

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Санкт-Петербургский Национальный исследовательский университет  
информационных технологий, механики и оптики**



**УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

**Д.Н. Герасимов, В.О. Никифоров**

**АДАПТИВНОЕ И РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ  
ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ  
СИСТЕМАМИ  
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ С ЗАДАЧАМИ**

**Санкт-Петербург**

**2015**

В пособии приводятся методические рекомендации к выполнению лабораторных работ по курсу “Адаптивное и робастное управление”. Лабораторные работы направлены на изучение принципов построения адаптивных наблюдателей состояния линейных параметрически неопределенных объектов и методов синтеза адаптивных следящих систем управления линейными объектами.

Каждая работа содержит основные теоретические сведения, отражающие суть изучаемой темы, последовательность расчетных и модельных экспериментов и перечень вопросов и задач, необходимых для закрепления материала.

Пособие служит для выполнения лабораторного практикума при подготовке инженеров по специальности 220201.65 «Управление и информатика в технических системах», бакалавров и магистров по направлению: 220200.62 «Автоматизация и управление».

## Содержание

Введение.....	4
<b>Основные понятия и определения, используемые в работе.....</b>	<b>5</b>
<b>Список основных обозначений.....</b>	<b>5</b>
<b>Лабораторная работа №1: Принцип построения систем адаптивного управления невозмущенными объектами.....</b>	<b>6</b>
<b>Лабораторная работа №2: Принцип построения систем адаптивного и робастного управления возмущенными объектами .....</b>	<b>13</b>
<b>Лабораторная работа № 3. Адаптивное управление линейным многомерным объектом по состоянию. ....</b>	<b>21</b>
<b>Лабораторная работа № 4. Робастное управление линейным многомерным объектом по состоянию. ....</b>	<b>32</b>
<b>Лабораторная работа №5: Параметризация модели объекта управления (способ №1).....</b>	<b>39</b>
<b>Лабораторная работа №6: Синтез адаптивного наблюдателя состояния линейного объекта.....</b>	<b>48</b>
<b>Лабораторная работа №7: Параметризация модели объекта управления (способ 2). Адаптивное управление объектом по выходу. ....</b>	<b>54</b>
<b>Лабораторная работа №8: Адаптивное управление линейным объектом по выходу на основе алгоритма с расширенной ошибкой.....</b>	<b>62</b>
<b>Лабораторная работа №9. Синтез наблюдателя состояния модели генератора внешнего воздействия.....</b>	<b>70</b>
<b>Лабораторная работа № 10. Адаптивная компенсация внешнего возмущения.....</b>	<b>76</b>
<b>Приложение А. Образец титульного листа.....</b>	<b>85</b>
<b>Приложение Б. Свойство строгой положительной вещественности.....</b>	<b>86</b>
<b>Из истории кафедры систем управления и информатики</b>	<b>Ошибка! Закладка не опр</b>

## Введение

Целью работ является освоение методов синтеза систем адаптивного и робастного управления с использованием аппарата функций Ляпунова. В ходе выполнения работ предусматривается изучение базовых алгоритмов адаптивного и робастного управления по состоянию скалярными и многомерными объектами, а также принципов параметризации моделей объектов, на основе которых синтезируются адаптивные наблюдатели состояния объекта и адаптивные законы управления объектами по выходу. В отдельные работы вынесены алгоритмы построения наблюдателя и адаптивного компенсатора возмущения.

Предполагается, что к лабораторным работам приступают студенты, освоившие базовые курсы линейных и нелинейных систем.

Для выполнения лабораторных работ необходимо предварительно изучить теоретический материал, относящийся к работе и освоить пакет программ MatLab версии не ниже 7.01 со средой моделирования Simulink.

Выполнение каждой работы включает проведение компьютерного моделирования, создание в печатной форме отчета (пояснительной записки) и завершается защитой. Защита работы предполагает индивидуальную дискуссию преподавателя со студентом, в ходе которой выявляется качество приобретенных студентом знаний и навыков.

Отчет должен содержать:

1. Титульный лист, выполненный согласно образцу, представленному в приложении А;
2. Цель работы;
3. Теоретическую часть: используемые формулы, диаграммы, схемы и т.п. с пояснениями;
4. Экспериментальную часть, в которой приводятся расчеты и результаты моделирования в виде схем и графиков.
5. Выводы по работе.

Отчет необходимо оформлять согласно правилам ГОСТ 2.105-95 ЕСКД.

## Основные понятия и определения, используемые в работе

*Адаптивная (самонастраивающаяся) система* — это система управления, обеспечивающая компенсацию неопределенностей объекта за счет автоматической настройки регулятора в ходе рабочего функционирования.

*Неопределенный объект* — объект, математическая модель которого содержит неизвестные константы или функции времени, существенно влияющие на поведение этого объекта.

Формально неопределенности объекта можно разделить на четыре типа:

— параметрические неопределенности, подразумевающие наличие в модели неизвестных постоянных параметров;

— сигнальные неопределенности, представляющие собой неизвестные функции времени (например, неизвестные переменные во времени параметры);

— функциональные неопределенности, представляющие собой неизвестные функции переменных состояния объекта;

— структурные неопределенности, предполагающие наличие в модели неизвестной структуры (например неучтенной динамики датчиков или исполнительных механизмов).

*Робастная (грубая) система* — это система управления неопределенным объектом, обеспечивающая заданное качество функционирования без компенсации неопределенностей. Для робастной системы характерно малое отклонение переменной управления и выходной переменной объекта при малых вариациях параметров объекта, изменения структуры или действия возмущающих воздействий.

## Список основных обозначений

$R^n$  — линейное пространство  $n$ -мерных вещественных векторов;

$H(s)$  — передаточная функция (символьная форма записи дифференциального уравнения);

$s$  — оператор дифференцирования;

$y(t) = H(s)[f(t)]$  — преобразование оператором  $H(s)$  сигнала  $f(t)$ ;

$\text{grad} \{f(x)\}$  — градиент функции;

$\|x\|$  — евклидова норма вектора;

$\in$  — принадлежит.

## Лабораторная работа №1: Принцип построения систем адаптивного управления возмущенными объектами

Цель работы: освоение принципов построения систем адаптивного управления на примере задачи слежения выхода скалярного объекта за эталонным сигналом.

**Методические рекомендации.** До начала работы студенты должны ознакомиться с анализом устойчивости нелинейных систем методом функций Ляпунова. Лабораторная работа рассчитана на 2 часа.

**Теоретические сведения.** Рассмотрим решение задачи адаптивного слежения, начиная с постановки и заканчивая анализом свойств замкнутой системы.

*Постановка задачи.* Дан объект, представленный моделью вида:

$$\dot{x} = \theta x + u, \quad (1.1)$$

где  $x$  — переменная состояния объекта,  $u$  — сигнал управления,  $\theta$  — неизвестный постоянный параметр.

Цель управления заключается в компенсации неопределенности  $\theta$  и обеспечении следующего целевого равенства:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_m(t) - x(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0, \quad (1.2)$$

где  $\varepsilon = x_m - x$  — ошибка управления,  $x_m$  — эталонный сигнал, являющийся выходом динамической модели вида (т.н. *эталонной модели*)

$$\dot{x}_m = -\lambda x_m + \lambda g \quad (1.3)$$

где  $g$  — сигнал задания,  $\lambda > 0$  — параметр, задающий время переходного процесса. Эталонная модель (1.3) определяет желаемое качество слежения объекта (1.1) за сигналом задания  $g$ .

*Решение задачи.* Предположим сначала, что параметр  $\theta$  известен. Тогда, вычисляя производную ошибки слежения  $\varepsilon$  по времени с учетом (1.1) и (1.3), получим:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x}_m - \dot{x} = -\lambda x_m + \lambda g - \theta x - u. \quad (1.4)$$

Ошибка слежения будет экспоненциального стремления к нулю, если, например, будет выполняться равенство:

$$\dot{\varepsilon} = -\lambda \varepsilon.$$

Приравнивая правые части последнего уравнения и модели (1.4), находим искомый закон управления:

$$\begin{aligned} -\lambda x_m + \lambda g - \theta x - u &= -\lambda \varepsilon = -\lambda x_m + \lambda x, \\ u &= -\theta x - \lambda x + \lambda g. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Таким образом, в случае известного значения параметра  $\theta$  закон управления (1.5) обеспечивает для объекта (1.1) выполнение целевого равенства (1.2).

Пусть теперь, как в исходной постановке задачи, параметр  $\theta$  неизвестен. Тогда для реализуемости закона управления (1.5) заменим величину  $\theta$  на ее оценку  $\hat{\theta}$ :

$$u = -\hat{\theta}x - \lambda x + \lambda g. \quad (1.6)$$

Таким образом, задача синтеза регулятора сводится к задаче нахождения функции  $\hat{\theta}(t)$ , которая обеспечит устойчивость замкнутой системы и цель управления (1.2). Для нахождения  $\hat{\theta}(t)$  проведем ряд алгебраических преобразований и воспользуемся методом функций Ляпунова. Подставим последнее выражение в модель (1.1). Получим:

$$\dot{x} = \theta x - \hat{\theta}x - \lambda x + \lambda g = \tilde{\theta}x - \lambda x + \lambda g,$$

где  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  — параметрическая ошибка. Сформируем модель ошибки управления:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x}_m - \dot{x} = -\lambda x_m + \lambda g - \tilde{\theta}x + \lambda x - \lambda g = -\lambda \varepsilon - \tilde{\theta}x$$

или

$$\dot{\varepsilon} = -\lambda \varepsilon - \tilde{\theta}x. \quad (1.7)$$

Выберем функцию Ляпунова в форме

$$V = \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2, \quad (1.8)$$

где  $\gamma > 0$  — параметр. Вычислим производную по времени функции  $V$  с учетом (1.7):

$$\dot{V} = \frac{1}{2} 2\varepsilon\dot{\varepsilon} + \frac{1}{2\gamma} 2\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} = \varepsilon(-\lambda\varepsilon - \tilde{\theta}x) - \frac{1}{\gamma} \tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} = -\lambda\varepsilon^2 - \tilde{\theta}x\varepsilon - \tilde{\theta}\frac{1}{\gamma}\dot{\tilde{\theta}}.$$

В соответствии с методом функций Ляпунова выберем алгоритм формирования оценки  $\hat{\theta}(t)$  (т.е. правило определения производной  $\dot{\hat{\theta}}(t)$ ) из условия отрицательности производной функции Ляпунова. Нетрудно видеть, что при выборе

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma x \varepsilon \quad (1.9)$$

производная функции Ляпунова будет отрицательной:

$$\dot{V} = -\lambda\varepsilon^2 < 0 \quad \forall \varepsilon \neq 0.$$

Алгоритм (1.9), формирующий оценку  $\hat{\theta}$ , называется алгоритмом адаптации, а параметр  $\gamma$  — коэффициентом адаптации.

Таким образом, алгоритм адаптивного управления, обеспечивающий цель (1.2), представляется настраиваемым регулятором (1.6) и алгоритмом адаптации (1.9). Алгоритм управления наделяет замкнутую систему следующими свойствами:

1. Устойчивость замкнутой системы и ограниченность всех сигналов;
2. Асимптотическое стремление ошибки слежения  $\varepsilon$  к нулю;
3. Асимптотическое стремление  $\hat{\theta}$  к  $\theta$  (при ненулевом  $x$ ), что следует из свойства 2 и выражения (1.7);
4. Увеличение скорости сходимости параметрической ошибки  $\tilde{\theta}$  к нулю при увеличении коэффициента  $\gamma$  до некоторого оптимального значения. Дальнейшее повышение  $\gamma$  приведет к снижению скорости сходимости ошибки и появлению колебаний в системе.

### Порядок выполнения работы

1. На основе заданных в таблице 1.1 значений параметров объекта (1.1) и эталонной модели (1.3) построить неадаптивную систему управления на базе регулятора (1.5). Провести моделирование системы в условиях скачкообразного трехкратного увеличения параметра  $\theta$  и построить два графика. На одном вывести  $x$  и  $x_m$ , на другом —  $u$ .

2. Синтезировать алгоритм адаптации (1.9) и подключить его к настраиваемому регулятору (1.6). Повторить эксперимент для адаптивной системы управления, замкнутой регулятором (1.6) с алгоритмом адаптации (1.9). Коэффициент адаптации  $\gamma$  выбрать экспериментально. Дополнительно построить график параметрической ошибки  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ .

3. Провести моделирование адаптивной системы управления при разных коэффициентах  $\gamma$ .

4. Сделать выводы на основе сравнения результатов моделирования.

Таблица 1.1. Варианты заданий

Вар.	Параметр объекта $\theta$	Параметр эталонной модели $\lambda$	Сигнал задания $g(t)$	Вар.	Параметр объекта $\theta$	Параметр эталонной модели $\lambda$	Сигнал задания $g(t)$
1	6	1	$\sin 2t$	16	7	1	$\cos t + 3$
2	2	2	$\cos 4t$	17	8	2	4
3	4	3	$\text{sign}(\sin 3t) + 2$	18	9	3	$\cos 3t + 2$
4	1	4	2	19	1	4	$3 \sin t$
5	5	5	$2 \sin 5t$	20	2	5	$0.5 \cos 8t + 1$
6	8	6	1	21	3	6	$\sin 2t + 6$
7	0	7	$7 \sin t$	22	4	7	9
8	9	8	$5 \sin 0.5t + 6$	23	5	8	$\cos t + 4$
9	10	9	$\text{sign}(\cos t) + 3$	24	6	9	$9 \sin 0.5t + 12$
10	15	1	$\text{sign}(\sin 2t) + 5$	25	7	10	$\sin 8t + 2$
11	0	2	$\sin 5t + 0.5 \cos 0.2t + 2$	26	8	1	10
12	8	3	$2 \text{sign}(\sin 0.4t) + 3$	27	0	2	$\cos 2t + 2$
13	6	4	$3 \sin 0.5t + 3$	28	1	3	$\text{sign}(\cos t) + 8$
14	7	5	$2 \sin 0.2t + \sin 0.1t + 8$	29	2	4	$3 \text{sign}(\sin t) + 4$
15	11	6	$4 \text{sign}(\cos 2t) + 5$	30	3	5	$3 \sin t + 10$

## Задачи и вопросы

1. Решить задачу адаптивного слежения для объекта вида

$$\dot{x} = \theta_1 x^2 + \theta_2 u,$$

где  $\theta_1, \theta_2$  — неизвестные параметры ( $\theta_2 > 0$ ). Цель управления задается равенством (1.2).

2. Решить задачу адаптивного слежения для объекта вида

$$\dot{x} = -x + \theta_1 u + \theta_2,$$

где  $\theta_1, \theta_2$  — неизвестные параметры ( $\theta_1 > 0$ ). Цель управления задается равенством (1.2).

3. Решить задачу адаптивного слежения для объекта вида

$$\dot{x} = \theta x^3 + u,$$

где  $\theta$  — неизвестный параметр. Цель управления задается равенством (1.2).

4. Решить задачу адаптивного слежения для объекта вида

$$\dot{x} = \theta(t)x + u,$$

где  $\theta(\omega) = c_0 + c_1\omega + c_2\omega^2$ ,  $c_0, c_1, c_2$  — неизвестные коэффициенты,  $\omega$  — известная функция времени. Цель управления задается равенством (1.2).

5. Решить задачу адаптивного слежения для объекта вида

$$\dot{x} = \theta_1 x + u + \theta_2 \sin \omega t,$$

где  $\theta_1, \theta_2$  — неизвестные параметры,  $\omega$  — известная частота колебания.

Цель управления задается равенством (1.2).

6. Решить задачу адаптивного слежения для объекта вида

$$\dot{x} = \theta_1 x + u + \theta_2 x^2,$$

где  $\theta_1, \theta_2$  — неизвестные параметры. Цель управления задается равенством (1.2).

7. Решить задачу адаптивного слежения для объекта, модель которого представлена апериодическим звеном

$$y = \frac{K}{Ts + 1}[u],$$

где  $K, T$  — неизвестные параметры ( $K > 0$ ). Цель управления задается равенством вида

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_m(t) - y(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0,$$

где  $y_m$  — эталонный сигнал, генерируемый устойчивой динамической моделью

$$\dot{y}_m = -\lambda y_m + \lambda g,$$

$g$  — сигнал задания.

8. Найти алгоритм адаптации для системы управления, представленной в работе, с помощью функции Ляпунова вида

$$V(\varepsilon, \tilde{\theta}) = |\varepsilon| + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^2.$$

9. Сформулировать критерии асимптотической и экспоненциальной устойчивости, используя функции Ляпунова.

10. Обязательно ли для решения поставленной в лабораторной работе задачи обеспечивать сходимость параметрических ошибок к нулю?

### *Задачи и вопросы повышенной сложности*

1. Система управления включает объект  $\dot{x} = \theta x + u$ , настраиваемый регулятор  $u = -\hat{\theta}x - \lambda x + \lambda g$ , в котором  $\lambda$  — положительный параметр эталонной модели  $\dot{x}_m = -\lambda x_m + \lambda g$ ,  $g$  — сигнал задания. Оценка  $\hat{\theta}$  генерируется следующим алгоритмом адаптации:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma x \text{sign}(\varepsilon),$$

где  $\gamma$  — коэффициент адаптации,  $\varepsilon = x_m - x$ .

Доказать асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

2. Доказать асимптотическую устойчивость замкнутой системы, приведенной в предыдущей задаче, если алгоритм адаптации определен как

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma \frac{1}{s + \lambda} [x] \hat{\varepsilon},$$

где  $\hat{\varepsilon} = \varepsilon - \frac{1}{s + \lambda} [\hat{\theta} x] + \hat{\theta} \frac{1}{s + \lambda} [x]$ .

3. Пусть в замкнутой устойчивой системе, представленной моделью сигнальной ошибки

$$\dot{\varepsilon} = -\lambda \varepsilon - \tilde{\theta} x$$

и моделью параметрической ошибки

$$\dot{\tilde{\theta}} = \gamma x \varepsilon,$$

$x = c = const$ . Найти в символьном виде диапазон значений коэффициента  $\gamma$ , при которых в системе возникают колебания.

4. Решить задачу адаптивного слежения для объекта вида

$$\dot{x} = \theta_1 x + u,$$

$$y = \theta_2 x + u,$$

где  $\theta_1, \theta_2$  — неизвестные параметры ( $\theta_1 < 0$ ). Цель управления заключается в обеспечении равенства

$$y = g,$$

где  $g$  — сигнал задания.

5. Для скалярных систем

$$\dot{x} = -x^3, \quad \dot{x} = -3x$$

определить вид устойчивости и найти предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \int_0^t |x(\tau)| d\tau \right).$$

Объяснить полученный результат.

## Лабораторная работа №2: Принцип построения систем адаптивного и робастного управления возмущенными объектами

Цель работы: освоение принципов построения систем адаптивного и робастного управления на примере задачи слежения выхода скалярного объекта за эталонным сигналом.

**Методические рекомендации.** До начала работы студенты должны ознакомиться с анализом устойчивости нелинейных систем методом функций Ляпунова. Лабораторная работа рассчитана на 2 часа.

**Теоретические сведения.** Рассмотрим пример задачи слежения выхода параметрически неопределенного возмущенного объекта за эталонным сигналом. Приведем несколько решений поставленной задачи. При этом воспользуемся результатами, приведенными в лабораторной работе №1.

*Постановка задачи.* Дан объект, представленный моделью вида

$$\dot{x} = \theta x + u + \delta, \quad (2.1)$$

где  $\delta$  — ограниченное внешнее возмущение, удовлетворяющее неравенству  $|\delta(t)| \leq \bar{\delta}$ . Как и ранее,  $x$  — переменная состояния объекта,  $u$  — сигнал управления,  $\theta$  — неизвестный постоянный параметр.

Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего следующее целевое неравенство:

$$|x_m(t) - x(t)| \leq \Delta, \quad \forall t \geq T, \quad (2.2)$$

где  $\Delta$ ,  $T$  — точность работы системы управления и время ее настройки соответственно,  $x_m(t)$  — эталонный сигнал, генерируемый моделью (1.2). Предполагается, что параметры  $\Delta$  и  $T$  можно изменять в соответствии с требованиями, предъявляемыми к системе.

