Лабораторная работа №2
Динамические методы идентификации

Основы теории идентификации

Арановский С.В.

aranovskiysv@niuitmo.ru

1 Общие сведения

1.1 Введение

Рассмотрим модель

$$y = \boldsymbol{\phi}^\top \boldsymbol{\theta}^\star,$$

где $y \in \mathbb{R}^1$, $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^m$ и $\boldsymbol{\theta}^\star \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\theta}^\star = \text{const}$. Ставится задача идентификации вектора параметров $\boldsymbol{\theta}^\star$ по измерениям y и $\boldsymbol{\phi}$.

В отличие от статических методов идентификации, требующих доступности всех измерений сразу, динамические методы идентификации позволяют обновлять оценку по мере поступления новых измерений. В дискретном времени динамическим методам соответствуют рекуррентные алгоритмы, позволяющие формировать оценку неизвестных параметров на основе ранее полученной оценки и новых данных: $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \mathcal{A}\{\widehat{\boldsymbol{\theta}}(k-1), \boldsymbol{\phi}(k), y(k)\}$, где $\mathcal{A}$ обозначает тот или иной алгоритм обновления оценки параметров. В непрерывном времени динамические методы идентификации формируют оценку параметров как решение некоторого дифференциального уравнения: $\frac{d}{dt}\widehat{\boldsymbol{\theta}}(t) = \mathcal{A}\{\widehat{\boldsymbol{\theta}}(t), \boldsymbol{\phi}(t), y(t)\}$. Как правило, методы динамической идентификации строятся как минимизация некоторого критерия качества $J(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$. Предполагается, что при $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}^\star$ данный критерий достигает своего минимального значения, $J(\boldsymbol{\theta}^\star) = \min_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}} J(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$, и, соответственно, ищется алгоритм $\mathcal{A}$, минимизирующий критерий. В теории идентификации наибольшее распространение получили квадратичный критерий и интегральный квадратичный критерий, которые будут рассмотрены далее.

1.2 Градиентные методы с постоянным коэффициентом усиления

Рассмотрим квадратичный критерий в непрерывной и дискретной формах:

$$J_{SE}(t) := \frac{1}{2}\left(y(t) - \boldsymbol{\phi}^\top(t)\widehat{\boldsymbol{\theta}}(t)\right)^2, \quad J_{SE}(k) := \frac{1}{2}\left(y(k) - \boldsymbol{\phi}^\top(k)\widehat{\boldsymbol{\theta}}(k)\right)^2. \tag{1}$$

На основе критерия (1) вводится градиентный алгоритм идентификации, построенный на идее движения в направлении *против* градиента $\nabla_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}} J$. Для непрерывного времени

$$\dot{\widehat{\boldsymbol{\theta}}}(t) = -\gamma \nabla_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}} J_{SE}(t) = \gamma \boldsymbol{\phi}(t) e(t), \tag{2}$$

где $e(t) := y(t) - \boldsymbol{\phi}^\top(t)\widehat{\boldsymbol{\theta}}(t)$, а для дискретного времени

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) - \gamma\nabla_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}} J_{SE}(k) = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \gamma\frac{\boldsymbol{\phi}(k)e^0(k)}{1+\gamma\boldsymbol{\phi}^\top(k)\boldsymbol{\phi}(k)}. \tag{3}$$

где $e^0(k) := y(k) - \boldsymbol{\phi}^\top(k)\widehat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)$.

Также в дискретном времени иногда рассматривается упрощенный градиентный алгоритм вида

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \gamma\boldsymbol{\phi}(k)e^0(k), \tag{4}$$

однако данный алгоритм обеспечивает устойчивость системы идентификации только для достаточно малых значений параметра γ. Для больших значений γ система идентификации с алгоритмом (4) может стать неустойчивой.

