

# Крещенские чтения

О НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМАХ АДАПТИВНОГО И  
РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

**Фуртат Игорь Борисович**

19 января 2015 г.

# План выступления

## *1. Системы адаптивного управления*

- *Модифицированный алгоритм адаптации высокого порядка*
- *Объекты с запаздыванием по управлению*
- *Двухконтурная схема управления*
- *Одноконтурная схема управления*

2. Системы робастного управления

3. Управление в химической промышленности

# Алгоритмы адаптации высокого порядка

1. **Morse A.S.** High-order parameter tuners for adaptive control of nonlinear systems. Isidori A., Tarn T.J. (eds) // Syst. Models and Feedback: Theory Appl. Birkhausor. 1992.
2. **Никифоров В.О.** Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. СПб.: Наука, 2003.
3. **Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.** Нелинейное адаптивное управление динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.

## Модифицированный алгоритм адаптации высокого порядка

1. **Фуртат И.Б., Цыкунов А.М.** Модифицированный алгоритм адаптации высокого порядка для систем с запаздыванием по состоянию // Вестник АГТУ. 2006.
2. **Цыкунов А.М.** Модифицированный алгоритм адаптации высокого порядка для управления линейными объектами по выходу // Автоматика и телемеханика. 2006.

### Модификация:

1. Уменьшение динамического порядка фильтров состояния
2. Количество настраиваемых параметров равно количеству неизвестных параметров
3. Одновременная оценка производных вектора регрессии и вектора настраиваемых параметров

**Пример.** Объекта управления  $W(s) = \frac{k}{s^3 + q_2s^2 + q_1s + q_0}$

Динамический порядок регулятора	
28	18
Количество настраиваемых параметров	
12	4

# Постановка задачи

**Объект**  $Q(p)y(t) = kR(p)u(t)$  (1)

$y(t)$  – выход

$u(t)$  – управление

$Q(p), R(p)$  – нормированные линейные дифференциальные операторы

$\deg Q(p) = n, \deg R(p) = m, \gamma = n - m > 1$  – относительная степень

$k > 0$  – неизвестный коэффициент

$p = d / dt$  – оператор дифференцирования

---

**Эталонная модель**  $Q_m(p)y_m(t) = k_m R_m(p)r(t)$  (2)

$\deg Q_m(p) = \deg Q(p), \deg R_m(p) = \deg R(p), k_m > 0, r(t)$  - кусочно-непрерывное задающее воздействие.

---

## Предположения

1. Неизвестные коэффициенты  $Q(p), R(p)$  и  $k$  принадлежат известному ограниченному множеству  $\Xi$ .

2.  $R(\lambda)$  – гурвицев,  $\lambda$  – комплексная переменная.

---

**Цель управления**  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_m(t)| < \delta$  (3)

# Синтез системы управления

$$Q(p) = Q_m(p) + \Delta Q(p), \quad R(p) = R_m(p) + \Delta R(p) \quad (4)$$

$$\deg \Delta Q(p) < n$$

$$\deg \Delta R(p) < m$$

**Модель ошибки  $e(t) = y(t) - y_m(t)$**

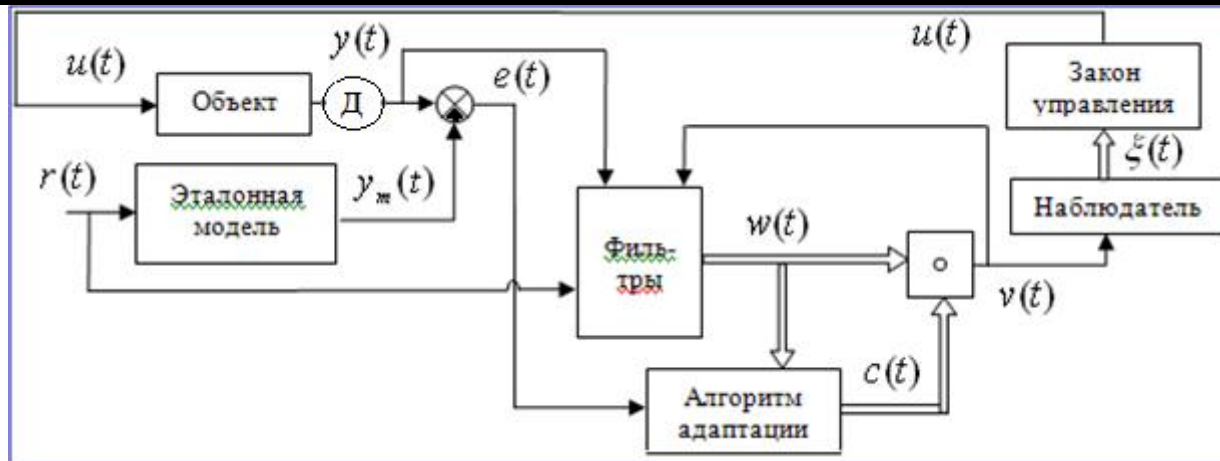
$$e(t) = \frac{kR_m(p)}{Q_m(p)} \left[ u(t) + \frac{\Delta R(p)}{R_m(p)} u(t) - \frac{\Delta Q(p)}{kR_m(p)} y(t) - \frac{k_m}{k} r(t) \right] + \varepsilon(t) \quad (5)$$