Рассмотрим возможность использования в качестве решения сформулированной задачи регулятор (1.6) и (1.9). Построим модель ошибки  $\varepsilon = x_m - x$ :

$$\dot{\varepsilon} = -\lambda \varepsilon - \tilde{\theta} x - \delta. \quad (2.3)$$

Далее проведем анализ устойчивости замкнутой системы с помощью функции Ляпунова (1.8), учитывая последнее выражение и алгоритм адаптации (1.9):

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{1}{2} 2\varepsilon\dot{\varepsilon} + \frac{1}{2\gamma} 2\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} = \varepsilon(-\lambda\varepsilon - \tilde{\theta}x - \delta) - \frac{1}{\gamma} \tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} = -\lambda\varepsilon^2 - \tilde{\theta}x\varepsilon - \delta\varepsilon + \tilde{\theta}\frac{1}{\gamma}\gamma x\varepsilon = \\
&= -\lambda\varepsilon^2 - \delta\varepsilon = -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \delta\varepsilon \pm \frac{1}{2\lambda}\delta^2 = -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\varepsilon + \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\delta\right)^2 + \frac{1}{2\lambda}\delta^2 \leq \\
&\leq -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2\lambda}\delta^2 \leq -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2\lambda}\bar{\delta}^2.
\end{aligned}$$

Из полученного неравенства следует асимптотическое стремление ошибки  $\varepsilon$  к некоторому ограниченному множеству, определяемому верхней границей сигнала возмущения  $\bar{\delta}$  и параметром  $\lambda$ . При этом точность системы управления может быть увеличена путем увеличения  $\lambda$ . Однако из приведенного анализа не следует ограниченности сигнала  $\hat{\theta}$ . Если продолжить анализ и рассмотреть частный случай, когда переменная  $x$  и ошибка  $\Delta$  стабилизируются на ненулевых значениях, то

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma x_{ycm} \varepsilon_{ycm} = C = const,$$

откуда следует, что

$$\hat{\theta} = Ct,$$

и неограниченный рост оценки  $\hat{\theta}$  с течением времени. Данное явление получило название неограниченного параметрического дрейфа.

Таким образом, представленный регулятор (1.6) и (1.9) в общем случае не обеспечивает ограниченность всех сигналов и не является робастным по отношению к внешнему возмущению.

Предложенный подход не является практически применимым и требует модификации алгоритма управления. Рассмотрим два возможных решения.

*Решение № 1.* Представим модификацию алгоритма (1.9) в форме

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma x\varepsilon. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (1.6), получаем следующий алгоритм управления:

$$u = \gamma x^2 \varepsilon - \lambda x + \lambda g. \quad (2.5)$$

Данный алгоритм является статическим, так как не содержит интегральной обратной связи, и нелинейным, так как содержит член  $\gamma x^2 \varepsilon$ .

Покажем, что предложенный алгоритм управления (2.5) гарантирует ограниченность сигналов  $\varepsilon$  и  $\hat{\theta}$ . Для этого выберем функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \quad (2.6)$$

и возьмем ее производную. Учитывая (2.5) и модель ошибки (2.3), проведем алгебраические преобразования:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} 2\varepsilon\dot{\varepsilon} = -\lambda \varepsilon^2 - \tilde{\theta} x\varepsilon - \delta\varepsilon = -\frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 - \frac{\lambda}{4} \varepsilon^2 - (\theta - \hat{\theta})x\varepsilon - \delta\varepsilon = \\ &= -\frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 - \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 - \delta\varepsilon \pm \frac{1}{\lambda} \delta^2 - (\theta + \gamma x\varepsilon)x\varepsilon = \\ &= -\frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 - \left( \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \varepsilon + \sqrt{\frac{1}{2\lambda}} \delta \right)^2 + \frac{1}{2\lambda} \delta^2 \pm \frac{\theta^2}{4\gamma} - \theta x\varepsilon - \gamma x^2 \varepsilon^2 = \\ &= -\frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 - \left( \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \varepsilon + \sqrt{\frac{1}{2\lambda}} \delta \right)^2 + \frac{1}{2\lambda} \delta^2 - \left( \frac{\theta}{2\sqrt{\gamma}} + \sqrt{\gamma} x\varepsilon \right)^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma} \leq \\ &\leq -\frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{2\lambda} \delta^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma} = -\lambda V + \frac{1}{2\lambda} \delta^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma} = -\lambda V + \bar{\Delta}, \end{aligned}$$

где  $\bar{\Delta} = \delta^2 / 2\lambda + \theta^2 / 4\gamma$  — постоянная величина. Решая полученное дифференциальное неравенство, получаем:

$$V(\varepsilon(t)) \leq e^{-\lambda t} V(0) + \frac{\bar{\Delta}}{\lambda} - \frac{\bar{\Delta}}{\lambda} e^{-\lambda t},$$

откуда с учетом (2.6) следует, что

$$\frac{1}{2} \varepsilon^2 \leq e^{-\lambda t} V(0) + \frac{\bar{\Delta}}{\lambda} - \frac{\bar{\Delta}}{\lambda} e^{-\lambda t}$$

или

$$\varepsilon(t) \leq \sqrt{2 \left( e^{-\lambda t} V(0) + \frac{\bar{\Delta}}{\lambda} - \frac{\bar{\Delta}}{\lambda} e^{-\lambda t} \right)}. \quad (2.7)$$

Из последнего неравенства следует экспоненциальная сходимость ошибки управления  $\varepsilon$  к ограниченному множеству с границей  $\Delta = \sqrt{2\bar{\Delta}/\lambda}$ . При этом величину  $\Delta$  можно уменьшить путем увеличения коэффициентов  $\lambda$  и  $\gamma$ . Как следствие, величина  $\hat{\theta}$  становится ограниченной.

Таким образом, алгоритм управления (2.5) обеспечивает устойчивость в замкнутой системе и является робастным по отношению к внешнему возмущению. В то же время этот алгоритм имеет следующие недостатки:

— даже при отсутствии возмущения установившаяся ошибка  $\varepsilon(t)$  отлична от нуля, что видно из неравенства (2.7);

— управление пропорционально величине  $x^2$ . Следовательно, при росте  $x$  амплитуда управления возрастает квадратично, в связи с чем практическая применимость такого закона (1.6) имеет существенные ограничения.

Рассмотрим решение, лишенное недостатков алгоритмов (1.6), (1.9) и (1.6), (2.4) за счет наделения нового алгоритма управления адаптивными и робастными свойствами.

*Решение № 2.* Рассмотрим совместно с настраиваемым регулятором (1.6) алгоритм адаптации, параметрический дрейф в котором ограничивается обратной связью по величине настраиваемого параметра:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\sigma\hat{\theta} - \gamma x \varepsilon, \quad (2.8)$$

где  $\sigma$  — постоянная положительная величина.

Проведем анализ устойчивости замкнутой системы, представленной объектом (2.1), регулятором (1.6) и алгоритмом адаптации (2.8) с помощью функции Ляпунова (1.8). Возьмем производную от функции и проведем ряд преобразований:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} 2\varepsilon\dot{\varepsilon} + \frac{1}{2\gamma} 2\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} = \varepsilon(-\lambda\varepsilon - \tilde{\theta}x - \delta) - \frac{1}{\gamma} \tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} = -\lambda\varepsilon^2 - \tilde{\theta}x\varepsilon - \delta\varepsilon - \frac{\tilde{\theta}}{\gamma}(-\sigma\hat{\theta} - \gamma x\varepsilon) = \\ &= -\lambda\varepsilon^2 - \delta\varepsilon + \frac{\sigma}{\gamma} \tilde{\theta}\hat{\theta} = -\lambda\varepsilon^2 - \delta\varepsilon + \frac{\sigma}{\gamma} \tilde{\theta}(-\tilde{\theta} + \theta) = -\lambda\varepsilon^2 - \delta\varepsilon - \frac{\sigma}{\gamma} \tilde{\theta}^2 + \frac{\sigma}{\gamma} \tilde{\theta}\theta = \\ &= -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \delta\varepsilon \pm \frac{1}{2\lambda}\delta^2 - \frac{\sigma}{2\gamma} \tilde{\theta}^2 - \frac{\sigma}{2\gamma} \tilde{\theta}^2 + \frac{\sigma}{\gamma} \tilde{\theta}\theta \pm \frac{\sigma}{2\gamma} \theta^2 = \\ &= -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\sigma}{2\gamma} \tilde{\theta}^2 - \left( \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\varepsilon + \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\delta \right)^2 - \frac{\sigma}{\gamma} \left( \sqrt{\frac{1}{2}}\tilde{\theta} + \sqrt{\frac{1}{2}}\theta \right)^2 + \frac{1}{2\lambda}\delta^2 + \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2 \leq \\ &\leq -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\sigma}{2\gamma} \tilde{\theta}^2 + \frac{1}{2\lambda}\delta^2 + \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2 \leq -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\sigma}{2\gamma} \tilde{\theta}^2 + \frac{1}{2\lambda}\bar{\delta}^2 + \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2. \end{aligned}$$

Введем обозначение  $\kappa = \min\{\lambda, \sigma\}$ . Тогда, считая  $\lambda, \sigma$  положительными, имеем:

$$\dot{V} \leq -\kappa \left( \frac{1}{2} \varepsilon^2 - \frac{1}{2\gamma} \tilde{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2\lambda} \bar{\delta}^2 + \frac{\sigma}{2\gamma} \theta^2$$

или

$$\dot{V} \leq -\kappa V + \bar{\Delta},$$

где  $\bar{\Delta} = \bar{\delta}^2 / 2\lambda + \sigma\theta^2 / 2\gamma$  — постоянная величина. Далее, решая данное дифференциальное неравенство, получаем:

$$V(\varepsilon(t)) \leq e^{-\kappa t} V(0) + \frac{\bar{\Delta}}{\kappa} - \frac{\bar{\Delta}}{\kappa} e^{-\kappa t},$$

откуда следует, что

$$\varepsilon(t) \leq \sqrt{2 \left( e^{-\kappa t} V(0) + \frac{\bar{\Delta}}{\kappa} - \frac{\bar{\Delta}}{\kappa} e^{-\kappa t} \right)}.$$

Из последнего неравенства следует экспоненциальная сходимость ошибки управления к ограниченному множеству с границей  $\Delta = \sqrt{2\bar{\Delta}/\kappa}$ .

Алгоритм управления (1.6), основанный на алгоритме адаптации (2.8), также обеспечивает устойчивость замкнутой системы и является робастным по отношению к внешнему возмущению. В то же время алгоритм (1.6), (2.8) позволяет парировать недостатки робастного алгоритма управления (2.5). Так, при отсутствии внешнего возмущения верхняя граница  $\bar{\Delta}$  может быть снижена до нуля за счет обнуления коэффициента  $\sigma$  (т.н. гибридная  $\sigma$ - модификация). Кроме того, для уменьшения  $\Delta$  нет необходимости в значительном увеличении  $\gamma$ , которое влечет за собой рост амплитуды управляющего воздействия. Снижение  $\Delta$  можно обеспечить путем уменьшения коэффициента  $\sigma$ .

## Порядок выполнения работы

1. На основе данных, приведенных в таблице 1.1, провести моделирование адаптивной системы управления, полученной в лабораторной работе №1, в условиях действия на объект возмущения вида (см. [9])

$$\delta(t) = (1+t)^{-1/8} \left[ 1 - \theta(1+t)^{-1/4} - \frac{3}{8}(1+t)^{-5/4} \right].$$

При моделировании использовать следующие значения параметров:  $\gamma = 0.25$ ,  $x(0) = 1$  и  $\hat{\theta}(0) = 1$ . Сигнал задания  $g(t)$  принять равным нулю.

По результатам моделирования построить три графика. На первом вывести  $x$  и  $x_m$ , на втором —  $u$ , на третьем —  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ .

2. Заменить алгоритм адаптации (1.9) на статическую обратную связь (2.4) и повторить эксперимент для трех разных значений коэффициента  $\gamma$ . Определить влияние этого коэффициента на свойства системы. По результатам моделирования для каждого  $\gamma$  построить два графика. На первом вывести  $x$  и  $x_m$ , на втором —  $u$ .

3. В п.1 заменить алгоритм адаптации (1.9) на робастную  $\sigma$ -модификацию (2.8). Повторить эксперимент для трех разных значений коэффициента  $\sigma$ . Определить влияние этого коэффициента на свойства системы. По результатам моделирования для каждого  $\sigma$  построить два графика. На первом вывести  $x$  и  $x_m$ , на втором —  $u$ .

### Задачи и вопросы

1. Показать, что приведенные в работе алгоритмы робастного управления обеспечивают устойчивость замкнутых систем при незначительных отклонениях параметра  $\theta$ .

2. Является ли свойство асимптотической устойчивости грубым по отношению к внешним возмущениям?

3. Является ли свойство экспоненциальной устойчивости грубым по отношению к внешним возмущениям?

4. Следует ли из роста параметра  $\sigma$  в алгоритме (2.8) рост максимальной установившейся ошибки управления  $\varepsilon$ ? Ответ пояснить.

5. Следует ли из роста параметра  $\gamma$  в алгоритме (2.8) снижение максимальной установившейся ошибки управления  $\varepsilon$ ? Ответ пояснить.

6. Решить задачу робастного управления для объекта вида

$$\dot{x} = x^4 + \theta x + u,$$

где  $\theta$  — неизвестный параметр. Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего выполнение неравенства (2.2).

7. Доказать устойчивость робастной системы управления, включающей объект (2.1), регулятор (1.6) и нелинейную обратную связь вида

$$\hat{\theta} = -\gamma x \text{sign}(\varepsilon),$$

где  $\gamma$  — положительный параметр.

8. Доказать устойчивость робастной системы управления, включающей объект (2.1), регулятор (1.6) и модифицированный алгоритм адаптации вида

$$\dot{\hat{\theta}} = -\sigma\hat{\theta} - \gamma x \text{sign}(\varepsilon),$$

где  $\gamma, \sigma$  — положительные параметры.

9. Решить задачу робастного управления для объекта вида

$$\dot{x} = \theta(x^2 + 1) + u + \delta,$$

где  $\theta$  — неизвестный параметр,  $\delta$  — ограниченное возмущение, удовлетворяющее неравенству  $|\delta(t)| \leq \bar{\delta}$ . Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего выполнение неравенства (2.2).

10. Решить задачу робастного управления для объекта вида

$$\dot{x} = \theta \sin(x) + u + \delta,$$

где  $\theta$  — неизвестный параметр,  $\delta$  — ограниченное возмущение, удовлетворяющее неравенству  $|\delta(t)| \leq \bar{\delta}$ . Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего выполнение неравенства (2.2).

### *Задачи и вопросы повышенной сложности*

1. Решить задачу робастного управления для объекта вида

$$\dot{x} = \theta(x^2 + 1)u,$$

где  $\theta \geq \theta_0 > 0$  — неизвестный параметр. Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего выполнение неравенства (2.2) с  $x_m(t) = 0$ .

2. Решить задачу робастного управления для объекта вида

$$\dot{x} = \theta_1 x + \theta_2 x^2 + u + \delta,$$

где  $\theta_1, \theta_2$  — неизвестные параметры,  $\delta$  — ограниченное возмущение, удовлетворяющее неравенству  $|\delta(t)| \leq \bar{\delta}$ . Цель управления заключается в

построении закона управления, обеспечивающего выполнение неравенства (2.2).

3. Система стабилизации описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \theta x + u + \delta, \\ u &= -\hat{\theta}x, \\ \dot{\hat{\theta}} &= \gamma x^2,\end{aligned}$$

где  $\theta$  — неизвестный параметр,  $\delta$  — ограниченное возмущение,  $\hat{\theta}$  — настраиваемый параметр регулятора. Проанализировать устойчивость замкнутой системы и ее робастность по отношению к внешнему возмущению.

4. Решить предыдущую задачу для случая, когда  $\hat{\theta}$  генерируется нелинейной обратной связью вида

$$\hat{\theta} = \gamma x^2.$$

5. Решить задачу робастного управления для объекта вида

$$\dot{x} = \theta_1 x + u + \theta_2 \sin t + \delta,$$

где  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  — неизвестные параметры,  $\delta$  — ограниченное возмущение, удовлетворяющее неравенству  $|\delta(t)| \leq \bar{\delta}$ . Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего выполнение неравенства (2.2).

**Лабораторная работа № 3.** Адаптивное управление линейным многомерным объектом по состоянию.

Цель работы: освоение принципов построения адаптивной системы управления многомерным объектом.

**Методические рекомендации.** До начала работы студенты должны ознакомиться с принципом построения алгоритмов адаптации на основе стандартной модели ошибки с измеряемым состоянием [1, 2]. Лабораторная работа рассчитана на 4 часа.

**Теоретические сведения.** Рассмотрим задачу адаптивного управления многомерным объектом с использованием эталонной модели. При этом воспользуемся принципами решения аналогичной задачи для объекта первого порядка (см. лабораторную работу №1).

*Постановка задачи.* Дан объект управления, модель которого описывается уравнениями вида

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) \quad (3.1)$$

$$y = Cx, \quad (3.2)$$

где  $x \in R^n$  — вектор состояния,  $y \in R^1$  — регулируемая переменная,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0],$$

$a_i, i = \overline{0, n-1}$  — неизвестные параметры,  $b_0$  — известный параметр.

Задача управления заключается в компенсации параметрической неопределенности объекта и обеспечении следующего целевого равенства:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_M(t) - x(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (e(t)) = 0, \quad (3.3)$$

где  $e = x_M - x$  — вектор ошибки управления,  $x_M \in R^n$  — вектор, генерируемый эталонной моделью

$$\dot{x}_M = A_M x_M + b_M g, \quad (3.4)$$

$$y_M = C_M x_M \quad (3.5)$$

с задающим воздействием  $g(t)$  и матрицами вида

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{M0} & -a_{M1} & -a_{M2} & \dots & -a_{Mn-1} \end{bmatrix}, \quad b_M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{M0} \end{bmatrix},$$

$$C_M = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0].$$

Коэффициенты эталонной модели  $a_{Mi}, i = \overline{1, n-1}$  строятся на основе метода стандартных характеристических полиномов [4, 5] для обеспечения желаемого качества воспроизведения задающего воздействия  $g(t)$ . Другими словами, модель (3.4), (3.5) определяет желаемое качество замкнутой системы после завершения процессов настройки адаптивного управления.

*Решение задачи.* Предполагая параметры объекта известными, синтезируем регулятор, который обеспечит условие (3.3) с заданными динамическими показателями качества — временем переходного процесса  $t_n$  и перерегулированием  $\sigma$ .

Для синтеза регулятора сформируем ошибку слежения  $e = x_M - x$ , возьмем ее производную и проведем ряд алгебраических преобразований:

$$\begin{aligned}
\dot{e} = \dot{x}_M - \dot{x} = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{M0} & -a_{M1} & -a_{M2} & \cdots & -a_{Mn-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{M1} \\ x_{M2} \\ \vdots \\ x_{Mn-1} \\ x_{Mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{M0} \end{bmatrix} g - \\
& - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \pm \\
& \pm \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{M0} & -a_{M1} & -a_{M2} & \cdots & -a_{Mn-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{M0} & -a_{M1} & -a_{M2} & \cdots & -a_{Mn-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{M0} + a_0 & -a_{M1} + a_1 & -a_{M2} + a_2 & \cdots & -a_{Mn-1} + a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{M0} \end{bmatrix} g.
\end{aligned}$$

Полученный результат запишем в более компактной форме:

$$\begin{aligned}
\dot{e} = A_M e + k[(-a_{M0} + a_0)x_1 + (-a_{M1} + a_1)x_2 + \dots + (-a_{Mn-1} + a_{n-1})x_n + \\
+ a_{M0}g - b_0u, \tag{3.6}
\end{aligned}$$

где  $k = [0, \dots, 0, 1]^T$ . Введем обозначения:

$$\theta_1 = (-a_{M0} + a_0), \theta_2 = (-a_{M1} + a_1), \dots, \theta_n = (-a_{Mn-1} + a_{n-1}).$$

Перепишем (3.6) в следующем виде:

$$\dot{e} = A_M e + k[\theta^T x + a_{M0}g - b_0 u], \quad (3.7)$$

где  $\theta^T = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]$  — вектор параметрических рассогласований между матрицами  $A$  и  $A_M$ .