1.3 Динамический метод наименьших квадратов

Рассмотрим интегральный квадратичный критерий в непрерывной и дискретной формах:

$$J_{ISE}(t) := \frac{1}{2}\int_0^t \Big(y(\tau) - \boldsymbol{\phi}^\top(\tau)\widehat{\boldsymbol{\theta}}(t)\Big)^2 d\tau, \quad J_{ISE}(k) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\Big(y(i) - \boldsymbol{\phi}^\top(i)\widehat{\boldsymbol{\theta}}(k)\Big)^2. \tag{5}$$

Для минимизации критерия (5) также может быть использован градиентный алгоритм вида

$$\dot{\widehat{\boldsymbol{\theta}}}(t) = -\gamma\nabla_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}} J_{ISE}(t), \quad \widehat{\boldsymbol{\theta}}(k) - \widehat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) = -\gamma\nabla_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}} J_{SE}(k),$$

однако большее распространение на практике получила динамическая форма метода наименьших квадратов, основанная на решении

$$\nabla_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}} J_{ISE}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = 0. \tag{6}$$

Решение (6) в динамической форме в непрерывном времени может быть записано как

$$\begin{aligned}
&e(t) = y(t) - \boldsymbol{\phi}^\top(t)\widehat{\boldsymbol{\theta}}(t),\\
&\frac{d}{dt}\widehat{\boldsymbol{\theta}}(t) = -P(t)\boldsymbol{\phi}(t)e(t),\\
&\frac{d}{dt}P(t) = -P(t)\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{\phi}^\top(t)P(t),\\
&\widehat{\boldsymbol{\theta}}(0) = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0, \quad P(0) = P_0 = P_0^\top > 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

В дискретном времени рекуррентная форма метода наименьших квадратов записывается как

$$\begin{aligned}
&e^0(k) = y(k) - \boldsymbol{\phi}^\top(k)\widehat{\boldsymbol{\theta}}(k-1),\\
&P(k) = P(k-1) - \frac{P(k-1)\boldsymbol{\phi}(k)\boldsymbol{\phi}^\top(k)P(k-1)}{1+\boldsymbol{\phi}^\top(k)P(k-1)\boldsymbol{\phi}(k)}\\
&\widehat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + P(k)\boldsymbol{\phi}(k)e^0(k),\\
&\widehat{\boldsymbol{\theta}}(0) = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0, \quad P(0) = P_0 = P_0^\top > 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

1.4 Условие неисчезающего возбуждения

Можно показать, что алгоритмы (2), (3), (7), (8) при ограниченности регрессора $\boldsymbol{\phi}$ обеспечивают асимптотическую сходимость сигнала ошибки к нулю, $e \to 0$ при $t, k \to \infty$. Однако сдедует подчеркнуть, что это не обеспечивает сходимости оценки параметров $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ к истинным значениям $\boldsymbol{\theta}^\star$. Действительно, несложно найти пример, при котором выполняется $e = 0$, но при этом $\widehat{\boldsymbol{\theta}} \neq \boldsymbol{\theta}^\star$.

Для обеспечения схождения оценки к истинным значением достаточно, чтобы регрессор $\boldsymbol{\phi}$ удовлетворял условию неисчезающего возбуждения (Persistent Excitation). Приведем формулировку этого критерия для непрерывного времени: ограниченная функция $\boldsymbol{\phi}(t)$ удовлетворяет условию неисчезающего возбуждения, если

$$\exists T > 0, \alpha > 0 : \int_t^{t+T} \boldsymbol{\phi}(\tau)\boldsymbol{\phi}^\top(\tau) d\tau \geq \alpha \mathcal{I} \quad \forall t, \tag{9}$$

где $\mathcal{I}$ – единичная матрица.

1.5 Идентификация динамических систем в дискретном времени

Одной из наиболее распространенных моделей динамических систем в дискретном времени является модель ARX

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + \eta(k),$$

где $y(k)$ – выходной сигнал системы, $u(k)$ – входной сигнал системы, $\eta(k)$ – помеха измерений, полиномы $A(q^{-1})$ и $B(q^{-1})$ определены как

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \ldots + a_n q^{-n}, \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \ldots + b_m q^{-m}, \end{aligned}$$

полином $A(q^{-1})$ – монический (единичный коэффициент при старшей степени), a_i, b_j, $i = 1, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, m$ – постоянные параметры, q^{-1} – оператор сдвига, $q^{-1}y(k) = y(k-1)$. Эта модель может быть представлена в форме линейной регрессии как

$$\begin{aligned} y(k) =& - a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) \ldots - a_n y(k-n) + \\ &+ b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \ldots + b_m u(k-m) + \eta(k) = \\ &= \boldsymbol{\phi}^\top(k)\boldsymbol{\theta}^\star + \eta(k), \end{aligned} \tag{10}$$