$\varepsilon(t)$  – экспоненциально затухающая функция, зависящая от ненулевых начальных условий

Добавим в (5) гурвицевый полином  $T(\lambda)$  ( $\deg T(\lambda) = n - m - 1$ ):

$$e(t) = \frac{kR_m(p)T(p)}{Q_m(p)} \left[ \frac{1}{T(p)} u(t) + \frac{\Delta R(p)}{T(p)R_m(p)} u(t) - \frac{\Delta Q(p)}{kT(p)R_m(p)} y(t) - \frac{k_m}{kT(p)} r(t) \right] + \varepsilon(t)$$

# Синтез системы управления



**Закон управления**

$$u(t) = T(p)\bar{v}(t), \quad v(t) = c^T(t)w(t) \quad (6)$$

**Фильтры:**

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= F_1 V_1(t) + b_0 v(t), & \dot{V}_2(t) &= F_2 V_2(t) + b_0 y(t), \\ \dot{V}_3(t) &= F_3 V_3(t) + b_0 r(t), & g(t) &= L V_3(t) \end{aligned} \quad (7)$$

$F_1, F_2, F_3$  – в форме Фробениуса с характеристическими многочленами  $R_m(s)$ ,

$$T(s)R_m(s) \text{ и } T(s), \quad w = [V_1^T, V_2^T, y, g]^T$$

**Наблюдатель:**  $\dot{\xi}(t) = G_0 \xi(t) + D_0(\bar{v}(t) - v(t)), \quad \bar{v}(t) = L \xi(t), \quad \xi(t) \in \mathbb{R}^{\gamma-1} \quad (8)$

$$G_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_{\gamma-2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_0 = \left[ -\frac{d_1}{\mu}, -\frac{d_2}{\mu^2}, \dots, -\frac{d_{\gamma-1}}{\mu^{\gamma-1}} \right]^T, \quad d_1, \dots, d_{\gamma-1} \Rightarrow G = G_0 - DL \text{ – гурвицева,}$$

$$D = [d_1, d_2, \dots, d_{\gamma-1}], \quad \mu > 0 \text{ – малое число}$$

**Алгоритм адаптации**

$$\dot{c}(t) = -\alpha e(t)w(t) - \beta e^2(t)c(t), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad (9)$$

# Основной результат

**Утверждение.** Пусть выполнены условия Предположений. Тогда при  $\mu \leq \mu_0$  система управления, состоящая из алгоритма адаптации, фильтров, закона управления и наблюдателя обеспечивает выполнение целевого условия и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.

# Системы с запаздыванием по управлению

## Системы с запаздыванием по управлению

```
graph TD; A[Системы с запаздыванием по управлению] --> B[Двухконтурная система управления]; A --> C[Одноконтурная система управления]; B == D[предиктор + регулятор]; C == E[регулятор];
```

Двухконтурная  
система управления

=

предиктор + регулятор

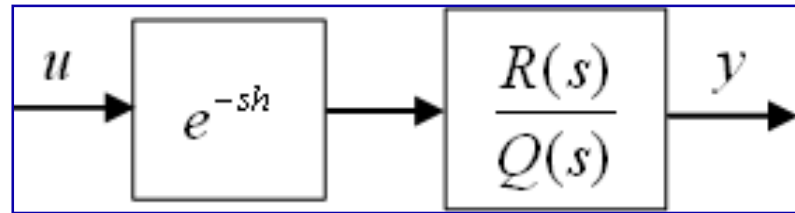
Одноконтурная  
система управления

=

регулятор



# Постановка задачи



**Объект управления**

$$Q(p)y(t) = kR(p)u(t-h) \quad (10)$$

$h > 0$  – время запаздывания

---

**Эталонная модель**

$$Q_m(p)y_m(t) = k_m R_m(p)r(t), \quad (11)$$

---

**Цель управления**

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_m(t-h)| < \delta, \quad (12)$$

# Синтез адаптивного предиктора

## Предиктор

$$Q_0(p)y_v(t) = R_0(p)(u(t) - u(t-h)) + G(p)v_1(t+h) \quad (13)$$

$G(\lambda)/Q(\lambda)$  – СПВ функция  $\rightarrow Q(\lambda)$  – гурвицевый полином

---

## Сигнал для управления процессом прогноза

$$v_1(t+h) = c_1^T(t+h)w_1(t) \quad (14)$$

$$w_1 = [y_v, V_{y_v}^T, \pi^T]^T$$

---

## Фильтры состояния

$$\begin{aligned} \dot{V}_{y_v}(t) &= F_p V_{y_v}(t) + b_0 y_v(t), \\ \dot{V}_{u_h}(t) &= F_p V_{u_h}(t) + b_0 (u(t) - u(t-h)), \quad \pi(t) = K V_{u_h}(t) \end{aligned} \quad (15)$$