Нетрудно видеть, что, если

$$u = \frac{1}{b_0} [\theta^T x + a_{M0}g], \quad (3.8)$$

то ошибка слежения подчиняется закону

$$\dot{e} = A_M e \quad (3.9)$$

и экспоненциально затухает со временем.

Однако в исходной постановке задачи параметры матрицы  $A$  неизвестны. Следовательно, закон (3.8) физически не реализуем. Заменим в 3.7 неизвестные параметры  $\theta$  на оценки  $\hat{\theta}$  и получим настраиваемый закон управления:

$$u = \frac{1}{b_0} [\hat{\theta}^T x + a_{M0}g]. \quad (3.10)$$

Подставим последнее выражение в (3.7) и получим модель ошибок:

$$\dot{e} = A_M e + k \tilde{\theta}^T x, \quad (3.11)$$

где  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  — вектор параметрических ошибок.

Расширяя подход, приведенный в лабораторной работе №1, на многомерный случай, выберем функцию Ляпунова вида:

$$V = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta},$$

где  $P$  — положительно определенная симметричная матрица, удовлетворяющая уравнению Ляпунова

$$A_M^T P + P A_M = -Q \quad (3.12)$$

с произвольно выбранной симметричной положительно определенной матрицей  $Q$ . Далее, вычисляя производную функции Ляпунова в силу модели ошибок (3.11), получаем:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}e^T Q e + \tilde{\theta}^T x k P e + \frac{1}{\gamma} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}}.$$

Из анализа последнего выражения видно, что если алгоритм адаптации выбрать в виде

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma x k^T P e, \quad \hat{\theta}(0) = 0 \quad (3.13)$$

то производная функции Ляпунова будет удовлетворять неравенству

$$\dot{V} = -e^T Q e \leq 0,$$

откуда следует выполнение целевого условия (3.3).

Отметим, что в выражении (3.13) коэффициент  $\gamma > 0$  носит название коэффициента адаптации, и его величина определяет скорость настройки коэффициентов регулятора (3.10).

Таким образом, алгоритм адаптивного управления состоит из настраиваемого регулятора (3.10), алгоритма адаптации (3.13), в котором матрица  $P$  находится из (3.12).

Адаптивный регулятор (3.10), (3.13) обеспечивает:

1. Устойчивость замкнутой системы;
2. Асимптотическое стремление ошибки  $e$  к нулю;
3. Ограниченность сигнала  $\hat{\theta}$ . При этом вектор  $\hat{\theta}$  асимптотически стремится к  $\theta$ , если вектор  $x$  удовлетворяет условию неисчезающего возбуждения:

$$\int_t^{t+T} x(\tau)x^T(\tau)d\tau > \alpha I, \quad (3.14)$$

где  $\alpha > 0$ ,  $T > 0$  — постоянные величины.

Условие (3.14) эквивалентно условию наличия не менее  $(n+1)/2$  гармоник в векторе  $x$ . Отметим, что в рамках решаемой задачи слежения характер поведения регрессора  $x$  целиком определяется характером задающего воздействия  $g$ . Поэтому условие неисчезающего возбуждения может быть переформулировано в терминах сигнала  $g$ .

4. При увеличении коэффициента  $\gamma$  до определенного оптимального значения увеличивается скорость сходимости параметрических ошибок  $\tilde{\theta}$

к нулю. Дальнейшее увеличение  $\gamma$  приведет к снижению скорости сходимости ошибки.

### Порядок выполнения работы

1. На основе заданных в таблице 3.1 значений времени переходного процесса  $t_n$  и максимального перерегулирования  $\sigma$  сформировать эталонную модель в форме (3.4), (3.5). Построить график переходной функции модели, на котором показать  $t_n$  и  $\sigma$ ;

2. На основе предположения, что параметры объекта известны, построить и промоделировать систему управления с регулятором (3.8). Провести три эксперимента, в которых:

— использовать расчетные значения параметров объекта, заложенные в  $\theta_1$  и  $\theta_2$ ;

— незначительно отклонить параметры объекта так, чтобы система не потеряла устойчивость;

— отклонить параметры объекта так, чтобы система потеряла устойчивость.

По результатам каждого эксперимента построить траектории  $x(t)$  и  $x_M(t)$  на одном графике и  $e(t)$  — на другом.

3. Провести моделирование адаптивной системы управления с регулятором (3.10) и алгоритмом адаптации (3.13). В ходе моделирования проиллюстрировать свойства 1-4 алгоритма управления. Для этого необходимо:

— повторить три эксперимента п.п. 2 для фиксированного значения  $\gamma$ ;

— используя расчетные значения параметров объекта, провести эксперимент с тремя различными значениями  $\gamma$ ;

— провести один из предыдущих экспериментов данного пункта при  $g(t) = 1$ .

По результатам каждого эксперимента построить траектории  $x(t)$  и  $x_M(t)$  на одном графике,  $e(t)$  — на втором,  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  — на третьем.

4. Сделать выводы по каждому пункту работы.

Таблица 3.1. Варианты заданий

Вар.	Матрица $A$	Коэфф. передачи $b_0$	Время переходного процесса, $t_n$	Максимальное перерегулирование $\sigma$ , %	Сигнал задания $g(t)$
1	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	1	0.16	0	$2\text{sign}(\cos t) + 3$
2	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	2	0.3	0	$\cos t + 3 \sin 2t + 5$
3	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$	3	0.9	0	$\text{sign}(\cos 2t)$
4	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$	4	0.2	0	$\text{sign}(\sin 0.5t) + 2$
5	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$	5	0.6	0	$10 \cos 0.5t + 2 \sin t + 12$
6	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$	6	0.3	0	$\text{sign}(\sin 0.5t) + 3$
7	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$	7	0.7	0	$0.5\text{sign}(\sin 0.7t) + 1$
8	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	8	0.1	0	$5 \sin 0.5t + 4 \cos 0.1t + 8$
9	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	9	0.9	0	$\text{sign}(\cos t) + 3$
10	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	1	3.5	15	$\text{sign}(\sin 2t)$
11	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$	2	0.6	15	$\sin 5t + 0.5 \cos 0.2t + 2$
12	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$	3	0.9	15	$2\text{sign}(\sin 0.4t) + 3$
13	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$	4	0.4	15	$3\text{sign}(\sin 0.5t) + 3$
14	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$	5	0.2	15	$2 \sin 0.2t + \sin 0.1t + 8$
15	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$	6	0.5	15	$4\text{sign}(\cos 2t) + 5$
16	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$	7	0.5	15	$3\text{sign}(\cos 0.2t) + 3$

17	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$	8	0.45	15	$\text{sign}(\sin 0.5t) + 2$
18	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$	9	0.15	15	$0.8 \sin 2t + \cos 0.8t + 2$
19	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	1	0.7	15	$\text{sign}(\sin 0.3t) + 1.5$
20	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15 & 6 \end{bmatrix}$	2	1.2	0	$7 \text{sign}(\cos 0.9t) + 8$
21	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$	3	1.5	0	$0.4 \sin 3t + \cos 0.1t + 1.5$
22	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$	4	0.8	0	$6 \text{sign}(\sin 0.1t) + 9$
23	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$	5	0.9	0	$2 \text{sign}(\sin t) + 4$
24	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$	6	0.2	0	$9 \sin 0.2t + 9 \cos 0.1t + 15$
25	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 13 & 2 \end{bmatrix}$	7	0.5	0	$4 \text{sign}(\sin 6\tau) + 5$
26	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15 & 6 \end{bmatrix}$	8	0.9	0	$4 \text{sign}(\cos t) + 3$
27	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 13 & -1 \end{bmatrix}$	9	1.3	0	$\sin 0.1t + \cos 5t + 2$
28	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$	1	1.6	0	$9 \text{sign}(\sin 0.1t) + 12$
29	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$	2	0.75	15	$3 \text{sign}(\sin 4t) + 8$
30	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$	3	0.65	15	$7 \sin 0.3t + 8 \cos t + 20$

## Задачи и вопросы

1. Выполняется ли условие (3.14) в задаче адаптивного управления скалярным объектом?

2. Может ли решением уравнения Ляпунова (3.12) являться отрицательно определенная матрица  $P$ ? Ответ пояснить.

3. Может ли решением уравнения Ляпунова (3.12) являться диагональная матрица  $P$ ? Ответ пояснить.

4. При каких  $\gamma$  адаптивная система будет неустойчива?

5. Пусть в алгоритме адаптации (3.13) параметр  $\gamma$  представлен положительно определенной симметричной матрицей. Пояснить влияние на качество сходимости параметров  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  диагональных и недиагональных элементов этой матрицы.

6. Решить задачу адаптивной стабилизации для объекта вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \theta_1 x_1 + \theta_2 x_1^2 + u,\end{aligned}$$

где  $\theta_1 = 2, \theta_2 = 5$  — неизвестные коэффициенты. Задать неадаптивной системе нулевое перерегулирование и время переходного процесса  $t_n = 1c$ .

7. Решить задачу адаптивного управления для объекта вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \theta_1 x_1 x_2 + \theta_2 (x_1^2 + 1) + u,\end{aligned}$$

где  $\theta_1, \theta_2$  — неизвестные коэффициенты. Цель управления задается равенством (3.3). Задать неадаптивной системе нулевое перерегулирование и время переходного процесса  $t_n = 1c$ . В качестве сигнала задания использовать  $g = 2\text{sign}(\sin t) + 1$ .

8. Решить задачу адаптивного управления для объекта вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \theta x_1 + u,\end{aligned}$$

где  $\theta$  — неизвестный коэффициент. Цель управления задается равенством (3.3).

9. Решить задачу адаптивного управления для объекта вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 3x_2, \\ \dot{x}_2 &= \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + u,\end{aligned}$$

где  $\theta_1 = 1$ ,  $\theta_2 = 2$  — неизвестные коэффициенты. Цель управления задается равенством (3.3). Задать неадаптивной системе нулевое перерегулирование и время переходного процесса  $t_n = 1c$ . В качестве сигнала задания использовать  $g = 3\text{sign}(\sin 2t) + 2$ .

10. Решить задачу адаптивного управления для объекта вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 u,\end{aligned}$$

где  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \geq \theta_{03} > 0$  — неизвестные коэффициенты. Цель управления задается равенством (3.3).

### *Задачи и вопросы повышенной сложности*

1. Обеспечивает ли представленный в работе алгоритм адаптивного управления цель (3.3) для объекта с переменными параметрами? Ответ пояснить.

2. Как бы изменился ход решения задачи, если бы в объекте (3.1) параметр  $b_0$  был бы положителен и неизвестен? Решить задачу адаптивного управления для данного случая, модифицировав имеющееся решение.

3. Удовлетворяет ли вектор

$$x(t) = [\sin t, \cos t + k \sin 2t]^T$$

условию (3.14) при  $k = 0$  и  $k = 1$ ? Ответ пояснить.

4. Если в ходе синтеза системы управления увеличить желаемое время переходного процесса  $t_n$  (см. таблицу 3.1), то, как это отразится на сходимости  $\tilde{\theta}$  к нулевому вектору? Ответ пояснить.

5. Решить задачу адаптивного управления для объекта, представленного дискретной моделью вида<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_2(k), \\ x_2(k+1) &= \theta_1 x_1(k) + \theta_2 x_2(k) + u(k),\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> При построении дискретной реализации алгоритма адаптации необходимо нормировать вектор измеряемых функций (регрессор) с целью избежания неограниченного роста оценок. Так, например, в модификации алгоритма (3.13) необходимо использовать  $x/(1+x^T x)$  вместо  $x$ .

где  $\theta_1, \theta_2$  — неизвестные коэффициенты,  $k$  — дискретное время. Цель управления задается следующим равенством:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_M(k) - x(k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (e(k)) = 0.$$

Вектор  $x_M$  генерируется эталонной моделью вида

$$x_M(k+1) = A_M x_M(k) + b_M g(k)$$

с задающим воздействием  $g$  и матрицами

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{M0} & a_{M1} \end{bmatrix}, \quad b_M = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + a_{M1} + a_{M0} \end{bmatrix}.$$

Параметры эталонной модели  $a_{M0}, a_{M1}$  задаются, исходя из условия устойчивости эталонной модели и заданных динамических показателей качества.

**Лабораторная работа № 4.** Робастное управление линейным многомерным объектом по состоянию.

Цель работы: освоение принципов построения робастной системы управления многомерным объектом на основе метода функций Ляпунова.

**Методические рекомендации.** До начала работы студенты должны ознакомиться с принципом построения алгоритмов робастного управления на основе стандартной модели ошибки с измеряемым состоянием. Лабораторная работа рассчитана на 2 часа.

**Теоретические сведения.** Рассмотрим задачу робастного управления многомерным объектом с использованием эталонной модели. При этом воспользуемся результатами решения аналогичной задачи для объекта первого порядка (см. лабораторную работу №2).

*Постановка задачи.* Дан возмущенный объект, модель которого описывается уравнениями вида

$$\dot{x} = Ax + bu + \delta, \quad x(0) \quad (4.1)$$

$$y = Cx, \quad (4.2)$$

где  $\delta$  — вектор возмущающих воздействий, удовлетворяющий неравенству  $\|\delta(t)\| \leq \bar{\delta}$ . Как и в работе № 3,  $x \in R^n$  — вектор состояния,  $y$  — регулируемая переменная, матрицы  $A$ ,  $b$  и  $C$  идентичны соответствующим матрицам объекта (3.1), (3.2).

Цель управления заключается в обеспечении целевого неравенства

$$\|x_M(t) - x(t)\| \leq \Delta, \quad \forall t \geq T, \quad (4.3)$$

где  $\Delta$ ,  $T$  — точность работы системы управления и время ее настройки соответственно,  $x_M(t) \in R^n$  — эталонный сигнал, генерируемый моделью (3.4), (3.5).

Приведем два решения поставленной задачи, основанных на алгоритмах робастного управления скалярным объектом (см. лабораторную работу №2) и разработанного в лабораторной работе №3 базового алгоритма адаптивного управления.

*Решение №1.* Решение основано на законе управления (3.10) и модификации алгоритма (3.13), представленной в следующей статической форме:

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma x k^T P e, \quad (4.4)$$

где  $\gamma > 0$  — коэффициент нелинейной обратной связи,  $P$  — матрица, определяемая из решения (3.12),  $k = [0, \dots, 0, 1]^T$ ,  $e = x_M(t) - x(t)$  — ошибка управления.

Анализ замкнутой системы может быть проведен на основе модели ошибки (3.11) и функции Ляпунова вида

$$V = e^T P e.$$

В результате анализа можно установить, что система управления, замкнутая алгоритмом робастного управления (3.10), (4.4), обладает свойствами, аналогичными свойствам алгоритма (1.6), (2.4) в системе управления скалярным объектом (2.1). Замкнутая система имеет следующие свойства:

— устойчивость замкнутой системы и ее робастность по отношению к внешнему возмущению;

— экспоненциальную сходимость нормы вектора ошибки  $e$  к ограниченной окрестности нулевого положения равновесия. При этом радиус окрестности можно уменьшить путем увеличения коэффициента  $\gamma$ ;

— при отсутствии возмущения установившаяся ошибка  $\varepsilon(t)$  отлична от нуля;

— управление пропорционально величине  $x^T x$ , что определяется путем подстановки (4.4) в (3.10).

*Решение №2.* Решение также основано на законе управления (3.10) и модификации алгоритма (3.13), представленной в виде

$$\dot{\hat{\theta}} = -\sigma \hat{\theta} + \gamma x k^T P e, \quad (4.6)$$

где  $\gamma > 0$  — коэффициент адаптации,  $\sigma > 0$  — коэффициент параметрической обратной связи,  $P$  — матрица, определяемая из решения (3.12),  $k = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T$ .

Анализ замкнутой системы может быть проведен на основе модели ошибки (3.11) и функции Ляпунова

$$V = e^T P e + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta},$$

где  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  — вектор параметрических ошибок.

В результате анализа можно установить, что система управления, замкнутая алгоритмом робастного управления (3.10), (4.6), обладает

свойствами, аналогичными свойствам алгоритма (1.6), (2.7) в системе управления объектом первого порядка (2.1). Замкнутая система имеет следующие свойства:

— устойчивость замкнутой системы и ее робастность по отношению к внешнему возмущению;

— экспоненциальную сходимую норму вектора ошибки  $e$  к ограниченной окрестности нулевого положения равновесия. Радиус окрестности можно уменьшить путем увеличения коэффициента  $\gamma$  и снижения параметра  $\sigma$ ;

— в общем случае при отсутствии возмущения установившаяся ошибка  $\varepsilon(t)$  отлична от нуля, но ее максимальное значение может быть уменьшено путем уменьшения  $\sigma$ .

### Порядок выполнения работы

1. На основе результатов, полученных при выполнении лабораторной работы №3, модифицировать алгоритм адаптации (3.13) и сформировать нелинейный закон робастного управления (3.10), (4.4) и закон адаптивного и робастного управления (3.10), (4.6). Построить в пакете Simulink модели соответствующих замкнутых систем управления, приняв в качестве возмущения следующую функцию:

$$\delta(t) = [\sin 10t + \Lambda(t), 1.5 \cos 12t + \Lambda(t)]^T,$$

где  $\Lambda(t)$  — белый шум с ограниченным спектром, мощностью 0.00001 и интервалом дискретизации  $0.01^2$ .

2. Провести эксперименты с системой робастного управления, замкнутой алгоритмом (3.10), (4.4), для трех различных коэффициентов  $\gamma$  при отсутствии и наличии возмущения  $\delta(t)$ .

По результатам каждого эксперимента построить траектории  $x(t)$  и  $x_M(t)$  на одном графике,  $e(t)$  — на другом.

3. Провести эксперименты с системой робастного управления, замкнутой алгоритмом (3.10), (4.6), для выбранного параметра  $\sigma$  и двух различных коэффициентов  $\gamma$ , принятых в п.п.2, при отсутствии и наличии возмущения  $\delta(t)$ . Далее уменьшить параметр  $\sigma$  и повторить предыдущий эксперимент (при отсутствии и наличии возмущения  $\delta(t)$ ) для одного из выбранных коэффициентов  $\gamma$ .

---

<sup>2</sup> Для формирования сигнала “Белый шум” в пакете Simulink используется блок “Band-Limited White Noise”

По результатам каждого эксперимента построить траектории  $x(t)$  и  $x_M(t)$  на одном графике,  $e(t)$  — на втором и  $\tilde{\theta}(t)$  — на третьем.

4. Сделать выводы по каждому пункту работы.

### Задачи и вопросы

1. Доказать свойство экспоненциальной сходимости ошибки управления к ограниченному множеству для замкнутой системы с управлением (3.10) и нелинейной обратной связью (4.4).

2. Доказать свойство экспоненциальной сходимости ошибки управления к ограниченному множеству для замкнутой системы с управлением (3.10) и алгоритмом адаптации (4.6).

3. С какой целью в алгоритм (4.6) добавляется параметрическая обратная связь с коэффициентом  $\sigma$ ?

4. Будет ли равна нулю ошибка управления в алгоритмах робастного управления (3.10), (4.4) и (3.10), (4.6) при отсутствии возмущений? Ответ пояснить.

5. Как изменится гарантированный радиус окрестности, в которую попадет норма ошибки  $\|x_M(t) - x(t)\|$  при использовании в системе управления алгоритма (4.6) и одновременном двукратном увеличении коэффициентов  $\gamma$  и  $\sigma$ ?

