensorless PMSM drives // *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 39, no. 6, pp. 1741-1747, 2003.
15. A. Akrad, M. Hilaret, D. Diallo. Design of a fault-tolerant controller based on observers for a PMSM drive // *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 58, no. 4, pp. 1416-1427, 2011.
16. T. H. Kim, M. Ehasani. An error analysis of the sensorless position estimation for BLDC motors // in *Conf. Rec. of 38th IAS Annual Meeting*, pp 611-617, Oct. 2003.
17. G. Zhou, Z. Wu, J. Ying. Unattenuated BEMF detection for sensorless brushless DC (BLDC) motor drives // in *Proc. of Power Electron. and Motion Control Conf.*, vol. 3, pp. 1292-1297, 2004.
18. G. Foo, M. F. Rahman. Sensorless direct torque and flux-controlled IPM synchronous motor drive at very low speed without signal injection // *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 57, no. 1, pp. 395-403, Jan. 2010.
19. D. Raca, P. Garcia, D.D. Reigosa, F. Briz, R.D. Lorenz. Carrier-signal selection for sensorless control of PM synchronous machines at zero and very low speeds // *IEEE Trans. Ind. Appl.*, pp. 167-178, 2010.
20. O. Wallmark, L. Harnefors. Sensorless control of salient PMSM drives in the transition region // *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 53, no. 4, pp. 1179-1187, 2006.
21. A. Bobtsov, A. Pyrkin, R. Ortega, S. Vukosavic, A. Stankovic, E. Panteley. A robust globally convergent position observer for the permanent magnet synchronous motor // *Automatica*, vol. 61, pp. 47-54, Nov. 2015.
22. F. Genduso, R. Miceli, C. Rando, G.R. Galluzzo. Back EMF sensorless-control algorithm for high-dynamic performance PMSM // *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 57, no. 6, pp. 2092-2100, 2010.
23. R. Ortega, L. Praly, A. Astolfi, J. Lee, K. Nam. Estimation of rotor position and speed of permanent magnet synchronous motors with guaranteed stability // *IEEE Trans. on Control Syst. Techn.*, vol. 19, no 3, pp. 601-614, 2011.
24. P.C. Krause. *Analysis of electric machinery* // McGraw Hill, New York, 1986.
25. S. Aranovskiy, A. Bobtsov, R. Ortega, A. Pyrkin. Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing. arXiv preprint arXiv:1509.02763, 2015.
26. J. Holtz. Pulsewidth Modulation-A Survey // *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 39, no. 5, pp. 410-420, 1992.
27. J. Holtz. Pulsewidth Modulation for Electronic Power Conversion // in *proceedings of the IEEE*, vol. 82, no. 8, pp. 1194-1214, 1994.
28. *DM2020 Data manual* // MOOG Italiana S.r.l., Casella, Italy, 2011.
29. *Fastact servo motors data sheets* // Vickers Electrics, Genoa, Italy, 1994.

30. M. Shin, D. Hyun, S. Cho, S. Choe. An improved stator flux estimation for speed sensorless stator flux orientation control of induction motors // *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 15, no. 2, pp 312-318, 2000.
31. R. D. Lorenz, K. Van Patten. High resolution velocity estimation for all digital, AC servo drives // in *IEEE IAS Conf. Rec.*, pp. 363-368, 1988.
32. Erneux T. Applied Delay Differential Equations // Springer, NY, 2009. 204 p.
33. Gupta R.A., Chow M.-Y. Networked Control System: Overview and Research Trends // *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2010. V. 57(7). P. 2527–2535.
34. Chiasson J., Loiseau J.J., editors. Applications of Time Delay Systems // *Lecture Notes in Control and Information Sciences*: Springer. 2007. V. 352. 355 p.
35. Fridman E. Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control // Birkhuser, Basel, 2014. 378 p.
36. Richard J.-P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems // *Automatica*. 2003. V. 39. P. 1667–1694.
37. S. Bhat, D. Bernstein. Finite-time stability of continuous autonomous systems // *SIAM Journal of Control and Optimization*, vol. 38(3), pp. 751–766, 2000.