$F_p$  – матрица в форме Фробениуса с характеристическим полиномом  $G(s)$

## Алгоритмы адаптации

$$\dot{c}_1(t) = -\alpha_1 e_1(t)w_1(t-h), \quad c_1(t+h) = c_1(t) - e_2(t)w_1(t), \quad \alpha_1 > 0 \quad (16)$$

---

Введем переменную  $z(t) = y(t) + y_v(t)$

$$Q(p)z(t) = kR(p)u(t) + G(p)(v_1(t+h) - c_{01}^T w_1(t)) \quad (17)$$

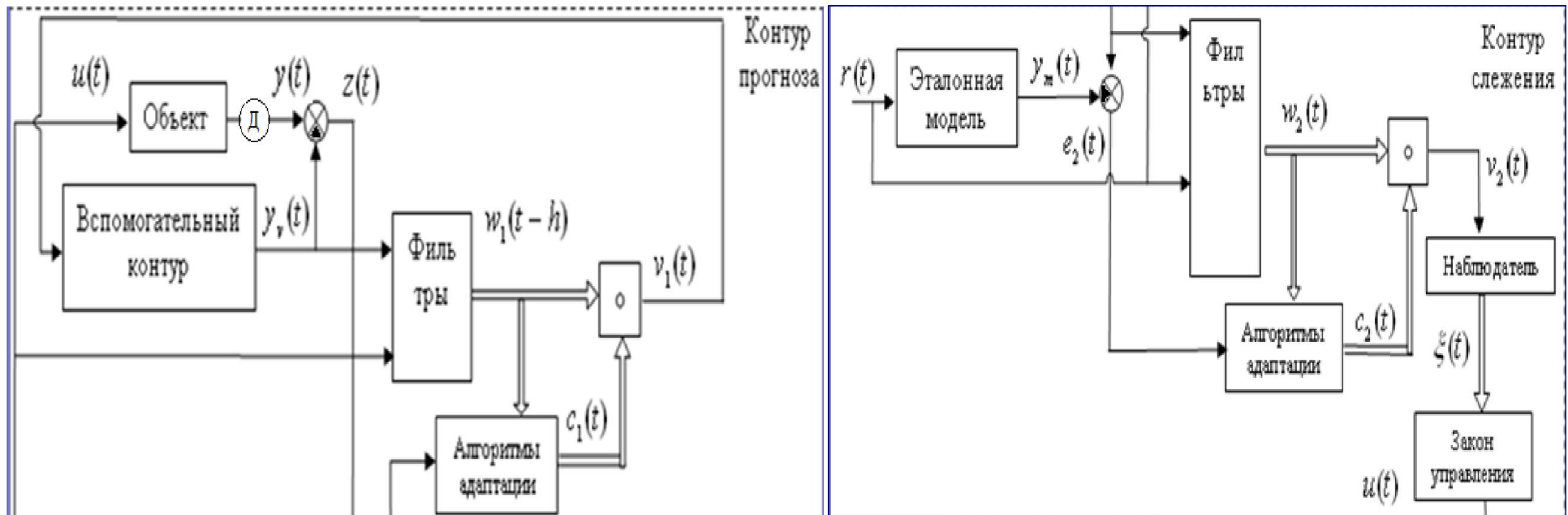
Показано, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} G(p)(v_1(t+h) - c_{01}^T w_1(t)) = 0$

Тогда

$$Q(p)z(t) = kR(p)u(t)$$

# Основной результат: двухконтурная система управления

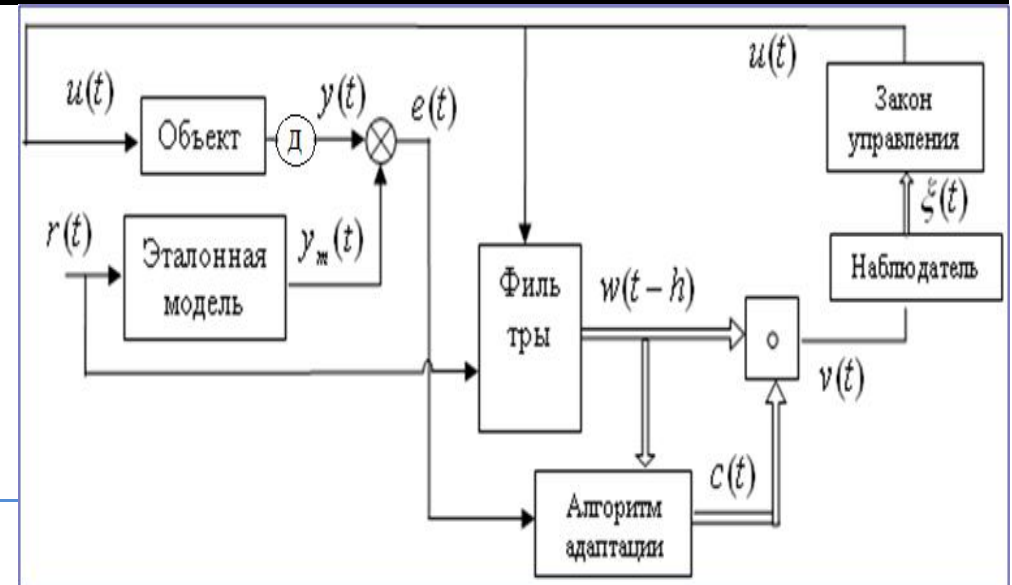
**Утверждение.** Пусть выполнены условия Предположений. Тогда при  $\mu \leq \mu_0$  система управления, состоящая из предиктора, фильтров, закона управления, наблюдателя и алгоритмов адаптации обеспечивает выполнение целевого условия и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.