6. Будет ли устойчива система робастного управления с регулятором (3.10) и нелинейной обратной связью (4.4), если коэффициент  $\gamma$  положителен, матрица  $A_M$  гурвицева и задана в канонической управляемой форме, а матрица  $P$  имеет одно из следующих значений:

$$\text{а) } P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \text{ б) } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \text{ в) } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \text{ г) } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}?$$

7. Решить задачу робастного управления для маятника, представленного моделью вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \theta_1 \sin(x_1) + \theta_2 x_2 + u + \delta, \end{aligned}$$

где  $\theta_1, \theta_2$  — неизвестные параметры,  $\delta$  — ограниченное возмущение, удовлетворяющее неравенству  $|\delta(t)| \leq \bar{\delta}$ . Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего выполнение неравенства (4.3).

8. Решить задачу робастного управления для объекта вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \theta + x_2 + u + \delta,\end{aligned}$$

где  $\theta$  — неизвестный параметр,  $\delta$  — ограниченное возмущение, удовлетворяющее неравенству  $|\delta(t)| \leq \bar{\delta}$ . Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего выполнение неравенства (4.3). В ходе синтеза задействовать алгоритм адаптации (4.6).

9. Про моделировать замкнутую систему робастного управления, синтезированную согласно одному из вариантов выполнения работы, с использованием следующей модификации алгоритма адаптации:

$$\dot{\hat{\theta}} = \begin{cases} -\sigma \hat{\theta} + \gamma x k^T P e, & \text{если } \|\hat{\theta}\|_2 \geq \theta_0 \\ \gamma x k^T P e, & \text{если } \|\hat{\theta}\|_2 < \theta_0, \end{cases}$$

где  $\theta_0 = 1.5 \|\theta\|_2$ . Значения коэффициентов  $\gamma$  и  $\sigma$  принять идентичными значениям в п.п. 3 порядка выполнения работы. Функцию возмущения принять равной функции в п.п. 1 порядка выполнения работы.

Сравнить результат с результатом, полученным при использовании алгоритма адаптации (4.6). Пояснить достоинство данной модификации.

10. Решить задачу робастного управления для объекта вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_2, \\ \dot{x}_2 &= \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + u + \delta,\end{aligned}$$

где  $\theta_1, \theta_2$  — неизвестные параметры,  $\delta$  — ограниченное возмущение, удовлетворяющее неравенству  $|\delta(t)| \leq \bar{\delta}$ . Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего выполнение неравенства (4.3).

### *Задачи и вопросы повышенной сложности*

1. Показать, что система управления, замкнутая управлением (3.10) с нелинейной обратной связью (4.4), робастна по отношению к незначительным вариациям параметров  $\theta$ .

2. Решить задачу робастного управления для объекта вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \theta_1 x_1 + x_2 + \theta_2 u + \delta,\end{aligned}$$

где  $\theta_1, \theta_2 \geq \theta_{02} > 0$  — неизвестные параметры,  $\delta$  — ограниченное возмущение, удовлетворяющее неравенству  $|\delta(t)| \leq \bar{\delta}$ . Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего выполнение неравенства (4.3).

3. Решить задачу робастного управления для объекта вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1^2 - \theta u + \delta,\end{aligned}$$

где  $\theta \geq \theta_0 > 0$  — неизвестный параметр,  $\delta$  — ограниченное возмущение, удовлетворяющее неравенству  $|\delta(t)| \leq \bar{\delta}$ . Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего выполнение неравенства (4.3).

4. Решить задачу робастного управления для электропривода, описываемого уравнениями вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ax + bu, \\ \dot{y} &= x + \delta,\end{aligned}$$

где  $a, b \geq b_0 > 0$  — неизвестные параметры,  $\delta$  — ограниченное возмущение, удовлетворяющее неравенству  $|\delta(t)| \leq \bar{\delta}$ ,  $x, y$  — скорость и положение ротора соответственно. Цель управления заключается в построении управления, обеспечивающего выполнение следующего неравенства:

$$|y_M(t) - y(t)| \leq \Delta, \quad \forall t \geq T,$$

где  $\Delta, T$  — точность работы системы управления и время ее настройки соответственно,  $y_M$  — выход эталонной модели

$$y_M = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\omega s + \omega^2} [g],$$

$\omega$  — положительная величина,  $g$  — сигнал задания.

5. Решить задачу повышенной сложности №5 в лабораторной работе №3 с использованием дискретной версии алгоритма адаптации (4.6). Привести доказательство экспоненциальной сходимости ошибок управления к ограниченным множествам.

## Лабораторная работа №5: Параметризация модели объекта управления (способ №1)

Цель работы: освоение способа параметрического представления выходной переменной и вектора состояния линейной модели объекта.

**Методические рекомендации.** До начала работы студенты должны ознакомиться с параметризованным представлением линейных моделей “вход-состояние-выход” [2, 3, 6] и построить схему моделирования параметризованного объекта. Лабораторная работа рассчитана на 2 часа.

**Теоретические сведения.** Параметризацией модели объекта называется представление его выходной переменной (или вектора состояния) в виде линейной регрессионной модели, т.е. в виде произведения вектора (матрицы) постоянных параметров и вектора (матрицы) известных функций.

Для пояснения принципа составления параметризованных форм моделей рассмотрим простую задачу. Дан объект управления первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + bu, & x(0) \\ y = x, \end{cases} \quad (5.1)$$

где  $a$ ,  $b$  — параметры объекта,  $x$  — переменная состояния,  $y$  — выходная переменная. Необходимо представить переменную  $y$  в параметризованной форме, т.е. в виде линейной регрессионной модели вида

$$y = \theta^T \omega, \quad (5.2)$$

где  $\theta$  — вектор постоянных параметров,  $\omega$  — вектор известных (т.н. базисных) функций.

Применим к правой и левой части уравнения состояния линейный оператор с передаточной функцией

$$H(s) = \frac{1}{s+k},$$

где  $s$  — оператор дифференцирования,  $k$  — положительная константа. Получим:

$$\frac{1}{s+k}[\dot{x}] = -\frac{1}{s+k}[ax] + \frac{1}{s+k}[bu].$$

Проводя простейшие алгебраические преобразования, имеем:

$$\begin{aligned}\frac{s}{s+k}[x] &= -a\frac{1}{s+k}[x] + b\frac{1}{s+k}[u], \\ \frac{s \pm k}{s+k}[x] &= -a\frac{1}{s+k}[x] + b\frac{1}{s+k}[u], \\ x = \frac{k}{s+k}[x] - a\frac{1}{s+k}[x] + b\frac{1}{s+k}[u] &= (k-a)\frac{1}{s+k}[x] + b\frac{1}{s+k}[u],\end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\xi_0 = \frac{1}{s+k}[x], \quad v_0 = \frac{1}{s+k}[u].$$

После замены  $x$  на  $y$  окончательно получим выражение (5.2):

$$y = (k-a)\xi_0 + bv_0 = \theta^T \omega,$$

где  $\theta = [k-a, b]^T$  — вектор постоянных параметров, а  $\omega = [\xi_0, v_0]^T$  — вектор известных функций.

Рассуждая аналогичным образом, можно построить параметризованное представление для объекта  $n$ -ого порядка, представленного в форме “вход-выход”:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_0y = b_mu^m + b_{m-1}u^{m-1} + \dots + b_0u, \quad (5.3)$$

Выберем гурвицеву передаточную функцию вида:

$$H(s) = \frac{1}{K(s)} = \frac{1}{s^n + k_{n-1}s^{n-1} + k_{n-2}s^{n-2} + \dots + k_0}.$$

Полагая начальные условия  $y^{(i)}(0)$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  равными нулю, применим оператор с передаточной функцией  $H(s)$  к правой и левой части уравнения (5.3). Проводя ряд алгебраических преобразований, получаем общее параметризованное представление регулируемой переменной:

$$y = \sum_{i=0}^{n-1} (k_i - a_i) \frac{s^i}{K(s)}[y] + \sum_{i=0}^m b_i \frac{s^i}{K(s)}[u]$$

или

$$y = \theta^T \omega, \quad (5.4)$$

где

$$\begin{aligned}\theta^T &= [k_0 - a_0, k_1 - a_1, \dots, k_{n-1} - a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_m], \\ \omega^T &= \left[ \frac{1}{K(s)}[y], \frac{s}{K(s)}[y], \dots, \frac{s^{n-1}}{K(s)}[y], \frac{1}{K(s)}[u], \frac{s}{K(s)}[u], \dots, \frac{s^m}{K(s)}[u] \right].\end{aligned}$$

Решим задачу параметризации вектора состояния модели “Вход-состояние-выход” вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, & x(0), \\ y = Cx. \end{cases} \quad (5.5)$$

Матрицы модели представлены в канонической форме:

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ -a_0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ \cdots \ 0].$$

Полагая начальные условия  $x(0)$  равными нулю, применим к правой и левой частям уравнения состояния модели (5.5) оператор матричной передаточной функции

$$\Phi(s) = (sI - A_0)^{-1},$$

где  $I$  — единичная матрица размерности  $n \times n$ ,  $A_0$  — гурвицева матрица, заданная в канонической форме

$$A_0 = \begin{bmatrix} -k_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ -k_{n-2} & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ -k_0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее проведем алгебраические преобразования:

$$\begin{aligned} (sI - A_0)^{-1}[\dot{x}] &= (sI - A_0)^{-1} A[x] + (sI - A_0)^{-1} b[u], \\ (sI - A_0)^{-1} s[x] &= (sI - A_0)^{-1} A[x] + (sI - A_0)^{-1} b[u], \\ (sI - A_0)^{-1} (s \pm A_0)[x] &= (sI - A_0)^{-1} A[x] + (sI - A_0)^{-1} b[u], \\ (sI - A_0)^{-1} (s - A_0)[x] + (sI - A_0)^{-1} A_0[x] &= (sI - A_0)^{-1} A[x] + (sI - A_0)^{-1} b[u], \\ x &= -(sI - A_0)^{-1} A_0[x] + (sI - A_0)^{-1} A[x] + (sI - A_0)^{-1} b[u], \\ x &= (sI - A_0)^{-1} (A - A_0)[x] + (sI - A_0)^{-1} b[u]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Учитывая структуры матриц  $A$ ,  $A_0$  и равенство  $y = x_1$  (в силу значения матрицы  $C$ ), имеем:

$$(A - A_0)[x] = \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc} -k_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ -k_{n-2} & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ -k_0 & 0 & & 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cccc} -a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ -a_0 & 0 & & 0 \end{array} \right] \end{array} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{n-1} - a_{n-1} \\ k_{n-2} - a_{n-2} \\ \vdots \\ k_0 - a_0 \end{bmatrix} y.$$

Подставляя последнее выражение в (5.6), окончательно получаем:

$$x = (sI - A_0)^{-1} \begin{bmatrix} k_{n-1} - a_{n-1} \\ k_{n-2} - a_{n-2} \\ \vdots \\ k_0 - a_0 \end{bmatrix} [y] + (sI - A_0)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} [u] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (k_i - a_i)(sI - A_0)^{-1} e_{n-i} [y] + \sum_{j=0}^m b_j (sI - A_0)^{-1} e_{m-j} [u],$$

где  $e_i^T = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ . Перепишем окончательный результат в форме

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} (k_i - a_i)(sI - A_0)^{-1} e_{n-i} [y] + \sum_{j=0}^m b_j (sI - A_0)^{-1} e_{m-j} [u],$$

или с учетом определения  $\theta$

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_{i+1} (sI - A_0)^{-1} e_{n-i} [y] + \sum_{j=0}^m \theta_{j+1+n} (sI - A_0)^{-1} e_{m-j} [u], \quad (5.7)$$

Из (5.7) видно, что для параметризации вектора  $x$  достаточно измерять входную и выходную переменные.

Следует отметить, что выражение (5.7) представляет собой наблюдатель состояния, аналогичный известному в классической теории управления наблюдателю Льюенбергера.

Для удобства моделирования в пакете программ Simulink векторные передаточные функции  $(sI - A_0)^{-1} e_{n-i}$  можно представить как выходы блока State-Space библиотеки Linear, в котором в качестве матриц  $A$ ,  $b$ ,  $C$ ,  $d$  задаются как  $A_0$ ,  $e_{n-i}$ , единичная матрица размерности  $n \times n$  (функция  $eye$ ) и нулевой вектор размерности  $n \times 1$  соответственно.

## Порядок выполнения работы

1. На основе исходных данных, приведенных в таблице 4.1, построить в программе Simulink модель объекта в канонической форме (5.3). Обеспечить возможность задания начальных условий  $y^{(i)}(0)$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ . Рассчитать элементы вектора  $\theta$  в параметризованной модели (5.4). Построить эту модель в Simulink.

В результате моделирования построить график выходных переменных  $y$  моделей 5.3 и 5.4 при ненулевых начальных условиях модели объекта (5.3).

2. На основе исходных данных, приведенных в таблице 4.1, построить в программе Simulink модель объекта (5.3). Обеспечить возможность задания начальных условий  $x_i(0)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Построить параметризованную модель (5.7) в программе Simulink.

Провести моделирование при ненулевых начальных условиях модели (5.3). Построить два графика, отражающих поведение переменных состояния моделей 5.3 и 5.7. На первом графике показать переменные  $x_1$ , на втором — переменные  $x_2$ .

3. Сделать выводы по каждому пункту работы.

Таблица 5.1. Варианты заданий

Вар.	Коэффициенты передаточной функции объекта ( $n = 2$ )				Коэффициенты фильтра		Сигнал для проверки параметризованной модели
	$a_1$	$a_0$	$b_1$	$b_0$	$k_1$	$k_0$	
1	1	1	1	2	0,2	0,01	$u = \sin t + 0.5 \cos 2t$
2	2	1	1	3	$\sqrt{0,02}$	0,01	
3	3	1	1	4	0,4	0,04	
4	4	1	1	5	$\sqrt{0,08}$	0,04	
5	5	1	1	6	0,6	0,09	
6	1	2	1	7	$\sqrt{0,18}$	0,09	
7	2	2	1	8	0,8	0,16	
8	3	2	1	9	$\sqrt{0,32}$	0,16	
9	4	2	2	3	1	0,25	
10	5	2	2	4	$\sqrt{0,5}$	0,25	
11	1	3	2	5	1,2	0,36	
12	2	3	2	6	$\sqrt{0,72}$	0,36	
13	3	3	2	7	1,6	0,64	

14	4	3	2	8	$\sqrt{1,28}$	0,64
15	5	3	2	9	2	1
16	1	4	3	4	$\sqrt{2}$	1
17	2	4	3	5	4	4
18	3	4	3	6	$2\sqrt{2}$	4
19	4	4	3	7	6	9
20	5	4	3	8	$3\sqrt{2}$	9
21	1	5	3	9	8	16
22	2	5	4	5	$4\sqrt{2}$	16
23	3	5	4	6	1	0,25
24	4	5	4	7	$\sqrt{0,5}$	0,25
25	5	5	4	8	1,2	0,36
26	1	6	4	9	$\sqrt{0,72}$	0,36
27	2	6	5	6	1,6	0,64
28	3	6	5	7	$\sqrt{1,28}$	0,64
29	4	6	5	8	2	1
30	5	6	5	9	$\sqrt{2}$	1

### Задачи и вопросы

1. Параметризовать выходную переменную дискретного объекта вида

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \dots + a_0y(k) = b_m u(k+m) + b_{m-1}u(k+m-1) + \dots + b_0u(k),$$

где  $k$  — шаг дискретизации.

2. Используя выражение (5.4), параметризовать первую производную величины  $y$ .

3. Показать, что, если начальные условия в объекте (5.3) отличны от нуля, то параметризованное представление выходной переменной имеет вид

$$y = \theta^T \omega + \sigma_{y1},$$

где  $\sigma_{y1}$  — первый элемент вектора  $\sigma_y$ , экспоненциально затухающего согласно закону  $\dot{\sigma}_y = A_0 \sigma_y$ .

4. Показать, что, если начальные условия в объекте (5.5) отличны от нуля, то параметризованное представление переменной состояния имеет вид

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} (k_i - a_i)(sI - A_0)^{-1} e_{n-i}[y] + \sum_{j=0}^m b_j (sI - A_0)^{-1} e_{m-j}[u] + \sigma_x,$$

где  $\sigma_x$  — векторная величина, экспоненциально затухающая согласно закону  $\dot{\sigma}_x = A_0 \sigma_x$ .

5. В рамках одного из вариантов выполнения работы параметризовать первую производную вектора  $x$ .

6. Представить в параметризованной форме  $y = \omega_0 + \theta^T \omega$  выходную переменную модели вида

$$\ddot{y} + \theta_1 \dot{y} + \theta_2 y = \theta_3 \ddot{u} + \theta_4 \dot{u} + \theta_5 u,$$

где  $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_5]^T$  — вектор параметров модели,  $\omega = [\omega_1, \dots, \omega_5]^T$  — вектор измеряемых функций,  $\omega_0$  — измеряемая функция. Предполагается, что при формировании фильтров измерению доступны величины  $y$  и  $u$ .

7. Представить в параметризованной форме  $y = \omega_0 + \theta^T \omega$  выходную переменную модели маятника вида

$$\ddot{y} + \theta_1 \dot{y} + \theta_2 \sin(y) = \theta_3 u,$$

где  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$  — вектор параметров модели,  $\omega = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$  — вектор измеряемых функций,  $\omega_0$  — измеряемая функция. Предполагается, что при формировании фильтров измерению доступны величины  $y$  и  $u$ .

8. Представить в параметризованной форме  $x = \omega_0 + \theta_1 \omega_1 + \theta_2 \omega_2 + \theta_3 \omega_3$  вектор состояния модели

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \theta_1 x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_1 + x_1^2 + \theta_3 u, \\ y &= x_1, \end{aligned}$$

где  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  — параметры модели,  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  — векторы измеряемых функций,  $\omega_0$  — измеряемая функция. Предполагается, что при формировании фильтров измерению доступны величины  $y$  и  $u$ .

9. Как изменятся свойства параметризованной модели выходной переменной  $y$ , если в характеристическом полиноме

$$K(s) = s^2 + 2\omega s + \omega^2,$$

образующим фильтры, параметр  $\omega$  увеличить в 10 раз?

10. Представить в параметризованной форме  $y = \omega_0 + \theta^T \omega$  выходную переменную колебательного звена

$$y = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} [u],$$

где  $k$  — коэффициент передачи,  $T$  — постоянная времени,  $\zeta$  — коэффициент затухания, лежащий в пределах  $0 < \zeta < 1$ ,  $\theta \in R^{3 \times 1}$  — вектор, элементы которого зависят от  $k$ ,  $T$ ,  $\zeta$ ,  $\omega \in R^{3 \times 1}$  — вектор измеряемых функций,  $\omega_0$  — измеряемая функция. Предполагается, что при формировании фильтров измерению доступны величины  $y$  и  $u$ .

### *Задачи и вопросы повышенной сложности*

1. Используя выражение (5.4), параметризовать вторую производную выходной переменной  $y$ .

2. Показать, что в выражении (5.7) достаточно использовать только два фильтра:

$$\xi_* = (sI - A_0)^{-1} e_n [y], \quad v_* = (sI - A_0)^{-1} e_n [u].$$

3. Представить в параметризованной форме  $y = \omega_0 + \theta^T \omega$  выходную переменную модели вида

$$\ddot{y} + 3\theta_1 y^2 \dot{y} + \theta_2 y = u,$$

где  $\theta = [\theta_1, \theta_2]^T$  — вектор параметров модели,  $\omega = [\omega_1, \omega_2]^T$  — вектор измеряемых функций,  $\omega_0$  — измеряемая функция. Предполагается, что при формировании фильтров измерению доступны величины  $y$  и  $u$ .

4. Представить в параметризованной форме  $y = \omega_0 + \theta^T \omega$  выходную переменную модели вида

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \theta_1 \kappa \dot{y} + \theta_2 \kappa^2 y &= u, \\ \dot{\kappa} &= \gamma y^2, \end{aligned}$$

где  $\theta = [\theta_1, \theta_2]^T$  — вектор параметров модели,  $\omega = [\omega_1, \omega_2]^T$  — вектор измеряемых функций,  $\omega_0$  — измеряемая функция. Предполагается, что при формировании фильтров измерению доступны величины  $\kappa$ ,  $y$  и  $u$ .

