Лабораторная работа №1
Метод наименьших квадратов

Основы теории идентификации

Арановский С.В.

aranovskiysv@niuitmo.ru

1 Общие сведения

Рассмотрим выражение

$$
\begin{aligned}
y &= x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \ldots + x_n\theta_n + v \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i\theta_i + v = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\theta} + v,
\end{aligned} \tag{1}
$$

где $\boldsymbol{x} = \mathrm{col}\{x_i\}$ и y – некоторые измеряемые величины, $\boldsymbol{\theta} = \mathrm{col}\{\theta_i\}$ – вектор неизвестных параметров, v – аддитивная помеха, имеющая, чаще всего, смысл шумов измерения. Будем считать, что v является случайной нормально распределенной величиной с нулевым математическим ожиданием. Выражение (1) называется моделью линейной регрессии (линейной в том смысле, что неизвестные параметры входят линейно), при этом вектор $\boldsymbol{x}$ называется регрессором. Ставится задача по набору из N измерений $y(k)$ и $\boldsymbol{x}(k)$, $k = 1, \ldots, N$ сформировать оценку неизвестных параметров $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$.

Для каждой оценки параметров $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ можно сформировать набор оценок $\hat{y}(k) = \boldsymbol{x}^\top(k)\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ и соответствующий набор ошибок оценивания $\tilde{y}(k) = e(k) = y(k) - \hat{y}(k)$. Сформировав полный вектор ошибок оценивания $\boldsymbol{e} = \mathrm{col}\{e(k)\}$, рассмотрим следующий критерий качества оценивания параметров:

$$
J(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = \|\boldsymbol{e}\|_2^2 = \boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{e} = \sum_{k=1}^{N} \left(y(k) - \boldsymbol{x}^\top(k)\widehat{\boldsymbol{\theta}} \right)^2. \tag{2}
$$

Критерий (2) представляет собой сумму квадратов ошибок оценивания, а метод, позволяющий получить оценку

$$
\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{LSQ} = \arg\min_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}} J(\widehat{\boldsymbol{\theta}}),
$$

минимизирующую этот критерий, называется методом наименьших квадратов.

В случае модели линейной регрессии вида (1) такая оценка может быть сформирована следующим образом. Обозначим $Y = \mathrm{col}\{y(k)\}$, $Y \in \mathbb{R}^N$, $X = \mathrm{col}\{\boldsymbol{x}^\top(k)\}$, $X \in \mathbb{R}^{N\times n}$ и $V = \mathrm{col}\{v(k)\}$, где Y – вектор, сформированный из измеренных значений $y(k)$, а X – матрица, каждая из N строк которой представляет набор измеренных значений $\boldsymbol{x}^\top(k)$. Тогда для набора из N измерений модель (1) может быть записана как

$$
Y = X\boldsymbol{\theta} + V,
$$

а оценка, минимизирующая критерий (2), может быть найдена как

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{LSQ} = \left(XX^\top\right)^{-1} X^\top Y. \tag{3}$$

Данная оценка может быть вычислена, если матрица $\Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\Phi = XX^\top$ невырожденная, в противном случае задача является недоопределенной.

Если априорно известно, что идентифицируемая система описывается выражением (1), где помеха v имеет нулевое математическое ожидание и является независимой со всеми элементами вектора регрессора, т.е. $\mathbb{E}\{x_i v\} = \mathbb{E}\{x_i\}\mathbb{E}\{v\} = 0\ \forall i$, где $\mathbb{E}\{\cdot\}$ – математическое ожидание, то оценка (3) является достаточной для идентификации. Однако если модель (1) является только гипотезой, то требуется дополнительно оценить, на сколько эта гипотеза оправдана. Каким образом это можно сделать? Допустим, что полученная оценка вектора параметров совпадает с истинным значением, $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}$. Тогда, очевидно, ошибка оценивания совпадает с помехой, $e(k) = v(k)\ \forall k$. Следовательно, если рассматривать ошибку оценивания как случайную величину, она так же должна иметь нулевое математическое ожидание и быть стационарной (иметь постоянные во времени математическое ожидание и дисперсию). Если одно из этих требований нарушается, то либо исходная гипотеза о линейной регрессии неверна, либо сигнал v имеет ненулевое математическое ожидание или коррелирует с одним из регрессоров x_i. В случае ненулевого математического ожидания исходная модель может быть дополнена регрессором вида $1(k)$, в случае же взаимной корреляции могут использоваться более сложные методы оценивания, например, метод инструментальной переменной.

2 Задание

В файле `ident_lab1_vXX.mat`, где `XX` – номер варианта, содержатся исходные данные к работе, а именно переменные `zad11`, `zad12`, `zad21`, `zad22`, `zad31` и `zad32`.