# Синтез одноконтурной системы управления 1

$$e(t) = \frac{kR_m(p)}{Q_m(p)} \left[ u(t-h) - \frac{\Delta Q(p)}{Q(p)} u(t-h) + \frac{\Delta R(p)Q_m(p)}{R_m(p)Q(p)} u(t-h) - \frac{k_m}{k} r(t-h) \right]$$

→  $Q(\lambda)$  – гурвицевый полином



## Фильтры

$$\dot{V}_1(t) = FV_1(t) + b_0 u(t), \quad V_2 = \frac{1}{R_m(p)} [V_1^T, pV_1^T, \dots, p^{m-1}V_1^T]^T \quad (18)$$

$F$  – в форме Фробениуса с характеристическим полиномом  $Q_m(s)$

## Закон управления

$$u(t) = T(p)v(t), \quad v(t) = c^T(t)\bar{w}(t) \quad (19)$$

$$w = [V_1^T, V_2^T, r]^T, \quad T(p)\bar{w}(t) = w(t)$$

**Наблюдатель**  $\dot{\xi}(t) = G_0\xi(t) + D_0(\bar{v}(t) - v(t)), \quad \bar{v}(t) = L\xi(t), \quad \xi(t) \in \mathbb{R}^{\gamma-1} \quad (20)$

**Алгоритма адаптации**  $\dot{c}(t) = -\rho e(t)\bar{w}(t-h), \quad \rho > 0 \quad (21)$

## Синтез одноконтурной системы управления 2

Перепишем уравнение ошибки слежения  $e(t) = y(t) - y_m(t - h)$

$$e(t) = \frac{kR_m(p)}{Q_m(p)} \left[ u(t-h) + \frac{\Delta R(p)}{R_m(p)} u(t-h) - \frac{\Delta Q(p)}{kR_m(p)} y(t) - \frac{k_m}{k} r(t-h) \right] \quad (22)$$

**Закон управления**

$$u(t) = \frac{Q_m(p)}{R_m(p)} \bar{v}(t) \quad (23)$$

**Фильтры**

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1(t) &= F_1 \theta_1(t) + b v(t-h), \quad \theta_1(0) = 0, \\ \dot{\theta}_2(t) &= F_2 \theta_2(t) + b y(t), \quad \theta_2(0) = 0, \\ \dot{\theta}_3(t) &= F_2 \theta_3(t) + b r(t-h), \quad \theta_3(0) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

$\theta_1(t) \in R^m$ ,  $\theta_2(t) \in R^n$ ,  $\theta_3(t) \in R^n$ ,  $F_1, F_2$  – числовые матрицы в форме Фробениуса с характеристическими многочленами  $R_m(\lambda)$  и  $Q_m(\lambda)$ ,  $b = [0, \dots, 0, 1]^T$ .

Уравнение ошибки

$$e(t) = k \left[ v(t-h) + c_{01}^T \theta_1(t) - c_{02}^T \theta_2(t) - c_{03}^T \theta_3(t) \right], \quad (25)$$

Введем обозначения

$$c_0 = - \left[ c_{01}^T, -c_{02}^T, -c_{03}^T \right]^T \quad w(t) = \left[ \theta_1^T(t), \theta_2^T(t), \theta_3^T(t) \right]^T$$

## Синтез одноконтурной системы управления 2

Вектор регрессии

$$\dot{w}(t) = Aw(t) + Bf(t-h), \quad (26)$$
$$A = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 \\ b\bar{c}_{01}^T & F_2 - kbc_{02}^T & 0 \\ 0 & 0 & F_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, \quad f(t-h) = \begin{bmatrix} v(t-h) \\ r(t-h) \end{bmatrix}.$$

Решение

$$w(t+h) = e^{Ah}w(t) + \int_{t-h}^t e^{A(t-s)} Bf(s)ds.$$

Сделав замену  $s = g + t$ , перепишем последнее выражение в виде

$$w(t+h) = e^{Ah}w(t) + \int_{-h}^0 e^{-Ag} Bf(t+g)dg.$$

---

Уравнение ошибки

$$e(t) = k \left[ v(t-h) - \alpha_0^T w(t-h) - \int_{-h}^0 \beta_0^T(g) f(t+g-h) dg \right] \quad (27)$$

$\alpha_0^T = c_0^T e^{Ah}$ ,  $\beta_0^T = c_0^T e^{-Ag} B$  – новые векторы неизвестных постоянных параметров.