5. Представить в параметризованной форме  $z = \omega_0 + \theta^T \omega$  выходную переменную модели вида

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_1 \dot{u} + b_0 u,$$
$$z = \frac{\beta}{s + \alpha} [y],$$

где  $\theta = [a_1, a_0, b_1, b_0]^T$  — вектор параметров модели,  $\omega = [\omega_1, \dots, \omega_4]^T$  — вектор измеряемых функций,  $\omega_0$  — измеряемая функция,  $\beta, \alpha$  — известные величины. Предполагается, что при формировании фильтров измерению доступны величины  $z$  и  $u$ .

При решении задачи использовать фильтры не выше второго порядка.

## Лабораторная работа №6: Синтез адаптивного наблюдателя состояния линейного объекта

Цель работы: освоение процедуры синтеза адаптивного наблюдателя линейного объекта.

**Методические рекомендации.** До начала работы студенты должны ознакомиться с принципом параметризованного представления вектора состояния линейного объекта (см. лабораторную работу №5) и с построением алгоритмов адаптации на основе стандартных моделей ошибок [1]. Лабораторная работа рассчитана на 2 часа.

**Теоретические сведения.** На основе результата, полученного в разделе «теоретические сведения» лабораторной работы №5, рассмотрим задачу адаптивного наблюдения вектора состояния параметрически неопределенного линейного объекта.

*Постановка задачи.* Дан асимптотически устойчивый объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, & x(0), \\ y = Cx, \end{cases} \quad (6.1)$$

где  $x$  — недоступный прямому измерению вектор состояния,  $u, y$  — входной и выходной сигналы объекта, доступные прямым измерениям,

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ -a_0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ \cdots \ 0],$$

$a_i, i = \overline{0, n-1}, b_j, j = \overline{0, m}$  — неизвестные коэффициенты модели.

Рассматриваемая задача состоит в построении оценки вектора состояния  $\hat{x}$  такой, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\| = 0. \quad (6.2)$$

Другими словами, синтезируемый адаптивный наблюдатель должен одновременно оценить неизвестные параметры объекта управления  $\theta$ , а также построить оценку вектора состояния  $\hat{x}$ .

*Решение задачи.* Для решения задачи используется параметризованное представление выходной переменной (5.4) и вектора состояния (5.7). Заменяем в (5.4) параметры  $\theta$  на оценки  $\hat{\theta}$  и сформируем настраиваемую модель объекта:

$$\hat{y} = \hat{\theta}^T \omega, \quad (6.3)$$

где  $\hat{y}$  — оценка переменной  $y$ . Введем в рассмотрение ошибку:

$$\varepsilon = y - \hat{y}.$$

Учитывая (5.4), (6.3), получаем:

$$\varepsilon = \tilde{\theta}^T \omega, \quad (6.4)$$

где  $\tilde{\theta}$  — вектор параметрических ошибок. Последнее выражение представляет собой стандартную статическую модель ошибок, на основе которой при помощи функции Ляпунова  $V = \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} / 2\gamma$  строится алгоритм адаптации вида

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma \omega \varepsilon, \quad (6.5)$$

где  $\gamma > 0$  — коэффициент адаптации. После замены в (5.7) параметров  $\theta$  на оценки  $\hat{\theta}$  получаем оценку вектора состояния:

$$\hat{x} = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\theta}_{i+1} (sI - A_0)^{-1} e_{n-i} [y] + \sum_{j=0}^m \hat{\theta}_{j+1+n} (sI - A_0)^{-1} e_{m-j} [u]. \quad (6.6)$$

Таким образом, адаптивный наблюдатель, обеспечивающий выполнение условия (6.2), состоит из настраиваемой модели (6.3), алгоритма адаптации (6.5) и алгоритма оценивания вектора состояния (6.6).

Алгоритм адаптации (6.5) наделяет систему наблюдения следующими свойствами:

1. Все сигналы в системе ограничены при условии устойчивости объекта и ограниченности входного воздействия  $u$ ;
2. Ошибка  $\varepsilon$  стремится к нулю асимптотически;

3. Параметрические ошибки  $\tilde{\theta}$  стремятся к нулю, если вектор  $\omega$  удовлетворяет условию неисчезающего возбуждения (3.14). Условие (3.14) в конечном итоге зависит от частотной насыщенности сигнала  $u$ , который должен содержать «достаточное» количество гармоник.

4. Если ошибки  $\tilde{\theta}$  стремятся к нулю, то оценка вектора состояния  $\hat{x}$  стремится к  $x$ .

### Порядок выполнения работы

1. На основе результатов, полученных в лабораторной работе №5, промоделировать адаптивный наблюдатель вектора состояния объекта (6.3), (6.5), (6.6). Коэффициент адаптации  $\gamma$  выбрать экспериментальным путем. Построить два графика моделирования. На первом отобразить переменные состояния объекта  $x$  и их оценки  $\hat{x}$ . На втором графике — параметрические ошибки  $\tilde{\theta}$ .

2. Повторить эксперимент при  $u = 10 \sin t + 5 \cos 2t + 4 \cos 4t + 3 \cos 8t$ .

3. По результатам моделирования сделать выводы.

### Задачи и вопросы

1. Из теории адаптивных систем известно, что алгоритм адаптации в общем виде может быть представлен как [2, 3, 6]

$$\dot{\tilde{\theta}} = \gamma \underset{\tilde{\theta}}{\text{grad}} \{V(\varepsilon, \tilde{\theta})\}. \quad (6.7)$$

Показать, что, если  $V = \varepsilon^2 / 2$  (где ошибка  $\varepsilon$  определяется выражением (6.4)), то алгоритм адаптации (6.7) принимает форму (6.5).

2. На основе выражения (6.7) и функции Ляпунова

$$V = |\varepsilon|,$$

где ошибка  $\varepsilon$  определяется выражением (6.4), построить алгоритм адаптации и выполнить с полученным алгоритмом пункты 1, 2 порядка выполнения работы.

3. Используя исходные данные одного из вариантов, построить алгоритм восстановления первой производной выходной переменной  $y$ .

4. Как изменится алгоритм синтеза адаптивного наблюдателя, если исходная модель объекта представляется в неканонической форме?

5. Построить наблюдатель вектора состояния линейного объекта

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1, \\ \dot{x}_2 &= \theta u - x_1, \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

где  $\theta = 3$  — неизвестный параметр. Предполагается, что измерению доступны величины  $y$  и  $u$ . В ходе синтеза свести к минимуму динамический порядок фильтров и алгоритма адаптации. Промоделировать систему адаптивного наблюдения, приняв  $u = 5 \sin t + \cos 0,5t$ .

6. Обеспечит ли цель (6.2) адаптивный наблюдатель состояния, если объект устойчив и описывается уравнениями вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -a_1 x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_0 x_1 + b_0 u, \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

где  $a_0, a_1, b_0$  — неизвестные положительные параметры, а  $u = 1$ ? Ответ пояснить.

7. Как изменятся свойства наблюдателя, если алгоритм (6.5) заменить на робастную модификацию

$$\dot{\hat{\theta}} = -\sigma \hat{\theta} + \gamma \omega \varepsilon,$$

где  $\sigma$  — положительная константа? Ответ пояснить.

8. Обеспечит ли цель (6.2) адаптивный наблюдатель состояния объекта, если:

$$\begin{aligned}\text{а) } A &= \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0]; \\ \text{б) } A &= \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0]; \\ \text{в) } A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [3 \ 1]?\end{aligned}$$

Ответ пояснить.

9. Построить наблюдатель вектора состояния линейного объекта

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= \theta x_1 + u, \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

где  $\theta = -4$  — неизвестный параметр. Предполагается, что измерению доступны величины  $y$  и  $u$ . В ходе синтеза свести к минимуму динамический порядок фильтров и алгоритма адаптации. Промоделировать систему адаптивного наблюдения, приняв  $u = 2\text{sign}(\sin t) + 3$ .

10. Построить адаптивный наблюдатель угловой скорости маятника  $\dot{y}$ , модель которого имеет следующий вид:

$$\ddot{y} + \theta_1 \dot{y} + \theta_2 \sin(y) = \theta_3 u,$$

где  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  — неизвестные параметры модели. Предполагается, что измерению доступны величины  $y$  и  $u$ .

### *Задачи и вопросы повышенной сложности*

1. На основе равенства (6.7) и функции Ляпунова

$$V = \frac{1}{2} \int_0^t \varepsilon^2(t, \tau) d\tau,$$

где  $\varepsilon(t, \tau) = \tilde{\theta}^T(t) \omega(\tau)$  вывести физически реализуемый алгоритм адаптации. При этом необходимо учесть, что измерению подлежат  $\hat{\theta}^T(t)$ ,  $\varepsilon(t) = \tilde{\theta}^T(t) \omega(t)$  и  $\omega(t)$ .

Выполнить пункт 1 работы с полученным алгоритмом, приняв коэффициент адаптации  $\gamma$  равным  $\rho \left( I + \int_0^t \omega^T(\tau) \omega(\tau) d\tau \right)^{-1}$ , где  $\rho$  — положительная константа.

2. Возможно ли восстановление вектора состояния, когда нарушается условие (3.14)? Ответ пояснить.

3. Возможно ли восстановление вектора состояния, если объект неустойчив? Ответ пояснить.

4. Является ли робастным по отношению к внешним возмущениям представленный в работе адаптивный наблюдатель? Ответ пояснить.

5. Построить наблюдатель вектора состояния линейного объекта

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \theta_1 x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_1 + \theta_3 u, \\ y &= x_1, \end{aligned}$$

если известно, что выходная переменная  $y$  измеряется с помощью инерционного звена

$$z = \frac{\beta}{s + \alpha} [y],$$

где  $\theta_1 = -5$ ,  $\theta_2 = -6$ ,  $\theta_3 = 1$  — неизвестные параметры,  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 4$  — известные величины. Предполагается, что измерению доступны величины  $z$  и  $u$ . Про моделировать систему адаптивного наблюдения, приняв  $u = 4\text{sign}(\sin t) + 10$ .

**Лабораторная работа №7:** Параметризация модели объекта управления (способ 2). Адаптивное управление объектом по выходу.

Цель работы: освоение альтернативного способа параметрического представления выходной переменной и освоение метода синтеза адаптивного управления по выходу.

**Методические рекомендации.** До начала работы студенты должны ознакомиться с принципом параметрического представления вектора состояния линейного объекта (см. [2, 6]). Лабораторная работа рассчитана на 4 часа.

**Теоретические сведения.** Рассмотрим минимально фазовую линейную модель объекта, представленную в форме «вход-выход»:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_0y = b_mu^m + b_{m-1}u^{m-1} + \dots + b_0u, \quad (7.1)$$

где  $a_i, i = \overline{0, n-1}, b_j = \overline{0, m}$  — неизвестные параметры объекта, предполагается, что знак величины  $b_m$  известен. Пусть в решаемой задаче  $b_m > b_{\min} \geq 0$ .

Вместе с моделью рассмотрим динамические фильтры вида

$$\dot{v}_1 = \Lambda v_1 + e_{n-1}u, \quad (7.2)$$

$$\dot{v}_2 = \Lambda v_2 + e_{n-1}y, \quad (7.3)$$

где  $v_1 \in R^{n-1}, v_2 \in R^{n-1}$  — векторы состояния фильтров,  $e_{n-1}^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$ ,  $e_{n-1} \in R^{n-1}$ ,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_0 & -k_1 & -k_2 & \dots & -k_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Матрица  $\Lambda$  имеет сопровождающий полином

$$K(s) = s^{n-1} + k_{n-2}s^{n-2} + k_{n-3}s^{n-3} + \dots + k_0.$$

В [6] доказано, что для любых нормированных устойчивых полиномов  $K(s)$  и  $K_M(s)$  степени  $n-1$  и  $n-m$  соответственно существует

единственный постоянный вектор  $\psi \in R^{2n-1}$ , зависящий от неизвестных параметров объекта, такой, что объект (7.1) может быть представлен в виде

$$y(t) = \frac{1}{K_M(s)} [\psi^T \omega(t) + b_m u(t)] + \delta(t), \quad (7.4)$$

где  $\omega^T = [v_1^T, v_2^T, y]$ ,  $\delta(t)$  — экспоненциально затухающая функция, определяемая ненулевыми начальными условиями.

Параметризованное представление (7.4) позволяет синтезировать управление, компенсирующее неопределенности модели, сосредоточенные в векторе  $\psi$ .

*Постановка задачи управления по выходу.* Рассмотрим задачу слежения выходной переменной  $y$  за эталонным сигналом  $y_M$ , формируемым эталонной моделью вида

$$y_M(t) = \frac{k_0}{K_M(s)} [g(t)], \quad (7.5)$$

где  $g$  — сигнал задания,  $K_M(s)$  — гурвицевый полином, определяющий желаемую динамику замкнутой системы. Полином  $K_M(s)$  строится на основе метода стандартных полиномов, исходя из заданных динамических характеристик.

Цель управления заключается в компенсации неопределенностей модели объекта и достижении целевого равенства:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_M(t) - y(t)) = 0. \quad (7.6)$$

*Решение задачи.* Сформируем ошибку управления по выходу  $\varepsilon = y_M - y$  и с учетом (7.4), (7.5), проведем простейшие преобразования<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{k_0}{K_M(s)} [g] - \frac{1}{K_M(s)} [\psi^T \omega + b_m u] = \frac{1}{K_M(s)} [k_0 g - \psi^T \omega - b_m u] = \\ &= \frac{1}{K_M(s)} [k_0 g - \psi^T \omega - b_m u] \end{aligned}$$

Окончательно имеем:

---

<sup>3</sup> Экспоненциально затухающая величина  $\delta(t)$  не влияет на устойчивость замкнутой системы, в связи с чем исключена из анализа.

$$\varepsilon = \frac{1}{K_M(s)} [k_0 g - \psi^T \omega - b_m u], \quad (7.7)$$

Выражение (7.7) позволяет сформировать компенсирующий закон управления вида

$$u = \frac{1}{\hat{b}_m} (-\hat{\psi}^T \omega + k_0 g), \quad (7.8)$$

где  $\hat{\psi}$  — вектор оценок  $\psi$ ,  $\hat{b}_m$  — оценка  $b_m$ . В ходе моделирования необходимо на выходе генератора величины  $\hat{b}_m$  (алгоритма адаптации) установить блок насыщения с нижним положительным порогом меньшим, чем  $b_m$  (см. рис. 7.1) с целью предотвращения деления на ноль в алгоритме управления (7.8) при  $\hat{b}_m = 0$ .

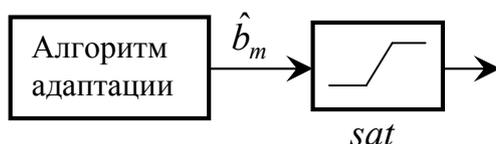


Рис.7.1 Схема установки блока насыщения в алгоритме генерирования  $\hat{b}_m$

Для формирования алгоритма адаптации, генерирующего оценки  $\hat{\psi}$  и  $\hat{b}_m$ , подставим (7.8) в (7.7) и получим динамическую модель ошибок с измеряемым выходом [1]:

$$\varepsilon = \frac{1}{K_M(s)} [-\tilde{\psi}^T \omega - \tilde{b}_m u] = \frac{1}{K_M(s)} [\tilde{\psi}_p^T \omega_p], \quad (7.9)$$

где  $\tilde{\psi} = \psi - \hat{\psi}$ ,  $\tilde{b}_m = b_m - \hat{b}_m$  — параметрические ошибки,  $\tilde{\psi}_p^T = [\tilde{\psi}^T, \tilde{b}_m]$ ,  $\omega_p^T = [-\omega^T, -u]$ .

В случае, если передаточная функция

$$H(s) = \frac{1}{K_M(s)}$$

является строго положительно вещественной (СПВ), то алгоритмы адаптации могут быть представлены в следующей форме [1, 7]:

$$\dot{\hat{\psi}}_p = \gamma \omega_p \varepsilon, \quad (7.10)$$

где  $\gamma > 0$  — коэффициент адаптации,  $\hat{\psi}_p^T = [\hat{\psi}^T, \hat{b}_m]$ . Определение СПВ функции приведено в приложении Б.

С помощью выражения (7.10) можно показать, что оценки  $\hat{\psi}$  и  $\hat{b}_m$ , необходимые для закона управления (7.8), генерируются согласно следующим правилам:

$$\dot{\hat{\psi}} = -\gamma \omega \varepsilon, \quad (7.11)$$

$$\dot{\hat{b}}_m = -\gamma u \varepsilon. \quad (7.12)$$

Таким образом, закон адаптивного управления, построенный на основе параметризованного представления (7.4), состоит из эталонной модели (7.5), настраиваемого регулятора (7.8) и алгоритмов адаптации (7.11), (7.12). Закон управления формируется на основе измерения выходной переменной и не использует информацию о состоянии объекта, что является его отличительной особенностью.

### Порядок выполнения работы

1. На основе фильтров (7.2), (7.3), настраиваемого регулятора (7.8), алгоритма адаптации (7.10) и данных, представленных в таблице 7.1, построить стабилизирующее адаптивное управление ( $g = 0$ ). Начальное условие в алгоритме адаптации (7.12)  $\hat{b}_m(0) = 1$ .

Провести моделирование для трех различных коэффициентов  $\gamma$ . По результатам моделирования построить три графика. На первом графике отобразить выходную переменную  $y$ . На втором графике — управляющее воздействие  $u$ . На третьем — оценки параметров  $\hat{\psi}_p$ .

В ходе моделирования обеспечить искусственное ограничение (блок насыщения Saturation в пакете MatLab/Simulink) оценки  $\hat{b}_m$  с целью предотвращения деления на ноль в выражении (7.8). Значение нижнего порога насыщения на выходе алгоритма адаптации (7.12) (см. рис. 7.1) принять равным  $0.1b_m$ .

2. На основе эталонной модели (7.5), фильтров (7.2), (7.3), настраиваемого регулятора (7.8), алгоритма адаптации (7.10) и данных, представленных в таблице 7.1, построить следящее адаптивное управление.

Провести моделирование для трех различных коэффициентов  $\gamma$ . По результатам моделирования построить три графика моделирования. На первом графике отобразить выходную переменную  $y$  и ее желаемое

значение  $y_M$ . На втором графике — управляющее воздействие  $u$ . На третьем — оценки параметров  $\hat{\psi}_p$ .

3. По результатам моделирования сделать выводы.

