Лабораторная работа №1
Исследование фазовых портретов линейных систем

Теория нелинейных и оптимальных систем управления

Арановский С.В., Фуртат И.Б.

1 Общие сведения

В работе рассматривается задача построения и анализа фазовых траекторий линейных систем второго порядка.

Автономная линейная система второго порядка описывается дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0 \tag{1}$$

с начальными условиями $y(0)$ и $\dot{y}(0)$. При выборе переменных состояния как $x_1(t) = y(t)$ и $x_2(t) = \dot{y}(t)$ система (1) может быть представлена в форме вход-состояние-выход:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} y(0) & \dot{y}(0) \end{bmatrix}^\top$$

В то время, как нелинейные системы могут иметь множество положений равновесия, для линейных систем свойственно наличие единственного положения равновесия $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Исключением является наличие у матрицы A нулевых собственных чисел, в этом случае система имеет множество положений равновесия, соответствующих собственным векторам, ассоциированным с нулевым собственным числом.

Характеристическое уравнение системы (1) имеет вид

$$p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

и корни $p_{1,2}$. В зависимости от корней уравнения, решения системы (1) могут принимать следующие формы:

- Оба корня действительны и различны, $p_1 \neq p_2$. Решение системы (1) принимает вид
$$x_1(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}.$$

- Оба корня действительны и совпадают, $p_1 = p_2$. Решение системы (1) принимает вид
$$x_1(t) = C_1 e^{p_1 t}\left(1 + C_2 t\right).$$

- Комплексно-сопряженные корни, $p_{1,2} = \alpha \pm \beta \mathrm{i}$

$$x_1(t) = C_1 e^{\alpha t} \sin(\beta t + \phi).$$

Коэффициенты C_1, C_2 могут быть определены из начальных условий. Тогда по полученным решениям дифференциального уравнения может быть вычислен набор из N значений $\boldsymbol{x}_i = \begin{bmatrix} x_1(t_i) & x_2(t_i) \end{bmatrix}$ в моменты времени t_i, $i = 1, \ldots, N$. Множество таких точек, нанесенное на фазовую плоскость $(y, \dot{y})$, образует фазовую траекторию системы для заданных начальных условий, а множество фазовых траекторий с различными начальными условиями образуют фазовый портрет.

В зависимости от корней характеристического уравнения, фазовые траектории системы в окрестности точки равновесия могут принимать различную форму, обусловленную типом точки равновесия. Выделяют следующие типы точек равновесия:

- Узел - оба корня действительные и совпадают по знаку. Может быть устойчивым или неустойчивым.
- Седло - оба корня действительные и различаются по знаку.
- Фокус - комплексно-сопряженные корни с ненулевой действительной частью. Может быть устойчивым или неустойчивым.
- Центр - чисто мнимые корни.

2 Задание

Для заданной системы требуется

1. Записать модель системы в форме (1) или (2). Определить корни характеристического уравнения.
2. Записать решение системы как функцию времени, $x_1(t)$ и $x_2(t)$, определить параметры решений исходя из заданных начальных условий.
3. Для набора из не менее 5 значений времени t_i вычислить значения $x_1(t_i)$ и $x_2(t_i)$.
4. С помощью программ численного моделирования построить фазовую траекторию системы. Нанести на полученную траекторию полученные в пункте 3 значения.
5. Указать тип точки равновесия полученной фазовой траектории.

3 Вопросы для самостоятельной подготовки

Основные:

1. Что такое точка равновесия системы? Как определить точку равновесия по заданной модели в пространстве состояний?
2. Что такое фазовая траектория и фазовый портрет?
3. Сколько есть типов точек равновесия? Назовите.

4. Как определить направление движения фазовой траектории?

5. Как изменится тип точки равновесия при изменении начальных условий?

   Дополнительные:

6. Сколько положений равновесия может иметь линейная система?

7. Как выглядит фазовая траектория линйеной системы второго порядка с двумя нулевыми корнями характеристического уравнения? С одним нулевым корнем?

8. Как изменяется тип положений равновесия при малых возмущениях параметров системы?

Список литературы

[1] Халил Х.К. Нелинейные системы. М. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009.

[2] Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы. — Питер СПб.[и др.], 2006.

[3] Мирошник И.В. Нелинейные системы. Анализ и управление. — СПб, 2002.

[4] Воронов А.А. Теория автоматического управления. Часть 2. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления. — Москва, 1986.

[5] Ким Д.П. Теория автоматического управления. Том 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. — М.: Физматлит, 2003.