где вектор регрессор $\boldsymbol{\phi}(k)$ и вектор неизвестных параметров $\boldsymbol{\theta}^\star$ сформированы как

$$\boldsymbol{\phi}(k) = \begin{bmatrix} -y(k-1), & \ldots & -y(k-n), & u(k), & \ldots & u(k-m) \end{bmatrix}^\top,$$

$$\boldsymbol{\theta}^\star = \begin{bmatrix} a_1, & \ldots & a_n, & b_0, & \ldots & b_m \end{bmatrix}^\top.$$

Если сигнал $\eta(t)$ представляет собой стационарный случайный сигнал с нулевым математическим ожиданием, не автокорелированный, т.е. $\mathbb{E}\{\eta(i)\eta(j)\} = 0$ при $i \neq j$, и $\mathbb{E}\{\eta^2(i)\} = \sigma_\eta^2$, и не коррелирует с регреоссором $\boldsymbol{\phi}(k)$, то при $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \boldsymbol{\theta}^\star$ достигается минимум критериев (1), (5) в смысле их математического ожидания. Тогда задача идентификации может быть успешно решена, если регрессор является частотно богатым (соответствует условию неисчезающего возбуждения), что обеспечивается за счет выбора входного сигнала $u(k)$.

Рассмотрим ситуацию, когда сигнал $\eta(k)$ является автокреллрованным и получен, например, как $\eta(k) = C(q^{-1})v(k)$, где $v(k)$ – случайный стационарный не автокореллированный сигнал с нулевым математическим ожиданием, а $C(q^{-1})$ – некоторый монический полином, имеющий все корни внутри единичной окружности. Такие модели называются ARMAX:

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})v(k),$$

или, при $C(q^{-1}) \equiv A(q^{-1})$, моделями ошибки по выходу, OE:

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k) + v(k).$$

Можно показать, что сигнал $\eta(k)$ коррелирует с регрессором, $\mathbb{E}\{\boldsymbol{\phi}(k)\eta(k)\} \neq 0$ и точка $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \boldsymbol{\theta}^\star$ не соответствует минимуму критериев (1), (5) в смысле их математического ожидания. Как следствие, применение рассмотренных выше методов идентификации приведет к смещенной оценке параметров.

1.6 Идентификация динамических систем в непрерывном времени

Рассмотрим пример следующей системы, заданной в непрерывном времени:

$$y(t) = \frac{b_0}{p + a_0}u(t) + \eta(t), \tag{11}$$

где p – оператор дифференцирования, $\eta(t)$ – помеха измерений. Предположим, что шумы измерений в системе пренебрежимо малы, $\eta(t) \equiv 0$, а производная $\dot{y}(t)$ доступна измерению. Тогда модель (11) может быть переписана в форме линейной регрессии как

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} -y(t) & u(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

что позволяет применить методы идентификации в непрерывном времени.

2 Задание

В файле `ident_lab2_vXX.mat`, где `XX` – номер варианта, содержатся исходные данные к работе, а именно переменные `zad1`, `zad2` и `zad3`.

2.1 Задание 1

Переменная `zad1` является структурой с полями вида `zad1.a`, `zad1.b` и `zad1.w`. Эти поля содержат значения величин a, b и ω соответственно. Требуется:

1. Построить схему моделирования дискретной линейной системы с передаточной функцией $W(z) = \frac{b}{z+a}$, интервал дискретизации $T_d = 0.1$ секунды. На вход системы подается сигнал $u(t) = \sin(\omega t)$.

2. Построить схему идентификации параметров a, b на основе градиентного алгоритма (3).

3. Провести численное моделирование процесса идентификации параметров a, b при значениях $\gamma = 1$, $\gamma = 3$ и $\gamma = 10$. Сделать вывод о влиянии величины γ на процесс идентификации. Время моделирования брать не менее 15 секунд.

4. Провести численное моделирование упрощенного градинтного алгоритма идентификации (4) при значениях $\gamma = 0.5$ и $\gamma = 10$. Сделать вывод о влиянии величины γ.

2.2 Задание 2

Переменная `zad2` является структурой с полями вида `zad2.a1`, `zad2.a2`, `zad2.b` и `zad2.w`. Эти поля содержат значения величин a_1, a_2, b и ω соответственно. Требуется:

1. Построить схему моделирования дискретной линейной системы с передаточной функцией $W(z) = \frac{b}{z^2+a_1z+a_2}$, интервал дискретизации $T_d = 0.1$ секунды.

2. Построить схему идентификации параметров a_1, a_2, b на основе градиентного алгоритма (3).