Таблица 7.1. Варианты заданий

Вар.	Коэффициенты модели объекта				Параметр полинома $K(s), k_0$	Коэффициенты полинома $K_M(s)$		Сигнал задания $g(t)$
	$a_0$	$a_1$	$b_0$	$b_1$		$k_{M1}$	$k_{M0}$	
1	0	0	1	1	1	0,2	0,01	$2\text{sign}(\cos t) + 3$
2	0	-1	1	2	2	$\sqrt{0,02}$	0,01	$\cos t + 3 \sin 2t + 5$
3	0	-2	1	3	3	0,4	0,04	$\text{sign}(\cos 2t) + 2$
4	-1	-2	1	4	4	$\sqrt{0,08}$	0,04	$\text{sign}(\sin 0.5t) + 2$
5	-2	-3	1	5	5	0,6	0,09	$10 \cos 0.5t + 2 \sin t + 12$
6	-3	-4	2	1	6	$\sqrt{0,18}$	0,09	$\text{sign}(\sin 0.5t) + 3$
7	-4	-5	3	2	7	0,8	0,16	$0.5\text{sign}(\sin 0.7t) + 1$
8	1	-2	4	1	8	$\sqrt{0,32}$	0,16	$5 \sin 0.5t + 4 \cos 0.1t + 8$
9	2	-3	4	2	9	1	0,25	$\text{sign}(\cos t) + 3$
10	3	-4	5	3	10	$\sqrt{0,5}$	0,25	$\text{sign}(\sin 2t) + 4$
11	4	-5	5	2	1	1,2	0,36	$\sin 5t + 0.5 \cos 0.2t + 2$
12	5	-6	6	4	2	$\sqrt{0,72}$	0,36	$2\text{sign}(\sin 0.4t) + 3$
13	6	-7	6	6	3	1,6	0,64	$3\text{sign}(\sin 0.5t) + 3$
14	4	-4	2	2	4	$\sqrt{1,28}$	0,64	$2 \sin 0.2t + \sin 0.1t + 8$
15	6	-5	2	3	5	2	1	$4\text{sign}(\cos 2t) + 5$
16	8	-6	5	5	6	$\sqrt{2}$	1	$3\text{sign}(\cos 0.2t) + 3$
17	9	-6	2	8	7	4	4	$\text{sign}(\sin 0.5t) + 2$
18	12	-7	3	1	8	$2\sqrt{2}$	4	$0.8 \sin 2t + \cos 0.8t + 2$
19	15	-8	3	4	9	6	9	$\text{sign}(\sin 0.3t) + 1.5$
20	16	-8	8	2	10	$3\sqrt{2}$	9	$7\text{sign}(\cos 0.9t) + 8$
21	-9	6	9	6	1	8	16	$0.4 \sin 3t + \cos 0.1t + 1.5$
22	-5	-6	8	1	2	$4\sqrt{2}$	16	$6\text{sign}(\sin 0.1t) + 9$
23	-6	-7	4	6	3	1	0,25	$2\text{sign}(\sin t) + 4$
24	-4	-4	4	8	4	$\sqrt{0,5}$	0,25	$9 \sin 0.2t + 9 \cos 0.1t + 15$
25	-6	-5	1	8	5	1,2	0,36	$4\text{sign}(\sin 6t) + 5$
26	-8	-6	2	5	6	$\sqrt{0,72}$	0,36	$4\text{sign}(\cos t) + 3$
27	-10	-7	8	8	7	1,6	0,64	$\sin 0.1t + \cos 5t + 2$
28	-9	-6	9	1	8	$\sqrt{1,28}$	0,64	$9\text{sign}(\sin 0.1t) + 12$
29	-15	-8	7	1	9	2	1	$3\text{sign}(\sin 4t) + 8$
30	-7	-10	9	9	10	$\sqrt{2}$	1	$7 \sin 0.3t + 8 \cos t + 20$

## Задачи и вопросы

1. Пояснить принятое в работе допущение о минимально фазовом объекте.

2. Пояснить принятое в работе допущение о свойстве строгой положительной вещественности передаточной функции  $H(s)$ .

3. На основе выражений (7.2)-(7.4) построить параметризованное представление производной выходной переменной  $\dot{y}$  для объекта вида

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 u$$

где  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_0$  — неизвестные параметры.

4. Обеспечит ли синтезированный в работе адаптивный регулятор цель управления, если объект неустойчив? Ответ пояснить.

5. Обязательно ли для достижения цели управления обеспечивать сходимость по параметрам  $\psi$  и  $b_m$ ? Ответ пояснить.

6. Для какого класса передаточных функций модели объекта представленный в работе адаптивный регулятор гарантирует достижение цели управления (7.6)?

7. Решить задачу адаптивного управления объектом вида

$$\dot{x}_1 = \theta x_1 + x_2 + u,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2,$$

$$y = x_1,$$

где  $\theta = 2$  — неизвестный параметр. Вектор состояния предполагается недоступным прямому измерению. Цель управления задается выражением (7.6), где

$$y_M = \frac{1}{s+1} [g],$$

$g = \sin t + 2$  — сигнал задания. В ходе синтеза регулятора свести к минимуму динамический порядок алгоритма адаптации и количество фильтров. Про моделировать замкнутую систему.

8. Решить задачу адаптивного управления объектом вида

$$\dot{x}_1 = x_2 + \theta u,$$

$$\dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2,$$

$$y = x_1,$$

где  $\theta = 1$  — неизвестный параметр. Вектор состояния предполагается недоступным прямому измерению. Цель управления задается выражением (7.6), где

$$y_M = \frac{1}{s+5}[g],$$

$g = \cos t + 0.5 \sin 0,5t + 2$  — сигнал задания. В ходе синтеза регулятора свести к минимуму динамический порядок алгоритма адаптации и количество фильтров. Промоделировать замкнутую систему.

9. Решить задачу адаптивного управления объектом вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \theta_1 x_2 + 4u, \\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_1 - 2x_2, \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

где  $\theta_1, \theta_2$  — неизвестные параметры. Вектор состояния предполагается недоступным прямому измерению. Цель управления задается выражением (7.6), где

$$y_M = \frac{1}{s+k_0}[g],$$

$g$  — сигнал задания. При каких  $\theta_1, \theta_2$  задача не имеет решение?

10. Решить задачу адаптивного управления объектом вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= \theta_1 x_1, \\ y &= \theta_2 x_1,\end{aligned}$$

где  $\theta_1, \theta_2$  — неизвестные параметры. Вектор состояния предполагается недоступным прямому измерению. Цель управления задается выражением (7.6), где

$$y_M = \frac{1}{s+k_0}[g],$$

$g$  — сигнал задания. При каких  $\theta_1, \theta_2$  задача не имеет решение?

### Задачи и вопросы повышенной сложности

1. Гарантирует ли синтезированный в работе регулятор цель управления, если в модели объекта

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_1 \dot{u} + b_0 u :$$

- а)  $a_1 = 9$   $a_0 = 20$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_0 = 1$ ;
- б)  $a_1 = 9$   $a_0 = 20$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_0 = -1$ ;
- в)  $a_1 = 9$   $a_0 = 20$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_0 = 4$ ;
- г)  $a_1 = 9$   $a_0 = 20$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_0 = 1$ ?

2. Доказать справедливость представления (7.4).

3. Решить задачу адаптивного управления по выходу для минимально фазового объекта вида

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_2 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_0 u ,$$

где  $a_0, a_1, b_0, b_1, b_2 \geq b_0 > 0$  — неизвестные параметры. Эталонная модель представлена как  $y_M = g$ , где  $g$  — сигнал задания.

4. Решить задачу адаптивного управления по выходной переменной  $y$  для минимально фазового объекта вида

$$\begin{aligned} \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y &= b_2 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_0 u , \\ \dot{z} &= -\alpha z + \beta y , \end{aligned}$$

где  $a_0, a_1, b_0, b_1, b_2 \geq b_0 > 0$  — неизвестные параметры,  $\alpha, \beta$  — известные положительные величины. Предполагается, что прямому измерению доступны только  $z$  и  $u$ . Цель управления задается равенством (7.6), где  $y_M$  генерируется эталонной следующей моделью:

$$y_M = g ,$$

где  $g$  — сигнал задания.

5. Гарантируется ли устойчивость замкнутой системы, если алгоритм адаптации (7.11) заменить на нелинейную обратную связь вида

$$\hat{\psi} = -\gamma \omega \varepsilon ?$$

Ответ пояснить.

**Лабораторная работа №8:** Адаптивное управление линейным объектом по выходу на основе алгоритма с расширенной ошибкой.

Цель работы: освоение метода расширенной ошибки в задачах адаптивного управления по выходу.

**Методические рекомендации.** До начала работы студенты должны ознакомиться с методом расширенной ошибки [2, 8] и его применением в задачах адаптивного управления линейными объектами. Лабораторная работа основана на результатах работы №7 и является ее логическим продолжением. Лабораторная работа рассчитана на 4 часа.

**Теоретические сведения.** Решение задачи адаптивного управления по выходу, приведенное в работе №7, предполагает ограниченный класс объектов вида (7.1). Класс ограничивается СПВ передаточными функциями. Так, например, передаточная функция модели ошибки (7.9)

$$H(s) = \frac{1}{K_M(s)}$$

при порядке полинома  $K_M(s)$  больше единицы не является СПВ, а значит алгоритм адаптации (7.10) неприменим.

Для решения этой проблемы преобразуем динамическую модель ошибки (7.9) следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{K_M(s)} [\tilde{\psi}_p^T \omega_p] = \frac{1}{K_M(s)} [\psi_p^T \omega_p - \hat{\psi}_p^T \omega_p] = \psi_p^T \frac{1}{K_M(s)} [\omega_p] - \frac{1}{K_M(s)} [\hat{\psi}_p^T \omega_p] = \\ &= (\tilde{\psi}_p^T + \hat{\psi}_p^T) \frac{1}{K_M(s)} [\omega_p] - \frac{1}{K_M(s)} [\hat{\psi}_p^T \omega_p] = \tilde{\psi}_p^T \frac{1}{K_M(s)} [\omega_p] + \hat{\psi}_p^T \frac{1}{K_M(s)} [\omega_p] - \\ &\quad - \frac{1}{K_M(s)} [\hat{\psi}_p^T \omega_p] \end{aligned}$$

С учетом обозначения  $\bar{\omega}_p = \frac{1}{K_M(s)} [\omega_p]$  перепишем полученный результат:

$$\varepsilon = \tilde{\psi}_p^T \bar{\omega}_p + \hat{\psi}_p^T \bar{\omega}_p - \frac{1}{K_M(s)} [\hat{\psi}_p^T \omega_p]. \quad (8.1)$$

Введем в рассмотрение сигнал расширенной ошибки:

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon - \hat{\psi}_p^T \bar{\omega}_p + \frac{1}{K_M(s)} [\hat{\psi}_p^T \omega_p] . \quad (8.2)$$

Тогда с учетом (8.1) последнее равенство примет следующий вид:

$$\hat{\varepsilon} = \tilde{\psi}_p^T \bar{\omega}_p . \quad (8.3)$$

Последнее выражение представляет собой статическую модель ошибки, на базе которой строится алгоритм адаптации

$$\dot{\hat{\psi}}_p = \gamma \frac{\bar{\omega}_p}{1 + \bar{\omega}_p^T \bar{\omega}_p} \hat{\varepsilon} .^4 \quad (8.4)$$

Таким образом, закон адаптивного управления состоит из настраиваемого регулятора (7.8), расширенной ошибки (8.2) и алгоритма адаптации (8.4). Алгоритм адаптации генерирует настраиваемые параметры регулятора, содержащиеся в векторе  $\hat{\psi}_p^T = [\hat{\psi}^T, \hat{b}_m]$ .

### Порядок выполнения работы

1. На основе фильтров (7.2), (7.3), настраиваемого регулятора (7.8), алгоритма адаптации (8.4), расширенной ошибки (8.2) и данных, представленных в таблице 8.1, построить стабилизирующее адаптивное управление ( $g = 0$ ). Начальные условия в алгоритме адаптации (8.4)  $\hat{b}_m(0) = 1$ .

Провести моделирование для трех различных коэффициентов  $\gamma$ . По результатам моделирования построить три графика. На первом графике отобразить выходную переменную  $y$ . На втором графике — управляющее воздействие  $u$ . На третьем — оценки параметров  $\hat{\psi}_p$ .

В ходе моделирования обеспечить искусственное ограничение (блок насыщения Saturation в пакете MatLab/Simulink) оценки  $\hat{b}_m$  с целью предотвращения деления на ноль в выражении (7.8). Значение нижнего порога насыщения величины  $\hat{b}_m$  в (7.8) принять равным  $0.1b_m$ .

---

<sup>4</sup> В алгоритм адаптации вводится нормирующий множитель  $1/(1 + \bar{\omega}_p^T \bar{\omega}_p)$  с целью ограничения скорости настройки параметров при неограниченном росте  $\bar{\omega}_p$ , что гарантирует стремление к нулю расширенной и сигнальной ошибок.

2. На основе эталонной модели (7.5), фильтров (7.2), (7.3), настраиваемого регулятора (7.8), алгоритма адаптации (8.4) и данных, представленных в таблице 8.1, построить следящий адаптивный регулятор.

Провести моделирование для трех различных коэффициентов  $\gamma$ . По результатам моделирования построить три графика моделирования. На первом графике отобразить выходную переменную  $y$  и ее желаемое значение  $y_M$ . На втором графике — управляющее воздействие  $u$ . На третьем — оценки параметров  $\hat{\psi}_p$ .

3. По результатам моделирования сделать выводы.

Таблица 8.1. Варианты заданий

Вар.	Коэффициенты модели объекта			Параметры полинома $K_M(s)$		Коэффициенты полинома $K(s)$		Сигнал задания $g(t)$
	$a_0$	$a_1$	$b_0$	$k_{M1}$	$k_{M0}$	$k_1$	$k_0$	
1	0	0	1	2	1	0,2	0,01	$2\text{sign}(\cos t) + 3$
2	0	-1	1	4	4	$\sqrt{0,02}$	0,01	$\cos t + 3\sin 2t + 5$
3	0	-2	1	6	9	0,4	0,04	$\text{sign}(\cos 2t) + 2$
4	-1	-2	1	8	16	$\sqrt{0,08}$	0,04	$\text{sign}(\sin 0.5t) + 2$
5	-2	-3	1	10	25	0,6	0,09	$10\cos 0.5t + 2\sin t + 12$
6	-3	-4	2	12	36	$\sqrt{0,18}$	0,09	$\text{sign}(\sin 0.5t) + 3$
7	-4	-5	3	2	1	0,8	0,16	$0.5\text{sign}(\sin 0.7t) + 1$
8	1	-2	4	4	4	$\sqrt{0,32}$	0,16	$5\sin 0.5t + 4\cos 0.1t + 8$
9	2	-3	4	6	9	1	0,25	$\text{sign}(\cos t) + 3$
10	3	-4	5	8	16	$\sqrt{0,5}$	0,25	$\text{sign}(\sin 2t) + 4$
11	4	-5	5	10	25	1,2	0,36	$\sin 5t + 0.5\cos 0.2t + 2$
12	5	-6	6	12	36	$\sqrt{0,72}$	0,36	$2\text{sign}(\sin 0.4t) + 3$
13	6	-7	6	2	1	1,6	0,64	$3\text{sign}(\sin 0.5t) + 3$
14	4	-4	2	4	4	$\sqrt{1,28}$	0,64	$2\sin 0.2t + \sin 0.1t + 8$
15	6	-5	2	6	9	2	1	$4\text{sign}(\cos 2t) + 5$
16	8	-6	5	8	16	$\sqrt{2}$	1	$3\text{sign}(\cos 0.2t) + 3$
17	9	-6	2	10	25	4	4	$\text{sign}(\sin 0.5t) + 2$
18	12	-7	3	12	36	$2\sqrt{2}$	4	$0.8\sin 2t + \cos 0.8t + 2$
19	15	-8	3	2	1	6	9	$\text{sign}(\sin 0.3t) + 1.5$
20	16	-8	8	4	4	$3\sqrt{2}$	9	$7\text{sign}(\cos 0.9t) + 8$
21	-9	6	9	6	9	8	16	$0.4\sin 3t + \cos 0.1t + 1.5$
22	-5	-6	8	8	16	$4\sqrt{2}$	16	$6\text{sign}(\sin 0.1t) + 9$
23	-6	-7	4	10	25	1	0,25	$2\text{sign}(\sin t) + 4$

24	-4	-4	4	12	36	$\sqrt{0,5}$	0,25	$9 \sin 0.2t + 9 \cos 0.1t + 15$
25	-6	-5	1	2	1	1,2	0,36	$4 \operatorname{sign}(\sin 6t) + 5$
26	-8	-6	2	4	4	$\sqrt{0,72}$	0,36	$4 \operatorname{sign}(\cos t) + 3$
27	-10	-7	8	6	9	1,6	0,64	$\sin 0.1t + \cos 5t + 2$
28	-9	-6	9	8	16	$\sqrt{1,28}$	0,64	$9 \operatorname{sign}(\sin 0.1t) + 12$
29	-15	-8	7	10	25	2	1	$3 \operatorname{sign}(\sin 4t) + 8$
30	-7	-10	9	12	36	$\sqrt{2}$	1	$7 \sin 0.3t + 8 \cos t + 20$

### Задачи и вопросы

1. С какой целью формируется расширенная ошибка?
2. Работоспособен ли алгоритм (8.2), (8.4), если в (7.9) передаточная функция  $H(s)$  неминимально фазовая?
3. Гарантируется ли асимптотическое стремление к нулю ошибок  $\hat{\varepsilon}$  и  $\varepsilon$  в алгоритме (8.2)-(8.4)? Ответ пояснить.
4. Гарантируется ли экспоненциальное стремление к нулю ошибки  $\varepsilon$  в алгоритме (8.2)-(8.4)? Ответ пояснить.
5. Решить задачу адаптивного слежения для объекта вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \theta x + u, \\ y &= x,\end{aligned}$$

где  $\theta$  — неизвестный параметр, величина  $y$  измеряется с помощью динамического сенсора

$$z = \frac{\beta}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} [y]$$

с известными положительными параметрами  $\alpha_1$ ,  $\alpha_0$ ,  $\beta$ . Доступны прямому измерению только величины  $z$  и  $u$ . Цель управления заключается в обеспечении целевого равенства (1.2).

6. Решить задачу адаптивного слежения для объекта вида

$$y = \frac{K}{Ts + 1} [U],$$

где  $K \geq K_0 > 0$ ,  $T$  — неизвестные параметры, величина  $U$  является выходом исполнительного механизма, модель которого задается уравнением вида

$$U = \frac{\beta}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} [u].$$

Параметры  $\alpha_1$ ,  $\alpha_0$ ,  $\beta$  предполагаются известными и положительными. Доступны прямому измерению только величины  $y$  и  $u$ . Цель управления заключается в обеспечении целевого равенства (1.2).

7. Решить задачу адаптивного слежения для объекта вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \theta x + U, \\ y &= x,\end{aligned}$$

где  $\theta$  — неизвестный параметр, величина  $y$  измеряется с помощью динамического сенсора

$$z = \frac{\alpha}{s + \alpha} [y]$$

с известным положительным параметром  $\alpha$ . Величина  $U$  является выходом исполнительного механизма, модель которого задается уравнением первого порядка:

$$U = \frac{\beta}{s + \beta} [u].$$

Параметр  $\beta$  является положительным и известным. Предполагается, что только переменные  $z$  и  $u$  доступны прямому измерению. Цель управления заключается в обеспечении целевого равенства (1.2).

8. С помощью метода расширенной ошибки решить задачу адаптивного слежения для объекта вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + u, \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

где  $\theta_1 = 2$ ,  $\theta_2 = 6$  — неизвестные параметры, величина  $y$  измеряется с помощью динамического сенсора

$$z = \frac{1}{3s + 1} [y].$$

Предполагается, что доступны прямому измерению только переменные  $z$  и  $u$ . Цель управления заключается в обеспечении целевого равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_M - y) = 0,$$

где

$$y_M = \frac{1}{(s+1)^2} [\sin t + 0,5 \cos 2t + 3].$$

Промоделировать работу замкнутой системы.

9. С помощью метода расширенной ошибки решить задачу адаптивного слежения для объекта вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \theta_1 x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_1 + u, \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

где  $\theta_1 = 1$ ,  $\theta_2 = 8$  — неизвестные параметры, величина  $u$  измеряется с помощью динамического сенсора

$$z = \frac{1}{s+1} [y].$$

Предполагается, что доступны прямому измерению только переменные  $z$  и  $u$ . Цель управления заключается в обеспечении целевого равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_M - y) = 0,$$

где

$$y_M = \frac{1}{(s+1)^2} [\cos t + 2].$$

Промоделировать работу замкнутой системы.

10. С помощью метода расширенной ошибки решить задачу адаптивного слежения для объекта вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \theta_1 x_1 + u, \\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_2 + 4u, \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

где  $\theta_1 = 1$ ,  $\theta_2 = 2$  — неизвестные параметры, величина  $u$  измеряется с помощью динамического сенсора

$$z = \frac{1}{s+1} [y].$$

Предполагается, что доступны прямому измерению только переменные  $z$  и  $u$ . Цель управления заключается в обеспечении целевого равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_M - y) = 0,$$

где

$$y_M = \frac{1}{(s+1)} [\cos t + 2].$$

Промоделировать работу замкнутой системы.

### *Задачи и вопросы повышенной сложности*

1. Построить алгоритм адаптации с расширенной ошибкой для статической модели вида

$$\varepsilon = d\tilde{\theta}^T \omega,$$

где  $d \geq d_0 > 0$  — неизвестный постоянный параметр,  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  — вектор параметрических ошибок,  $\omega$  — вектор измеряемых функций.