2.1 Задание 1

Переменные `zad11` и `zad12` являются структурами с полями вида `zad11.y`, `zad11.x1`, `zad11.x2` и `zad11.x3`. Эти поля содержат вектора (массивы) измерений функций $y(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$, соответствующих линейной регрессии вида $y(t) = x_1(t)\theta_1 + x_2(t)\theta_2 + x_3(t)\theta_3 + v(t)$, где θ_1, θ_2 и θ_3 – неизвестные параметры, а $v(t)$ – шум измерений. Требуется по имеющимся измерениям для `zad11` и `zad12`:

1. оценить значения неизвестных параметров;
2. построить графики исходного сигнала $y(t)$ и полученной оценки $\hat{y}(t)$;
3. построить график ошибки оценивания;
4. сделать выводы о достоверности полученных результатов.

2.2 Задание 2

При идентификации модели химического реактора была экспериментально получена статическая зависимость скорости протекания реакции V [с$^{-1}$] от температуры реагентов T [°C]. Переменные `zad21` и `zad22` являются структурами с полями вида `zad21.T` и `zad21.V`, в которых содержатся данные экспериментов для различного оборудования. Рассматриваются две гипотезы:

(H1) статическая характеристика может быть аппроксимирована линейной зависимостью $V = bT + c$;

(H2) статическая характеристика может быть аппроксимирована квадратичной зависимостью $V = aT^2 + bT + c$.

Для каждого набора данных `zad21` и `zad22`:

1. записать гипотезы (H1) и (H2) в форме линейной регрессии;
2. по данным эксперимента найти параметры статической зависимости для обеих гипотез;
3. построить графики экспериментальной зависимости и её аппроксимации в рамках обеих гипотез, построить графики ошибок аппроксимации;
4. сделать выводы о достоверности каждой из гипотез.

2.3 Задание 3

Переменные `zad31` и `zad32` являются структурами с полями вида `zad31.func`, `zad31.x` и `zad31.y`. Здесь `zad31.func` является символьной записью некоторой функции $y = f(x, p_1, p_2)$, где p_1, p_2 – неизвестные параметры, а `zad31.x` и `zad31.y` содержат наборы отсчетов для сигналов x и y. Для каждого набора данных `zad31` и `zad32`:

1. записать функцию `func` в форме линейной регрессии;
2. по имеющимся наборам данных оценить значения неизвестных параметров p_1, p_2;
3. построить график экспериментальных данных и график $y = f(x, p_1, p_2)$ для полученных оценок параметров.

3 Вопросы для самостоятельной подготовки

Основные:

1. Что такое оценка методом наименьших квадратов? Какой критерий она минимизирует?
2. Как находится оценка методом наименьших квадратов для модели линейной регрессии?
3. Что такое независимые случайные величины? Чему равно математическое ожидание их произведения?
4. Каким требованиям должна удовлетворять помеха измерений v для получения состоятельной оценки методом наименьших квадратов для модели линейной регрессии?
5. Как найти ошибку оценивания? Как по ней оценить качество идентификации?
6. Запишите следующие функции в форме линейной регрессии: $f(x) = A\sin(3x + \phi)$, $f(x) = Ae^{\lambda x}$, $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$.

Дополнительные:

7. Пусть $y(k) = x_1(k)\theta_1 + x_2(k)\theta_2 + x_3(k)\theta_3$, где $x_1(k) = 3$, $x_2(k) = 2 + 3k$, $x_3(k) = 7k$. Какие параметры этой модели могут быть идентифицированы методом наименьших квадратов? В каких случаях матрица $\Phi = X^\top X$ является вырожденной, как это связано с рангом матрицы X и сигналами x_i?

8. Что такое матрица Вандермонда? Как она используется в задачах идентификации полиномов? В каком случае она имеет обратную?

9. Предположим, шум измерений v имеет ненулевое математическое ожидание, $\mathbb{E}\{v\} \neq 0$. Как в этом случае можно расширить модель линейной регрессии для определения параметров?

10. Чему равно математическое ожидание $\mathbb{E}\{\boldsymbol{\theta} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{LSQ}\}$? В каком случае оно будет нулевым?

Список литературы

[1] Льюнг Л. *Идентификация систем: Теория для пользователя*, volume 432. Наука, 1991.

[2] Андриевский Б.Р. *Идентификация и диагностика систем. Учебное пособие.* СПб: ИТМО, 2012.

[3] Lennart Ljung. *System identification.* Springer, 1998.

[4] Aarts R.G.K.M. *System identification and parameter estimation.* University of TWENTE, 2012. Доступно для скачивания: `www.utwente.nl/ctw/wa/web_dev/old/lectures/113170/notes/`.

[5] Shankar Sastry and Marc Bodson. *Adaptive control: stability, convergence and robustness, главы 1-2.* Courier Dover Publications, 2011. Доступно для скачивания: `www.ece.utah.edu/~bodson/acscr/`.

[6] Torsten Söderström and Petre Stoica. *System identification.* Prentice-Hall, Inc., 1988. Доступно для скачивания: `http://user.it.uu.se/~ts/sysidbook.pdf`.