# Синтез одноконтурной системы управления 2

## Вспомогательное управление

$$v(t) = \alpha^T(t)w(t) + \int_{-h}^0 \beta^T(t, g)f(t+g-h)dg \quad (28)$$

---

## Наблюдателя Халила

$$\dot{\xi}(t) = G_0\xi(t) + D_0(\bar{v}(t) - v(t)), \quad \bar{v}(t) = L\xi(t) \quad (29)$$

---

## Алгоритмы адаптации

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= -\rho_1 e(t)w(t-h), \\ \frac{\partial \beta(t, g)}{\partial t} &= -\rho_2 e(t)f(t+g-h) \end{aligned} \quad (30)$$

---

**Утверждение.** Пусть выполнены условия Предположений. Тогда существует число  $\mu_0 > 0$  такое, что при  $\mu \leq \mu_0$  система управления, состоящая из фильтров, закона управления, алгоритмов адаптации и наблюдателя обеспечивает выполнение целевого условия и ограниченность сигналов в системе управления.

**$Q(\lambda)$  – негурвицевый полином**

**время запаздывание неизвестное и нестационарное  
робастность по отношению к возмущениям**

# План выступления

1. Системы адаптивного управления

2. *Системы робастного управления*

- *Метод вспомогательного контура*
- *Управление структурно неопределенными объектами*
- *Управление неминимально-фазовыми системами*
- *Модифицированный обратный обход интегратора*

3. Управление в химической промышленности



# Метод вспомогательного контура. Постановка задачи

**Объект**

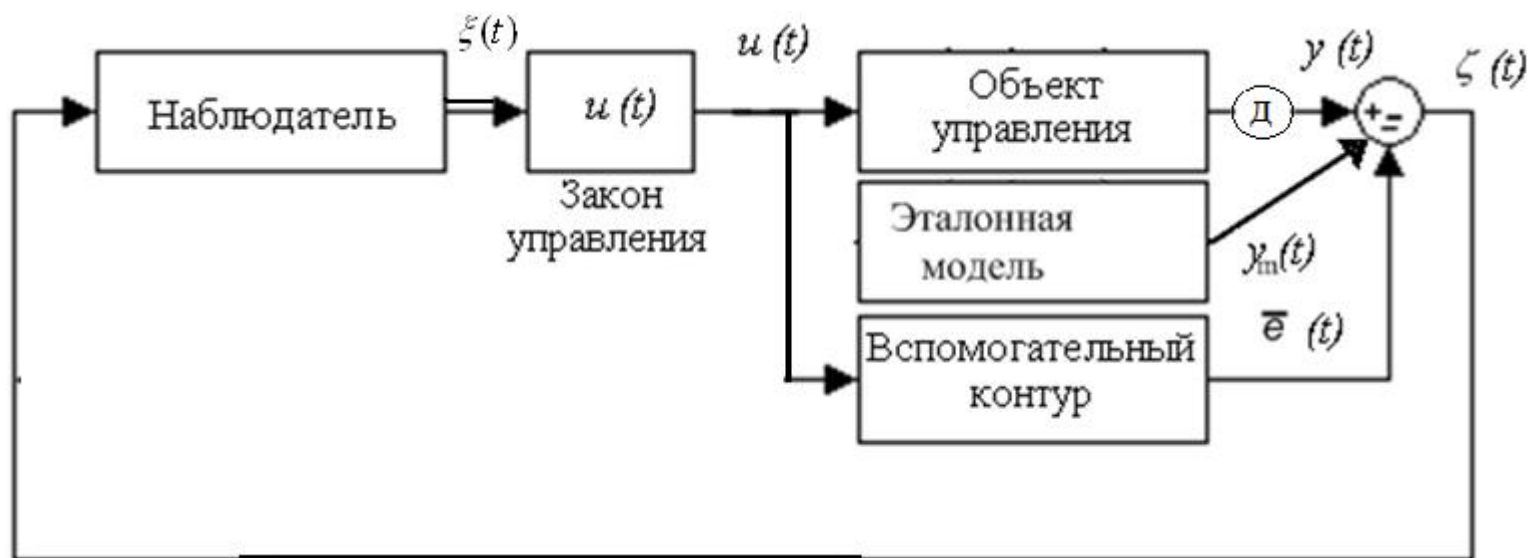
$$Q(p, t)y(t) = R(p, t)u(t) + F(p, t)f(t) \quad (31)$$

1. Порядки операторов могут изменяться произвольным образом
  2. Известна  $\bar{\gamma} \geq \gamma$
- 