2. Построить алгоритм адаптации с расширенной ошибкой для динамической модели с измеряемым выходом вида

$$\varepsilon = dH(s)[\tilde{\theta}^T \omega],$$

где  $d \geq d_0 > 0$  — неизвестный постоянный параметр,  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  — вектор параметрических ошибок,  $\omega$  — вектор измеряемых функций,  $H(s)$  — гурвицева передаточная функция.

3. Решить задачу адаптивного слежения для объекта вида

$$\dot{y} = \theta_1 y + \theta_2 u,$$

где  $\theta_1, \theta_2 \geq \theta_0 > 0$  — неизвестные параметры. Величина  $y$  измеряется с помощью динамического сенсора

$$z = \frac{\beta}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} [y]$$

с известными положительными параметрами  $\alpha_1, \alpha_0, \beta$ . Доступны прямому измерению величины  $z$  и  $u$ . Цель управления заключается в обеспечении целевого равенства (1.2).

4. С помощью метода расширенной ошибки решить задачу синтеза адаптивного наблюдателя состояния для объекта вида

$$\dot{x} = \theta_1 x + \theta_2 u,$$

$$y = x,$$

где  $\theta_1, \theta_2$  — неизвестные параметры, величина  $y$  измеряется с помощью динамического сенсора

$$z = \frac{\beta}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} [y]$$

с известными положительными параметрами  $\alpha_1, \alpha_0, \beta$ . Доступны прямому измерению величины  $z$  и  $u$ . Цель управления заключается в построении оценки  $\hat{x}$  такой, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x - \hat{x}) = 0.$$

5. Показать, что именно при нормировании регрессора  $\bar{\omega}_p$  в выражении (8.4) гарантируется ограниченность всех сигналов в замкнутой системе управления.

## Лабораторная работа №9. Синтез наблюдателя состояния модели генератора внешнего воздействия

Цель работы: освоение процедуры синтеза наблюдателя состояния модели генератора внешнего воздействия на основе принципа параметризации.

**Методические рекомендации.** До начала работы студенты должны ознакомиться с подходом построения редуцированных наблюдателей [4, 5] и принципом параметризации выходной переменной линейного объекта (см. лабораторную работу №5). Лабораторная работа рассчитана на 2 часа.

### Теоретические сведения.

*Постановка задачи.* Рассмотрим возмущенный объект управления вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu + df, \quad x(0) \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (9.1)$$

где  $x \in R^n$  — измеряемый вектор состояния,  $u, y$  — измеряемые вход и выход объекта,  $A, b, C, d$  — известные матрицы соответствующих размерностей,  $f$  — неизмеряемый выход автономного генератора внешнего воздействия, формируемый автономной моделью вида

$$f^{(r)} + l_{r-1}f^{(r-1)} + l_{r-2}f^{(r-2)} + \dots + l_0f = 0, \quad (9.2)$$

$f^{(i)}(0), i = \overline{0, r-1}$ , где  $l_i, i = \overline{0, r-1}$  — неизвестные параметры модели.

Требуется построить оценку  $\hat{f}$  такую, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f - \hat{f}) = 0.$$

*Решение задачи.* На основе принципа параметризации выходной переменной объекта, изложенного в лабораторной работе №5, представим величину  $f$  в следующей форме:

$$f = (k_{fr-1} - l_{r-1}) \frac{s^{r-1}}{K_f(s)} [f] + (k_{fr-2} - l_{r-2}) \frac{s^{r-2}}{K_f(s)} [f] + \dots + (k_{f0} - l_0) \frac{1}{K_f(s)} [f]$$

или

$$f = \theta_f^T \xi_f, \quad (9.3)$$

где

$$\theta_f^T = [k_{f0} - l_0, k_{f1} - l_1, \dots, k_{fr-1} - l_{r-1}],$$

$$\xi_f^T = \left[ \frac{1}{K_f(s)} [f], \frac{s}{K_f(s)} [f], \dots, \frac{s^{n-1}}{K_f(s)} [f] \right].$$

Вектор  $\xi_f$  является вектором состояния фильтра

$$\dot{\xi}_f = A_{0f} \xi_f + b_{0f} f, \quad (9.4)$$

где  $A_{0f} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -k_{fr-1} & -k_{fr-2} & \dots & -k_{f0} \end{bmatrix}$ ,  $b_{0f} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  — известные матрицы.

Важно отметить, что вектор состояния  $\xi_f$  не доступен прямому измерению, в связи с чем возникает необходимость в его оценке. В [2] предлагается следующая структура наблюдателя вектора  $\xi_f$ :

$$\hat{\xi}_f = \eta + Nx, \quad (9.5)$$

$$\dot{\eta} = A_{0f} \eta + (A_{0f} N - NA)x - Nbu, \quad (9.6)$$

где матрица  $N$  находится из равенства

$$Nd = b_{0f}.$$

Для доказательства сходимости оценки  $\hat{\xi}_f$  к неизмеряемому вектору  $\xi_f$  сформируем ошибку наблюдения  $e = \xi_f - \hat{\xi}_f$  и продифференцируем ее по времени с учетом (9.1), (9.4), (9.5), (9.6):

$$\begin{aligned} \dot{e} = \dot{\xi}_f - \dot{\hat{\xi}}_f &= A_{0f} \xi_f + b_{0f} f - \dot{\eta} - Nx = A_{0f} \xi_f + b_{0f} f - A_{0f} \eta - \\ &- (A_{0f} N - NA)x + Nbu - NAx - Nbu - Ndf = A_{0f} \xi_f - A_{0f} \hat{\xi}_f = A_{0f} e. \end{aligned}$$

В итоге имеем:

$$\dot{e} = A_{0f} e,$$

откуда в силу гурвицевости матрицы  $A_{0f}$  следует экспоненциальная сходимость ошибки  $e$  к нулевому вектору.

На основе соотношения (9.3) и наблюдателя (9.5), (9.6) формируется оценка выходной переменной генератора внешнего воздействия:

$$\hat{f} = \theta_f^T \hat{\xi}_f. \quad (9.7)$$

Выражение (9.7) является результатом линейной параметризации по параметрам  $\theta_f$  оценки внешнего сигнала  $\hat{f}$  и позволяет в дальнейшем обеспечить компенсацию величины  $f$  в задачах адаптивного управления в том случае, когда параметры  $\theta_f$  будут неизвестными.

### Порядок выполнения работы

1. На основе данных, приведенных в таблице 9.1, построить модель генератора возмущения, рассчитать параметры вектора  $\theta_f$ , найти матрицу  $N$  и построить наблюдатель внешнего воздействия.

Провести моделирование наблюдателя в программе Simulink, по результатам которого построить два графика. На одном графике построить сигналы  $f$  и  $\hat{f}$ , на другом —  $\xi_f$  и  $\hat{\xi}_f$ . В качестве входного сигнала взять  $u = 4 \sin t + 2 \cos 2t$ .

2. Повторить эксперимент п.п. 1 для  $u = 1$ .

3. Повторить эксперимент п.п. 1 при увеличенных значениях коэффициентов ( $k_{f1}$  в 10 раз,  $k_{f0}$  в 100 раз).

4. По результатам моделирования сделать выводы.

Таблица 9.1. Варианты заданий

Вар.	Коэффициенты модели объекта			Функция возмущающего воздействия $f$	Коэффициенты полинома $K_f(s)$	
	$a_0$	$a_1$	$b_0$		$k_{f1}$	$k_{f0}$
1	1	1	1	$\sin t$	0,2	0,01
2	2	1	1	$\cos 2t$	$\sqrt{0,02}$	0,01
3	3	1	1	$\sin(3t + 2)$	0,4	0,04
4	4	1	1	$\cos(t + 1)$	$\sqrt{0,08}$	0,04
5	5	1	1	$2 \sin t$	0,6	0,09
6	1	2	1	$3 \cos 4t$	$\sqrt{0,18}$	0,09
7	2	2	1	$4 \sin(t + 1)$	0,8	0,16
8	3	2	1	$10 \cos(8t + 1)$	$\sqrt{0,32}$	0,16
9	4	2	2	$2 \sin t$	1	0,25
10	5	2	2	$5 \cos 3t$	$\sqrt{0,5}$	0,25
11	1	3	2	$2 \sin(8t + 1)$	1,2	0,36

12	2	3	2	$6 \cos(3t + 3)$	$\sqrt{0,72}$	0,36
13	3	3	2	$15 \sin 9t$	1,6	0,64
14	4	3	2	$7 \cos 3t$	$\sqrt{1,28}$	0,64
15	5	3	2	$9 \sin(t + 0,5)$	2	1
16	1	4	3	$0.5 \cos(t + 1)$	$\sqrt{2}$	1
17	2	4	3	$3 \sin 5t$	4	4
18	3	4	3	$4 \cos 8t$	$2\sqrt{2}$	4
19	4	4	3	$7 \sin(9t + 2,5)$	6	9
20	5	4	3	$5 \cos(5t + 1,5)$	$3\sqrt{2}$	9
21	1	5	3	$20 \sin t$	8	16
22	2	5	4	$2 \cos 2t$	$4\sqrt{2}$	16
23	3	5	4	$8 \sin(3t + 0,5)$	1	0,25
24	4	5	4	$10 \cos(2t + 1)$	$\sqrt{0,5}$	0,25
25	5	5	4	$12 \sin 3t$	1,2	0,36
26	1	6	4	$6 \cos 5t$	$\sqrt{0,72}$	0,36
27	2	6	5	$8 \sin(t + 1)$	1,6	0,64
28	3	6	5	$8 \cos(6t + 2)$	$\sqrt{1,28}$	0,64
29	4	6	5	$\sin 3t$	2	1
30	5	6	5	$9 \cos 4t$	$\sqrt{2}$	1

### Задачи и вопросы

1. Для объекта

$$\begin{cases} \dot{x} = -6x + u + 2f \\ y = x \end{cases}$$

построить параметризованное представление неизмеряемого внешнего воздействия  $f$ , если известно, что  $f$  является выходом линейной модели автономного генератора не выше второго порядка. Измерению доступны величины  $y$  и  $u$ .

2. Каким образом управляющий сигнал  $u$  влияет на ошибку наблюдения  $e$ ?

3. Каким образом можно ускорить сходимость вектора  $\hat{\xi}_f$  к вектору  $\xi_f$ ?

4. Какие из ниже перечисленных функций  $f$  можно восстановить с помощью наблюдателя (9.5)-(9.7):



Сравнить в программе Simulink функцию  $f$  и ее оценку  $\hat{f}$ , приняв  $u = 10 \cos 3t$ .

10. При каких матрицах  $d$  приведенное в работе решение задачи наблюдения неприменимо? Ответ пояснить.

**Лабораторная работа № 10.** Адаптивная компенсация внешнего возмущения.

Цель работы: освоение принципа адаптивной компенсации возмущения на примере решения задачи стабилизации многомерного линейного объекта.

**Методические рекомендации.** До начала работы студенты должны ознакомиться с подходом построения наблюдателей внешних воздействий, приведенном в лабораторной работе №9, и методом непосредственной компенсации [2, 3, 6]. Лабораторная работа рассчитана на 2 часа.

### **Теоретические сведения.**

*Постановка задачи.* Рассмотрим задачу компенсации внешнего возмущения, действующего на объект вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu + df, & x(0) \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (10.1)$$

где  $x \in R^n$  — измеряемый вектор состояния,  $u$ ,  $y$  — измеряемые вход и выход объекта,  $A$ ,  $b$ ,  $C$ ,  $d$  — известные матрицы соответствующих размерностей,  $f$  — неизмеряемый выход автономного генератора внешнего воздействия, формируемый моделью (9.2).

Примем допущение, что сигналы  $u$  и  $f$  согласованы, т.е.  $b = d^5$ .

Цель управления заключается в построении управления, компенсирующего неизвестное возмущение, так, чтобы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\|x(t)\|) = 0. \quad (10.2)$$

*Решение задачи.* Воспользуемся решением задачи параметризации сигнала возмущения, приведенном в лабораторной работе №9. С помощью наблюдателя (9.5)-(9.7), в котором матрица  $N$  находится из равенства  $Nb = b_{0f}$ , представим объект (10.1) в следующей форме:

$$\dot{x} = Ax + b(u + \theta_f^T \hat{\xi}_f), \quad x(0). \quad (10.3)$$

Далее, используя метод непосредственной компенсации, построим стабилизирующее управление в виде

---

<sup>5</sup> Допущение согласования возмущения и управляющего воздействия принято для наиболее простого пояснения принципа компенсации. Случай нарушения условий согласования выходит за рамки учебного курса и может быть подробно изучен, например, в [2]

$$u = -Kx - \hat{\theta}_f^T \hat{\xi}_f, \quad (10.4)$$

где  $K$  — матрица линейных обратных стационарных связей такая, что матрица замкнутой системы  $A_M = A - bK$  гурвицева, и рассчитывается методом модального управления [4, 5],  $\hat{\theta}_f$  — вектор оценки  $\theta_f$ .

Подставляя (10.4) в (10.3), получаем динамическую модель ошибок с измеряемым состоянием:

$$\dot{x} = A_M x + b \tilde{\theta}_f^T \hat{\xi}_f, \quad (10.5)$$

где  $\tilde{\theta}_f = \theta_f^T - \hat{\theta}_f^T$  — вектор параметрических ошибок. Структура модели (10.5) позволяет сформировать алгоритм адаптации вида (см. принцип построения алгоритма адаптации в лабораторной работе №3)

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma \hat{\xi}_f b^T P x, \quad \hat{\theta}(0) = 0, \quad (10.6)$$

где  $P$  — симметричная положительно определенная матрица, являющаяся решением уравнения Ляпунова:

$$A_M^T P + P A_M = -Q, \quad (10.7)$$

где  $Q$  — произвольно выбранная симметричная положительно определенная матрица.

Свойства алгоритма адаптации (10.6) аналогичны свойствам алгоритма (3.13).

### Порядок выполнения работы

1. Используя данные из таблицы 10.1, проверить объект (10.1) на предмет управляемости. Построить матрицу линейных обратных стационарных связей  $K$  с помощью метода модального управления [4, 5]. Матрица  $K$  может быть найдена как

$$K = HM^{-1},$$

где  $H$  — матрица, выбранная из условия полной управляемости пары  $(A, H)$ ,  $M$  находится из решения уравнения Сильвестра:

$$AM - MA_{\text{жс}} = bH.$$

Матрица  $A_{жс}$  определяет желаемое качество поведения системы при отсутствии возмущения и составляется из коэффициентов стандартного полинома (например, Ньютона или Баттерворта) в следующей форме:

$$A_{жс} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\omega_0^n & -C_1\omega_0^{n-1} & -C_2\omega_0^{n-2} & \dots & -C_{n-1}\omega_0 \end{bmatrix},$$

где  $C_i, i = \overline{1, n-1}$  — коэффициенты стандартного полинома, выбираемые на основе максимального перерегулирования,  $\omega_0$  — среднегеометрический корень, рассчитываемый как

$$\omega_0 = \frac{t_n^*}{t_n},$$

где  $t_n$  — желаемое время переходного процесса, задаваемое в таблице 10.1,  $t_n^*$  — нормированное время переходного процесса.

2. На основе данных, приведенных в таблице 9.1, и результатов выполнения лабораторной работы №9 построить наблюдатель вектора состояния модели возмущения  $\hat{\xi}_f$  в форме (9.5), (9.6).

3. Построить и промоделировать замкнутую систему с адаптивным компенсирующим управлением (10.4), (10.6). Для двух различных коэффициентов адаптации  $\gamma$  построить два графика. На первом графике представить компоненты вектора  $x$ . На втором графике — управляющее воздействие  $u$ .

4. По результатам моделирования сделать выводы.

Таблица 10.1. Варианты заданий

Вар.	Матрица $A$	Матрица $b$	Время переходного процесса, $t_n$	Максимальное перерегулирование $\sigma$ , %
1	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	0.16	0
2	$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	0.3	0
3	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	0.9	0
4	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$	0.2	0
5	$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$	0.6	0
6	$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$	0.3	0
7	$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	0.7	0
8	$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}$	0.1	0
9	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$	0.9	0
10	$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$	3.5	15
11	$\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$	0.6	15
12	$\begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	0.9	15
13	$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$	0.4	15
14	$\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$	0.2	15
15	$\begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$	0.5	15
16	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$	0.5	15

17	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 15 \\ 1 \end{bmatrix}$	0.45	15
18	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$	0.15	15
19	$\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	0.7	15
20	$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -7 & -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	1.2	0
21	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$	1.5	0
22	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$	0.8	0
23	$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$	0.9	0
24	$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix}$	0.2	0
25	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$	0.5	0
26	$\begin{bmatrix} -12 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$	0.9	0
27	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 13 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$	1.3	0
28	$\begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$	1.6	0
29	$\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}$	0.75	15
30	$\begin{bmatrix} 9 & 9 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$	0.65	15

### Задачи и вопросы

1. Как будет выглядеть алгоритм адаптивного робастного управления для объекта (10.1), если в возмущении  $f$  будет присутствовать нерегулярная составляющая, не подлежащая компенсации?

2. Возможна ли компенсация возмущения в объекте рассмотренным в работе способом, если

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \ 1]?$$

3. Решить задачу компенсации возмущения для объекта вида

$$\dot{x} = x + u + f,$$

где  $f = \sin \theta t$ . Значение частоты  $\theta$  неизвестно.

4. Решить задачу компенсации возмущения для нелинейного объекта вида

$$\dot{x} = x^2 + u + f + \theta_1,$$

где  $f = \cos \theta_2 t$ , параметры  $\theta_1, \theta_2$  полагаются неизвестными.

5. Решить задачу компенсации возмущения для нелинейного объекта вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - 2x_2 + u + f, \end{cases}$$

где  $f = \cos \theta t$ . Частота  $\theta$  неизвестна. Параметры фильтров при параметризации переменной  $f$  и параметры гурвицевой матрицы  $A_{жс}$  выбрать произвольно.

Промоделировать работу замкнутой системы и построить графики  $x_1$  и  $x_2$  при отсутствии компенсирующей компоненты и при ее наличии.

6. Для объекта

$$y = \frac{2}{s^2 + 1}[u + 3f],$$

построить компенсатор неизменяемого внешнего воздействия  $f = A \sin(\omega t + \varphi)$ . Параметры  $A = 4, \omega = 1, \varphi = \pi/4$  неизвестны. Измерению доступны величины  $y, \dot{y}$  и  $u$ . Параметры фильтров при параметризации переменной  $f$ , а также параметры гурвицевой матрицы  $A_{жс}$  выбрать произвольно.

Промоделировать работу замкнутой системы и построить графики  $y$  при отсутствии компенсирующей компоненты и при ее наличии.

7. Используя предложенный в работе метод, решить задачу слежения выхода состояния объекта

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + u, \\ y = x_1 \end{cases}$$

за сигналом задания  $g = A \sin \omega t$  с неизвестной частотой  $\omega = 2$  и неизвестной амплитудой  $A = 1$ .

Параметры фильтров при параметризации переменной  $g$ , а также параметры гурвицевой матрицы  $A_{жс}$  выбрать произвольно.

Промоделировать работу замкнутой системы и построить графики  $e_1 = g - y$ ,  $e_2$  и график оценки частоты  $\hat{\omega}$ .

*Пояснение:* для решения задачи необходимо свести задачу слежения к задаче компенсации следующим образом:

а. Построить модель генератора сигнала задания (по аналогии с моделью 9.2):

$$\ddot{g} + \omega^2 g = 0; \quad (10.8)$$

б. Сформировать вектор ошибок слежения

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ \dot{g} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};$$

в. Произвести замену базиса в объекте (“смещение вектора  $x$ ”)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ \dot{g} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{g} - \dot{e}_1 = \dot{g} - e_2, \\ \ddot{g} - \dot{e}_2 = -g + e_1 - 2\dot{g} + 2e_2 + u. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2, \\ \dot{e}_2 = -e_1 - 2e_2 - u + \ddot{g} + 2\dot{g} + g. \end{cases}$$

С учетом обозначения  $f_g = \ddot{g} + 2\dot{g} + g = 2\dot{g} + (1 - \omega^2)g$  модель ошибок примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2, \\ \dot{e}_2 = -e_1 - 2e_2 - u + f_g. \end{cases} \quad (10.9)$$

Нетрудно видеть, что полученная модель (10.9) принадлежит к классу моделей (10.1) ( $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, b = d = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, x = e, f = -f_g$ ).