38. A. Polyakov, D. Efimov, W. Perruquetti. Finite-time and fixed-time stabilization: Implicit Lyapunov function approach // *Automatica*, vol. 51, 2015, pp. 332–340.
39. A. Polyakov, D. Efimov, W. Perruquetti. Finite-time and fixed-time stabilization: Implicit Lyapunov function approach // *Automatica*, vol. 51, pp. 332–340, 2015.
40. A. Polyakov, D. Efimov, W. Perruquetti. Robust Stabilization of MIMO Systems in Finite/Fixed Time // *Int. J. Robust. Nonlinear Control*, DOI:10.1002/rnc.3297, 2016.
41. Efimov D., Polyakov A., Perruquetti W., Richard J.-P. Weighted homogeneity for time-delay systems: Finite-time and independent of delay stability // *IEEE Trans. Automatic Control*. 2016. V. 61(1). P. 210–215.
42. Gu K., Kharitonov K.L., Chen J. Stability of Time-Delay Systems // *Control Engineering*: Birkhauser. 2003. 353 p.
43. Bacciotti A., Rosier L. Lyapunov Functions and Stability in Control Theory. Springer, 2005. 237 p.
44. Efimov D., Perruquetti W. Homogeneity for time-delay systems // *In Proc. IFAC WC*. 2011. P. 1–6.
45. M. Livne, A. Levant. Accuracy of disturbed homogeneous sliding modes // the 13th Scientific Workshop VSS13, 2014.
46. A. Levant. Homogeneity of differential inclusions: Application to sliding modes // *European Control Conference (ECC 2015)*, pp. 2458–2463, 2015.

47. K. Zimenko, D. Efimov, A. Polyakov, W. Perruquetti. A note on delay robustness for homogeneous systems with negative degree // *Automatica*, vol. 79, pp. 178–184, 2017.
48. Pyrkin, A., Isidori, A. Adaptive output regulation of invertible MIMO systems // *IFAC-PapersOnLine*, 2017, 50 (1), pp. 5498-5503.
49. Borisov, O.I., Gromov, V.S., Vedyakov, A.A., Pyrkin, A.A., Bobtsov, A.A., Aranovskiy, S.V. Adaptive Tracking of a Multi-Sinusoidal Signal with DREM-Based Parameters Estimation // *IFAC-PapersOnLine*, 2017, 50 (1), pp. 4282-4287.
50. Борисов О.И., Ведяков А.А., Громов В.С., Шаветов С.В. Робототехническая следящая система с быстрой адаптацией к неизвестной траектории движения // *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*. 2017. Т. 60. № 9. С. 834-841.
51. Gromov, V.S., Borisov, O.I., Pyrkin, A.A., Bobtsov, A.A., Kolyubin, S.A., Aranovskiy, S.V. The DREM Approach for Chaotic Oscillators Parameter Estimation with Improved Performance // *IFAC-PapersOnLine*, 2017, 50 (1), pp. 7027-7031.
52. Бобцов А.А., Борисов О.И., Громов В.С., Пыркин А.А. Быстрое оценивание параметров генератора хаотического сигнала // *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*. 2017. Т. 60. № 6. С. 487-494.
53. Gromov, V.S., Vedyakov, A.A., Vediakova, A.O., Bobtsov, A.A., Pyrkin, A.A. First-order frequency estimator for a pure sinusoidal signal // *2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2017, Article № 7984087, pp. 7-11.
54. Borisov, O.I., Gromov, V.S., Pyrkin, A.A., Petranovsky, I.V., Klyunin, A.O., Bobtsov, A.A. Arc Approximation Algorithm of Spatial Movements for Industrial Robots // *(2017) IECON Proceedings (Industrial Electronics Conference)*.