**Цель управления**

$$|y(t) - y_m(t)| < \delta \quad \text{при } t > T$$

# Метод вспомогательного контура. Система управления



**Вспомогательный контур**  $Q_m(p)\bar{e}(t) = \beta u(t)$  (32)

$\beta > 0$ ,  $\deg Q_m(p) = \bar{\gamma}$ ,  $Q_m(\lambda)$  – гурвицев

**Управление**  $u(t) = -\beta^{-1} Q_m^{-1}(p)\bar{\zeta}(t)$  (33)

$\zeta(t) = e(t) - \bar{e}(t)$ ,  $\alpha > 0$

**Наблюдатель**  $\dot{\xi}(t) = G_0 \xi(t) + D_0(\bar{\zeta}(t) - \zeta(t))$ ,  $\bar{\zeta}(t) = L\xi(t)$ ,  $\xi(t) \in \mathbb{R}^{\bar{\gamma}}$  (34)

## Метод вспомогательного контура. Основной результат

**Утверждение.** Пусть выполнены условия Предположений. Тогда при  $\mu \leq \mu_0$  система управления, состоящая из вспомогательного контура, закона управления и наблюдателя обеспечивает выполнение целевого условия и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.

# Управление неминимально-фазовыми системами в условиях неопределенности со скалярными входом-выходом

## 1. Метод шунтирования

*Андреевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. СПб: Наука, 1999.*

- а) применим для устойчивых объектов*
- б) чувствителен к возмущениям*

## 2. Метод последовательного компенсатора

*Novakimyan N., Yang B.-J., Calise A.J. An Adaptive Output Feedback Control Methodology for Non-Minimum Phase Systems // 41<sup>st</sup> IEEE Conf. on Decision and Control. Las Vegas, 2002. P. 949–954.*

*Цыкунов А.М. Применение адаптивного динамического регулятора для управления объектом по выходу // Тр. междунар. конф. “Идентификация систем и задачи управления” SICPRO’2005 / Ин-т пробл. упр., М., 2005. С. 1349–1357.*

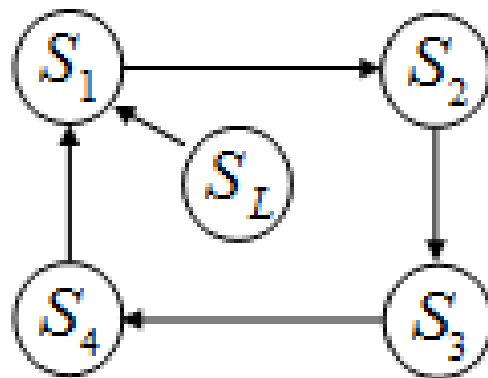
- а) применим для стабилизации объектов*
- б) чувствителен к возмущениям*

## Вспомогательные определения

Под **динамической сетью** будем понимать совокупность динамических подсистем (узлов), соединенных физическими или информационными связями.

Под **неминимально-фазовыми динамическими сетями** будем понимать динамические сети, подсистемы которых являются неминимально-фазовыми системами.

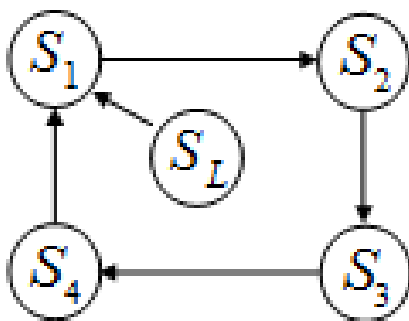
**Коммуникационное запаздывание** – запаздывание в информационных связях динамической сети.



## Постановка задачи

Рассмотрим орграф  $\Gamma = (V, E)$ , ассоциированный с сетью  $S$ , где каждой вершине орграфа  $\Gamma$  соответствуют подсистемы  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  и подсистема лидера  $S_L$ ,  $V = \{v_1, \dots, v_k, v_L\}$  – множество вершин,  $E \subseteq V \times V$  – множество ребер. Пусть  $C = (c_{ij})$ ,  $S = (s_{iL})$  – матрицы смежности орграфа  $\Gamma$  такие, что  $c_{ij} = 1$  и  $s_{iL} = 1$  если  $j \in N_{jL}$ , иначе  $c_{ij} = 0$  и  $s_{iL} = 0$ ,  $N_{jL} = \{v_j \in V: (v_j, v_i), (v_i, v_L) \in E\}$  – множество смежных вершин для узла  $v_i$ . Запись  $(v_j, v_i), (v_i, v_L) \in E$  означает, что информация поступает от подсистемы  $S_i$  к подсистеме  $S_j$  и от подсистемы лидера  $S_L$  к  $S_i$ .

**Орграф  $\Gamma$  содержит ориентированное остовное дерево** (ориентированное дерево, составленное из ребер орграфа и такое, что в нем существует путь из корня в любую другую вершину [1, 2]).



1. Теорема Агаева-Чеботарева (АиТ, 9, 2000).
2. W. Ren and R.W. Beard, "Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 50, no. 5, pp. 655–661, 2005.)