3. Подать на вход системы сигнал $u(t) = \sin(\omega t)$. Провести численное моделирование процесса идентификации параметров a_1, a_2, b при значении $\gamma = 1$. Время моделирования брать не менее 60 секунд.

4. Подать на вход системы сигнал $u(t) = \sin(\omega t) + 0.2\sin(0.5\omega t)$. Провести численное моделирование процесса идентификации параметров a_1, a_2, b при значении $\gamma = 1$. Время моделирования брать не менее 60 секунд. Сравнить результаты идентификации с предыдущим пунктом и сделать выводы.

2.3 Задание 3

Переменная `zad3` является структурой с полями вида `zad3.a`, и `zad1.w`. Эти поля содержат значения величин a, b и ω соответственно. Требуется:

1. Построить схему моделирования непрерывной линейной системы $y(t) = \frac{b}{p+a}u(t)$. Схема должна быть построена таким образом, чтобы измерению были доступны $y(t)$ и $\dot{y}(t)$. Установить шаг моделирования не более 0.01 секунды.

2. Построить схему идентификации неизвестных параметров a, b на основе градиентного алгоритма (2).

3. Подать на вход системы сигнал $u(t) = \sin(\omega t)$ и провести численное моделирование процесса идентификации параметров a, b при значениях $\gamma = 1$, $\gamma = 3$ и $\gamma = 10$. Сделать вывод о влиянии величины γ на процесс идентификации. Время моделирования брать не менее 15 секунд.

3 Вопросы для самостоятельной подготовки

Основные:

1. Назовите известные вам виды дискретных линейных моделей и запишите их в форме линейной регрессии. Для каких из них метод наименьших квадратов даст несмещенную оценку?

2. Как формируется модель линейной регрессии для линейных моделей в непрерывном виде при измеряемости всех производных? Приведите пример.

3. Что такое условие неисчезающего возбуждения? Приведите примеры функций, удовлетворяющих и не удовлетворяющих этому условию.

4. Какие основные критерии качества чаще всего используются при идентификации?

5. Какие результаты идентификации обеспечивают алгоритмы (2), (3), (7), (8) для ошибки оценивания выхода $y - \boldsymbol{\phi}^\top \widehat{\boldsymbol{\theta}}$? Для ошибки оценивания параметров $\boldsymbol{\theta}^\star - \widehat{\boldsymbol{\theta}}$?

6. Приведите примеры ограниченной и неограниченной функций времени.

7. Известно, что $C(q^{-1})$ – некоторый монический полином, имеющий все корни внутри единичной окружности. Приведите пример такого полинома второго порядка.

8. Что такое оператор сдвига? Пусть задана передаточная функция линейной дискретной системы $W(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a0}$, запишите соотношение между входом и выходом, используя оператор сдвига.

Дополнительные:

9. Пусть $v(k)$ – случайный стационарный не автокореллированный сигнал. Пусть $\eta(k) = C(q^{-1})v(k) = (1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2})v(k)$. Найдите математическое ожидание, дисперсию и функцию автокорреляции сигнала $\eta(k)$.

10. Предположим, в модели (11) помеха $\eta(t)$ не ровна тождественно нулю. Запишите модель линейной регрессии и проанализируйте корреляцию помехи и регрессора.

11. Покажите, что в модели ARMAX помеха коррелирует с регрессором.

12. Почему метод минимизации (6) не используется при минимизации критерия (1)?

Список литературы

[1] Льюнг Л. *Идентификация систем: Теория для пользователя*, volume 432. Наука, 1991.

[2] Андриевский Б.Р. *Идентификация и диагностика систем. Учебное пособие.* СПб: ИТМО, 2012.

[3] Lennart Ljung. *System identification.* Springer, 1998.

[4] Aarts R.G.K.M. *System identification and parameter estimation.* University of TWENTE, 2012. Доступно для скачивания: `www.utwente.nl/ctw/wa/web_dev/old/lectures/113170/notes/`.

[5] Shankar Sastry and Marc Bodson. *Adaptive control: stability, convergence and robustness, главы 1-2.* Courier Dover Publications, 2011. Доступно для скачивания: `www.ece.utah.edu/~bodson/acscr/`.

[6] Torsten Söderström and Petre Stoica. *System identification.* Prentice-Hall, Inc., 1988. Доступно для скачивания: `http://user.it.uu.se/~ts/sysidbook.pdf`.