Таким образом, задача слежения сведена к задаче компенсации, что позволяет применить рассмотренный в работе алгоритм компенсации.

8. С учетом пояснения к задаче №7 решить задачу слежения выхода объекта

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 + u, \\ y = x_1 \end{cases}$$

за сигналом задания  $g = \cos \omega t$  с неизвестной частотой  $\omega = 1$ .

Параметры фильтров при параметризации переменной  $g$ , а также параметры гурвицевой матрицы  $A_{жс}$  выбрать произвольно.

Промоделировать работу замкнутой системы и построить графики  $e_1 = g - y$ ,  $e_2$  и график оценки частоты  $\hat{\omega}$ .

9. Для объекта

$$y = \frac{2s + 4}{s^2 + s + 1} [u + f]$$

построить компенсатор неизмеряемого внешнего воздействия  $f = A \cos \omega t$ . Параметры  $A = 1$ ,  $\omega = 4$  неизвестны. Измерению доступны величины  $y$ ,  $\dot{y}$  и  $u$ . Параметры фильтров при параметризации переменной  $f$ , а также параметры гурвицевой матрицы  $A_{жс}$  выбрать произвольно.

Промоделировать работу замкнутой системы и построить графики  $y$  при отсутствии компенсирующей компоненты и при ее наличии.

10. Решить задачу №9 при условии, что объект описывается уравнением вида

$$y = \frac{2s^2 + 4s + 4}{s^2 + s + 1} [u + f].$$

## Список литературы

1. Никифоров В.О., Ушаков А.В. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность. — СПб.: СПбГИТМО (ТУ), 2002. — 232с., ил.29.
2. Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. — СПб: Наука, 2003. — С.282.
3. Narendra K.S., Annaswamy A.M. Stable Adaptive Systems. — Englewood Cliffs. N.J.: Prentice-Hall, 1989. — P.495.
4. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы. — СПб.: Питер, 2005 — 336с.: ил. — (Серия “Учебное пособие”).
5. Григорьев В.В., Журавлева Н.В., Лукьянова Г.В., Сергеев К.А. Синтез систем автоматического управления методом модального управления. — СПб.: СПбГУ ИТМО, 2007.
6. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами / Серия “Анализ и синтез нелинейных систем”; под общей редакцией Леонова Г.А. и Фрадкова А.Л. — СПб.: Наука, 2000. — 549 с., ил. 82.
7. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. — М.: Наука, 1981.
8. Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Системы адаптивного управления с расширенной ошибкой // Автоматика и телемеханика. — 1994. — № 9. — С. 3–22.
9. Ioannou P. A., Kokotovic P. V. Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control // Automatica. — 1984. Vol. 20. — P. 583–594.
10. Aström K.J., Wittenmark B. Adaptive control. — N.Y.: Dover Publications, Inc., 1995. — P.590.

**Приложение А. Образец титульного листа**

**Министерство образования и науки Российской Федерации**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧЕРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ  
ТЕХНОЛОГИЙ,  
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**

Кафедра Систем Управления и Информатики Группа \_\_\_\_\_

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № \_\_\_\_\_**

**по курсу: «Адаптивное и робастное управление»**

\_\_\_\_\_ (наименование работы)

Вариант № \_\_\_\_\_

Автор работы: \_\_\_\_\_ (Ф.И.О.)

\_\_\_\_\_  
Преподаватель: \_\_\_\_\_ (Ф.И.О.)

\_\_\_\_\_ “ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ г.

Работа выполнена с оценкой \_\_\_\_\_

Дата защиты “ \_\_\_\_ ” 20 \_\_\_\_ г.

Санкт-Петербург

г.

## Приложение Б. Свойство строгой положительной вещественности

Рассмотрим передаточную функцию вида

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}. \quad (\text{Б.1})$$

Передаточная функция  $H(s)$  является строго положительно вещественной (СПВ-функцией) только в том случае, если:

(У1) она не имеет полюсов в области  $\text{Re}[s] \geq 0$ ;

(У2)  $\text{Re}[H(j\omega)] > 0$  для всех  $-\infty < \omega < \infty$ ;

(У3)  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \text{Re}[H(j\omega)] > 0$ .

Для пояснения приведенного критерия рассмотрим передаточную функцию апериодического звена первого порядка

$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}, \quad (\text{Б.2})$$

где  $k > 0$  — коэффициент усиления, а  $T > 0$  — постоянная времени. Покажем, что передаточная функция (Б.2) удовлетворяет условиям (У1) – (У2). Действительно, единственный полюс функции (Б.2)  $s = -1/T$  лежит вне области  $\text{Re}[s] > 0$ . Как известно, частотный годограф апериодического звена первого порядка полностью лежит в четвертом квадранте комплексной плоскости, что гарантирует выполнение условия (У2). Наконец, рассмотрим частотную передаточную функцию звена:

$$W(j\omega) = \frac{k}{jT\omega + 1} = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1} - j \frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}.$$

Тогда

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \left( \frac{k}{T^2\omega^2 + 1} \right) = \frac{k}{T^2} > 0,$$

что означает выполнение условия (У3).

Таким образом, можно сделать вывод, что СПВ-функции обладают почти такими же частотными свойствами, что и звено первого порядка. Так как их частотные годографы лежат в правой полуплоскости (а значит, фазовый сдвиг, вносимый динамическим звеном с такой передаточной функцией, не превышает  $90^\circ$ ). Кроме того, скорость убывания вещественной части частотной передаточной функции при  $\omega \rightarrow \infty$  не

быстрее, чем у  $1/\omega^2$ . Из сделанного вывода видно, что класс строго положительно вещественных передаточных функций является достаточно узким и далеко не все линейные модели реальных объектов будут удовлетворять условиям (У1)–(У3).

Отметим следующие свойства строго положительно вещественных передаточных функций:

1) если  $H(s) = A(s)/B(s)$  является СПВ-функцией, то оба многочлена  $A(s)$  и  $B(s)$  гурвицевы, а их степени отличаются не больше, чем на единицу;

2) если  $H(s)$  является СПВ-функцией, то  $1/H(s)$  также СПВ-функция;

3) если  $H_1(s)$  и  $H_2(s)$  – СПВ-функции, то  $\alpha H_1(s) + \beta H_2(s)$  также СПВ-функция для любых положительных  $\alpha$  и  $\beta$ ;

4) если  $H_1(s)$  и  $H_2(s)$  являются передаточными функциями прямой и отрицательной обратной связи соответственно, то передаточная функция замкнутой системы  $H(s) = H_1(s)/(1 + H_1(s)H_2(s))$  также является СПВ-функцией.

**Миссия университета** – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

---

## ИЗ ИСТОРИИ КАФЕДРЫ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра систем управления и информатики (до 2001 года автоматике и телемеханики) была образована в 1945 году как подразделение основанного в тот же год факультета Электроприборостроения ЛИТМО и именовалась кафедрой Электроприборостроения (№80). Основание кафедры связано с именем ее первого заведующего и первого декана факультета Электроприборостроения профессора Марка Львовича Цуккермана. Профессор М.Л. Цуккерман в 1913–м году закончил электромеханический факультет Санкт-Петербургского политехнического института им. Петра Великого, в двадцатые годы организовал в Ленинграде отраслевую лабораторию электроизмерений (ОЛИЗ) и был известен в стране как крупный специалист в области систем телеизмерений. С 1933–го по 1935–й год профессор М.Л. Цуккерман руководит кафедрой «Автоматизации и телемеханизации» ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина). В 1935–м году профессор М.Л. Цуккерман вплоть до начала Великой отечественной войны находится в научной командировке в Европе.

В отличие от существовавших к тому моменту кафедр аналогичного профиля в ЛПИ им. М.И. Калинина и ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина), на кафедру автоматике и телемеханики ЛИТМО была возложена задача подготовки специалистов по автоматизации приборостроительной, оптической и оборонной промышленности, автоматических систем управления, систем телемеханики и телеизмерений. Осенью 1945 года кафедра провела первый набор студентов по специальности электроприборостроение. В 1947–м году кафедра претерпевает первое изменение своего названия, после которого называется кафедрой Автоматике и телемеханики (№80 вплоть до XX–го съезда КПСС). Первый выпуск инженеров–электромехаников по специальности «приборы автоматике и телемеханики» состоялся уже в 1948 году и составил 17 человек. По временной хронологии это событие совпало в выходом в свет на английском языке известной книги Норберта Винера "Кибернетика или

наука об управлении и связи в машинах, живом организме и обществах", в которой дается обоснование кибернетического подхода, выдвигающего на передний план информационное содержание природных, социальных и технических процессов и рассматривающего проблемы автоматического управления с точки зрения преобразования, передачи и использования информации. Советская научная общественность познакомится с этой книгой в переводе на русский язык только в 1958–м году.

Профессор М.Л. Цуккерман руководил кафедрой с 1945 по 1959 год. К своей работе кафедра приступила, имея преподавательский состав, включавший профессора Д.И. Зорина, доцентов Е.А. Танского и Р.И. Юргенсона и заведующего лабораторией А.А. Мезерина. В пятидесятые годы в преподавательский состав кафедры вошли профессор А.А. Кампенемм, доцент Г.А. Тацитов, а также старшие преподаватели В.А. Борисов, В.Г. Новиков и В.В. Соколов. К концу пятидесятых годов преподавательский состав пополнился выпускниками ЛИТМО доцентом Н.М. Яковлевым, старшими преподавателями Л.Т. Никифоровой, Н.М. Перевозчиковым, Ю.Б. Ганту и ассистентом А.М. Шпаковым, а также доцентом Б.А. Арефьевым.

В 1955 году при кафедре образована научно-исследовательская лаборатории (НИЛ). В этот период основные направления научно-исследовательских работ представляли задачи автоматизации измерения и регистрации параметров кораблей во время их мореходных испытаний, а также стабилизации скорости и фазирования двигателей. Под научным руководством проф. М.Л. Цуккермана была налажена подготовка научных кадров высшей квалификации через систему аспирантуры.

С 1959 года по 1970 кафедру возглавлял ученик М.Л. Цуккермана, выпускник кафедры Автоматики и телемеханики ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина) 1936 года, доцент Евфимий Аполлонович Танский. За время его руководства профессорско-преподавательский состав пополнился старшим преподавателем Л.Л. Бориной, доцентами А.И. Новоселовым и И.П. Пальтовым, пришедшими из промышленности и высших военных учебных заведений, а также выпускниками кафедры, успешно закончившими обучение в ее аспирантуре, доцентами В.Н. Дроздовым, А.В. Ушаковым, В.А. Власенко, и ассистентом И.Н. Богоявленской. В этот период защитили диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук доценты Б.А. Арефьев и Р.И. Юргенсон. В научно-исследовательской работе на кафедре произошел заметный поворот к проблемам автоматизации оптико-механического приборостроения, что привело к длительному научно – техническому сотрудничеству кафедры с ЛОМО им. В.И. Ленина, в рамках которого для нужд оборонной техники была разработана целая гамма прецизионных фотоэлектрических следящих систем. В рамках научно-технического сотрудничества с НИИЭТУ

кафедра приняла участие в разработке автоматической фототелеграфной аппаратуры, реализованной в виде комплекса "Газета-2".

С 1970 по 1990 год кафедрой руководил известный в стране специалист в области автоматизированного электропривода и фотоэлектрических следящих систем доктор технических наук, профессор Юрий Алексеевич Сабинин. В эти годы заметно изменилась структура дисциплин и курсов, читаемых студентам кафедры. К традиционным курсам "Теория автоматического регулирования и следящие системы", "Теория автоматического управления, экстремальные и адаптивные системы", "Элементы автоматики" и "Телемеханика" были добавлены дисциплины: "Теоретические основы кибернетики", "Локальные системы управления", "САПР систем управления" и другие. Коллектив преподавателей пополнился новым отрядом выпускников ее аспирантуры: доцентами Ю.Л. Тихоновым, В.В. Лаврентьевым, В.В. Григорьевым, В.В. Хабаловым, Л.С. Громовой, В.И. Бойковым, С.В. Быстровым, А.Б. Бушуевым, А.Н. Коровьяковым, И.В. Мирошником, Ю.П. Котельниковым, Г.И. Болтуновым, старшим преподавателем И.П. Салмыгиным. Из промышленности и других подразделений института пришли на кафедру доценты И.Ю. Рогинский, П.В. Николаев, И.П. Болтунов. Приобрела устойчивый характер система подготовки кадров высшей квалификации. В период с 1970-го по 1990-й защитили диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук доценты И.П. Пальтов, В.В. Григорьев и В.Н. Дроздов. Более 40 человек успешно завершили обучение в аспирантуре.

Прикладные разработки кафедры были связаны с задачами адаптивной оптики для многоэлементных зеркал оптических телескопов и коррекции волнового фронта технологических лазеров; с задачами адаптивной радиооптики применительно к проблеме управления большими полноповоротными радиотелескопами; с задачами автоматизации обработки снимков в пузырьковых камерах; гребного электропривода и робототехнических систем, автоматического управления процессом мягкой посадки летательных аппаратов. Новый облик теории управления 1970 годов, внедрение метода пространства состояний и вычислительной техники, повышение математического уровня научных исследований нашли отражение в научных разработках кафедры, многочисленных трудах и монографиях. В эти годы интенсивно разрабатываются проблемы теории многомерных динамических систем, качественная теория устойчивости, методы согласованного и многорежимного управления, положено начало теоретическим работам в области робототехники. Научное руководство перечисленными работами осуществляли профессора кафедры Ю.А. Сабинин, В.Н. Дроздов, А.В. Ушаков, В.В. Григорьев и И.В. Мирошник .

С 1990 года по 1995–й год кафедра переживает «смутное время» на уровне руководства ею, но не на уровне интеллектуальной обстановке в ее коллективе. Известно высказывание ректора НИУ ИТМО: «Интересно, на кафедре автоматики нет номинального заведующего вот уже столько лет и ни одного скандала». Лучшего комплимента кафедре не придумаешь. С 1990 года по 1992–й обязанности заведующего кафедрой исполнял профессор В.В. Григорьев, в 1992–м году в результате проведенного конкурса заведующим кафедрой автоматики и телемеханики становится профессор Таганрогского радиотехнического института Анатолий Аркадьевич Колесников, известный специалист в области синергетики. К сожалению, по причинам личного характера он так и не покинул Таганрог и не приступил к руководству кафедрой автоматики и телемеханики ЛИТМО. В 1994–м году его заведование руководством института приостанавливается, объявляется новый конкурс, в результате которого с 1995–го года по 2010–й кафедрой руководил ее воспитанник доктор технических наук, профессор Валерий Владимирович Григорьев, по инициативе которого в 2001–м году кафедра получила название кафедры «Систем управления и информатики». В эти годы профессорско-преподавательский состав пополнился профессором Е.Ф. Очиным (1993–1996 годы), а также выпускниками аспирантуры ИТМО В.В. Черноусовым, А.П. Баевым, В.О. Никифоровым, М.С. Чежиным, А.В. Лямым, А.А. Бобцовым и К.А. Сергеевым. Продолжала эффективно работать система подготовки кадров высшей квалификации, диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук защитили И.В. Мирошник, Р.О. Оморов, А.В. Ушаков, А.И. Скалон, В.О. Никифоров, А.А. Бобцов.

Помимо традиционной подготовки инженеров–электриков была начата подготовка бакалавров по направлению "Управление и автоматизация". С введением локальной сети и подключением к Интернет проведена модернизация компьютерного класса и учебных лабораторий. Научно-исследовательская работа ведется по целевым программам и конкурсным проектам РФФИ, Минобразования и Администрации Санкт-Петербурга. Завершилось формирование научной школы кафедры и ее основных направлений, возглавляемых профессорами В.В. Григорьевым, А.В. Ушаковым, И.В. Мирошником, В.О. Никифоровым и доцентом В.И. Бойковым. С целью расширения исследований, проводимых по теории нелинейных и адаптивных систем, роботов и микропроцессорной техники, а также активизации подготовки кадров в 1994 году образована научная лаборатория Кибернетики и Систем управления (руководитель проф. И.В. Мирошник). С 1994 года существенно расширились международные контакты кафедры, участие в международных научных мероприятиях, организации конференций и симпозиумов. Профессора кафедры Григорьев В.В., Мирошник И.В., Ушаков А.В. , а позднее и Никифоров В.О.

становятся действительными членами (академиками) Международной Академии нелинейных наук.

В феврале 2010 года заведующим кафедрой Систем управления и информатики был избран выпускник кафедры 1996-го года декан факультета компьютерных технологий и управления, доктор технических наук, профессор Алексей Алексеевич Бобцов. А.А. Бобцов является также председателем Совета молодых ученых и специалистов при Правительстве Санкт-Петербурга, действительным членом академии Навигации и управления движением и членом научного совета РАН по теории управляемых процессов и автоматизации.

В последние годы профессорско-преподавательский состав кафедры пополнился молодыми кадрами: доцентами Кремлевым А.С., Чепинским С.А. (выпуска кафедры 2002-го года), Дударенко Н.А., Нуйей (Осипцевой) О.С., Николаевым Н.А., Слитой О.В. (выпуска кафедры 2003-го года), Герасимовым Д.Н. (выпуска кафедры 2005-го года), Арановским С.В., Блинниковым А.А. (выпуска кафедры 2006-го года), Сержантовой (Поляковой) М.В. (выпуска кафедры 2007-го года), Пыркиным А.А. (выпуска кафедры 2008-го года), Колубиным С.А. (выпуска кафедры 2010-го года). К участию в подготовке магистров подключились профессора из Санкт-петербургских университетов Фрадков А.Л., Андриевский Б.Р., Тертычный В.Ю. и Фуртат И.Б.

Продолжает эффективно работать система подготовки кадров высшей научной квалификации, диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук защитил в 2013-м году выпускник кафедры 1998-го года Мельников В.Г.

В настоящее время кафедра является одним из ведущих российских научных и образовательных центров, ориентированным на фундаментальные и прикладные исследования в области автоматических систем и прикладной информатики, подготовку высококвалифицированных специалистов XXI-го столетия. На кафедре функционируют четыре научно-исследовательские группы: «Технической кибернетики» (основатель профессор И.В. Мирошник, научный руководитель профессор А.А. Бобцов), «Автоматизированного оптоэлектронного мониторинга технических объектов и комплексов» (основатели профессор Ю.А. Сабинин и доцент П.В. Николаев, научные руководители – доцент В.И. Бойков и профессор А.В. Ушаков) и «Технической информатики и телемеханики (основатель профессор М.Л. Цуккерман, научный руководитель профессор А.В. Ушаков), «Интеллектуальной робототехники» (основатель и научный руководитель профессор А.А.Бобцов). Усилиями ученых кафедры на кафедре создана научная школа «Управление в условиях системных неопределенностей», при кафедре вот уже второе десятилетие проводятся ежегодные

«Крещенские научные чтения», имеющие статус городского семинара по теории управления.

Ученые кафедры издают монографии, печатаются в журналах академий наук РФ и стран бывшего СССР, отраслевых журналах, известиях высших учебных заведений, а также зарубежных журналах и трудах международных конференций. Сотрудниками кафедры опубликовано более 120 монографий и учебников, 250 методических и учебных пособий, 3500 статей, из них более 380 в журналах академий наук, около 300 статей и докладов в зарубежных научных изданиях. Ученые кафедры являются авторами более 600 изобретений, постоянно принимают участие в работе российских и зарубежных семинаров, конференций и конгрессов. Кафедра поддерживает контакты с 20 техническими зарубежными университетами.

На седьмом десятке своего существования кафедра систем управления и информатики представляет собой работоспособный коллектив, полный новых идей и творческих планов. Кафедра активно готовится к своему семидесятилетию, которое будет иметь место осенью 2015-го года.