## Постановка задачи

### Модели ведомых подсистем $S_i$

$$Q_i(p)y_i(t) = k_i R_i(p)u_i(t) + f_i(t), \quad i = \overline{1, k}, \quad (1)$$

$y_i(t) \in R$  – регулируемая переменная

$u_i(t) \in R$  – сигнал управления

$f_i(t) \in R$  – гладкое внешнее неконтролируемое ограниченное возмущение

$Q_i(p), R_i(p)$  – линейные дифференциальные операторы

$\deg Q_i(p) = n, \deg R_i(p) = m, n - m \geq 1$

$k_i > 0$

---

### Модель лидера $S_L$

$$Q_L(p)y_L(t) = k_L r(t) \quad (2)$$

$y_L(t) \in R$  – измеряемый выход

$r(t) \in R$  – ограниченное задающее воздействие

$Q_L(p)$  и  $k_L > 0$  – известный оператор и коэффициент соответственно

$\deg Q_L(p) = n$

## Цель управления

$$|y_i(t) - y_L(t - \tau_{Li}(t))| < \delta \text{ при } t > T \quad (3)$$

## Предположения

- 1) коэффициенты операторов  $Q_i(p)$ ,  $R_i(p)$  и  $k_i > 0$  принадлежат известному ограниченному множеству возможных значений  $E$ ;
- 2) доступны измерению сигналы  $y_i(t)$  и  $u_i(t)$ , но не их производные;
- 3) орграф  $\Gamma$  содержит ориентированное остовное дерево в корне которого находится ведущая подсистема (2).



## Метод решения

Представим  $R_i(p)$  в виде

$$R_i(p) = R_i^+(p)R_i^-(p), \quad (4)$$

$R_i^+(\lambda)$  – многочлен с положительными вещественными частями корней и порядком  $m_1$

$R_i^-(\lambda)$  – многочлен с отрицательными вещественными частями корней и порядком  $m_2$

$\lambda$  – комплексная переменная

---

Предположим, что  $R_i^+(p)$  можно представить в виде

$$R_i^+(p) = R_{0i}(p) + \theta_i p \Delta R_{0i}(p), \quad (5)$$

$R_{0i}(\lambda)$  – произвольный известный гурвицевый многочлен с коэффициентом без  $\lambda$ , как у  $R_i^+(\lambda)$ ,  $\deg R_{0i}(p) = m_1$

$\theta_i > 0$  – малый параметр

$\Delta R_{0i}(\lambda)$  – остаток суммы (5),  $\deg \Delta R_{0i}(\lambda) \leq m_1 - 1$

## Метод решения

Подставим (4) и (5) в (1):

$$Q_i(p)y_i(t) = k_i R_i^-(p) [R_{0i}(p) + \theta_i p \Delta R_{0i}(p)] u_i(t) + f_i(t). \quad (6)$$

Преобразуем модель (6) к форме уравнений состояния

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i (u_i(t) + \sigma_i(t)) + C_i f_i(t), \quad y_i(t) = L_{1i} x_i(t), \quad (7)$$

$$\dot{z}_i(t) = \frac{1}{\theta_i} F_i z_i(t) + N_i \dot{u}_i(t), \quad \sigma_i(t) = L_{2i} z_i(t), \quad (8)$$

$x_i(t) \in R^n$ ,  $z_i(t) \in R^{m_1}$  – соответственно векторы состояния медленных и быстрых составляющих системы (7)-(8)

$A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $L_{1i}$  – числовые матрицы, полученные при переходе от  $Q_i(p)y_i(t) = k_i R_i^-(p) R_{0i}(p) [u_i(t) + \sigma_i(t)] + f_i(t)$  к (7)

$F_i$ ,  $N_i$ ,  $L_{2i}$  – числовые матрицы, полученные при переходе от  $R_{0i}(p)\sigma_i(t) = \theta_i \Delta R_{0i}(p) [p u_i(t)]$  к (8).

Каким должно быть возмущение  $\sigma_i(t)$ , чтобы поведение системы (7)-(8) при  $\sigma_i(t) \neq 0$  было бы близко к поведению системы (7)-(8) при  $\sigma_i(t) = 0$ ?

# Лемма

**Лемма.** Если динамическая система описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t, \mu_1, \mu_2), \quad x(t) \in \mathfrak{R}^n, \quad \mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \quad (\text{L1})$$

где  $f(x, \mu_1, \mu_2)$  – непрерывная функция, липшицева по  $x$ , и при  $\mu_2 = 0$  имеют ограниченную замкнутую область диссипативности