55. Pyrkin, A., Isidori, A. Output Regulation for Robustly Minimum-Phase Multivariable Nonlinear Systems // *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 2017, In print.
56. Javier Cubas, Santiago Pindado, Assal Farrahi. New method for analytical photovoltaic parameter extraction // *Renewable Energy Research and Applications (ICRERA)*. – 2013. – P. 873-877.
57. Nehaoua N., Chergui Y., Mekki D. E. A New Model for Extracting the Physical Parameters from I-V Curves of Organic and Inorganic Solar Cells // *Solar Cells - Silicon Wafer-Based Technologies*. – 2011. – P. 53-66.
58. Po-Hsu Huang, Weidong Xiao, Jimmy C.-H. Peng, James L. Kirtley Comprehensive Parameterization of Solar Cell: Improved Accuracy with Simulation Efficiency // *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. – 2015. – V. 63. – № 3. – P. 1549-1560.

59. Rituraj Tamrakar, Archana Gupta A Review: extraction of solar cell modelling parameters // International journal of innovative research in electrical, electronics, instrumentation and control engineering. – 2015. – V. 3. – № 1. – P. 55-60.
60. Sera D., Teodorescu R., Rodriguez P. PV panel model based on datasheet values // IEEE ISIE. – 2007 – P. 2392-2396.
61. Villalva M. G., Gazoli J. R., Filho E. R. Comprehensive Approach to Modeling and Simulation of Photovoltaic Arrays // IEEE Trans. Power Electron. – 2009. – V. 24. – № 5. – P. 1198-1208.
62. Pallavee B., Nema R.K. Maximum power point tracking control techniques: State-of-the-art in photovoltaic applications // Renewable and Sustainable Energy Reviews 23. – 2013. – P. 224-241.
63. Pulkit Singh, Palwalia D.K., Amit Gupta, Kumar P. Comparison of photovoltaic array maximum power point tracking techniques // NCREE. – April 2015. – Vol. 2. – № 1. – P. 401-404.
64. Pyrkin A., Mancilla-David F., Ortega R., Bobtsov A., Aranovskiy S. Identification of Photovoltaic Arrays' Maximum Power Extraction Point via Dynamic Regressor Extension and Mixing // Int. J. Adapt. Control Signal Process. – 2016. – P. 1-12.
65. Saravana Selvan. D Modeling and Simulation of Incremental Conductance MPPT Algorithm for Photovoltaic Applications // Int. J. of Scientific Engineering and Technology. – 1 July 2013. Vol. 2. – № 7. – P. 681-685.
66. Williams K. F., Shanifa B., Johnson M. MATLAB/Simulink PV Module Model of P&O And DC Link CDC MPPT Algorithms with Labview Real Time Monitoring And Control Over P&O Technique // Int. J. of Advanced Research in Electrical, Electronics and Instrumentation Engineering. – December 2014. – Vol. 3. – № 5. – P. 92-101.
67. Pallavee Bhatnagar, Nema R.K. Maximum power point tracking control techniques: State-of-the-art in photovoltaic applications // Renewable and Sustainable Energy Reviews. – 2013. – V 23. – P. 224–241.
68. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. Performance enhancement of parameter estimators via dynamic regressor extension and mixing // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2016. – V. PP. – № 99. – P. 1–1.
69. Ле Ван Туан Определение параметров солнечного элемента итеративным методом // Сборник трудов V Всероссийского конгресса молодых ученых. – СПб.: Университет ИТМО, 2016. – Т. 1. – С. 292–296.
70. Pyrkin A., Mancilla F., Ortega R., Bobtsov A., Aranovskiy S. Identification of the Current–Voltage Characteristic of Photovoltaic Arrays // 12th IFAC Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing ALCOSP. – 2016. – V. 49. – № 13. – P. 223–228.
- Tian H., Mancilla-David F., Ellis K., Muljadi E., Jenkins P. A cell-to-module-to-array detailed model for photovoltaic panels // Solar Energy. – 2012. – V. 86. – № 9. – P. 2695–2706.