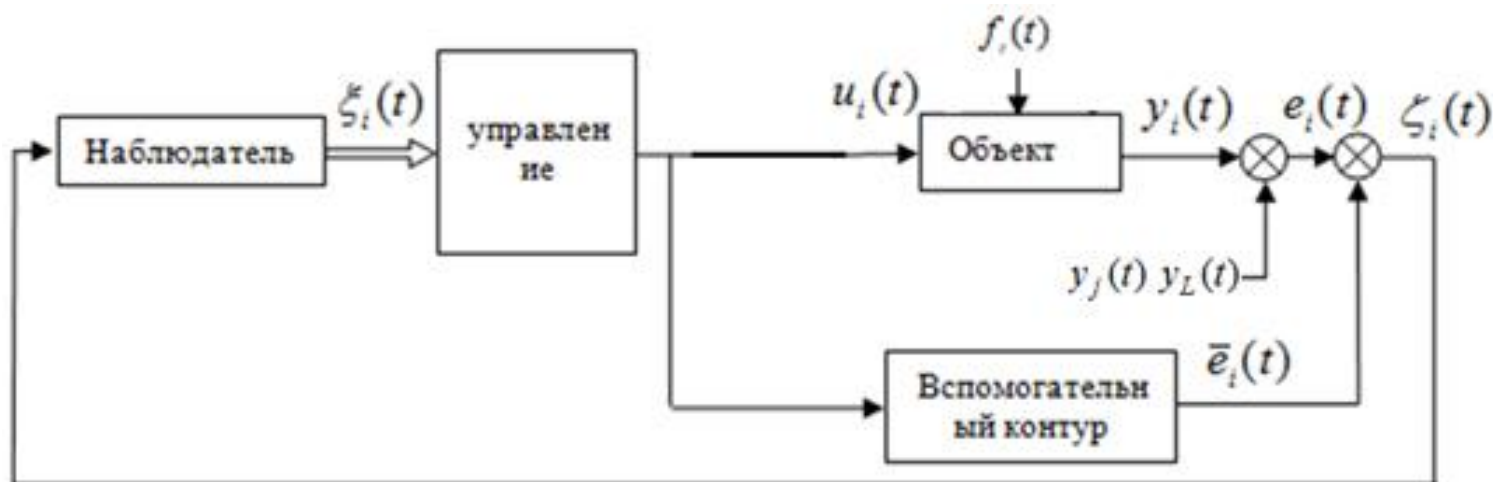
$$\Omega_x = \{x : P(x) \leq C\}, \quad (\text{L2})$$

где  $P(x)$  – непрерывная, кусочно-гладкая, положительно определенная функция в  $\mathfrak{R}^n$ , такая, что при некоторых  $C_1 > 0$  и  $\mu_0 > 0$  выполнено

$$\sup_{\mu_1, \mu_2 \leq \mu_0} \left\langle \left[ \frac{\partial P(x)}{\partial x} \right]^T, f(x, t, \mu_1, 0) \right\rangle \leq -C_1, \quad \text{при } P(x) = C.$$

То для всех достаточно малых  $\mu_1 \leq \mu_0$  и  $\mu_2 \leq \mu_0$  множество (L2) остается областью диссипативности системы (L1).

# Метод решения



**Вспомогательный контур**

$$Q_L(p)\bar{e}_i(t) = \alpha u_i(t), \quad \alpha > 0. \quad (10)$$

**Закон управления**

$$u_i(t) = -\alpha^{-1}Q_L(p)\bar{\zeta}_i(t), \quad (11)$$

где  $\bar{\zeta}_i(t)$  – оценка функции  $\zeta_i(t) = e_i(t) - \bar{e}_i(t)$ ,

$$e_i(t) = \sum_{j \in N_{iL}} c_{ij} (y_i(t) - y_j(t - \tau_{ji}(t))) + s_{iL} (y_i(t) - y_L(t - \tau_{Li}(t))).$$

**Наблюдатель**

$$\dot{\xi}_i(t) = G_0 \xi_i(t) + D_0 (\bar{\zeta}_i(t) - \zeta_i(t)), \quad \bar{\zeta}_i(t) = L \xi_i(t), \quad (12)$$

$$\xi_i(t) \in R^{n+1}.$$

## Основной результат

**Теорема.** Пусть выполнены условия предположений 1А-3А. Существуют числа  $\mu > 0$  и  $\theta_0 > 0$  такие, что решениями матричных неравенств:

$$\begin{aligned} 0.25(k-1)^{-1} \lambda_2(L(\Gamma))(A^T H_1 + H_1 A) - 2\mu^n S S^T &\leq -Q_1, \\ 0.25\theta_{0i}^{-1} (k-1)^{-1} \lambda_2(L(\Gamma_0))(F_i^T H_{2i} + H_{2i} F_i) - 2\alpha^{-2} \mu^{-1} K_i K_i^T - 2\alpha^{-2} \mu^n T_i T_i^T &\leq -Q_2, \quad (13) \\ G^T H_3 + H_3 G - 2H_3 b_1 b_1^T H_3 - 2\mu^{n+1} I &\leq -Q_3, \end{aligned}$$

являются положительно определенные матрицы  $H_1$ ,  $H_2$  и  $H_3$ , где  $S = H_1 b_2 g^T$ ,  $K_i = H_{2i} N_i g^T G_0$ ,  $T_i = H_{2i} N_i g^T D_0 L$ ,  $Q_1 = Q_1^T > 0$ ,  $Q_2 = Q_2^T > 0$ ,  $Q_3 = Q_3^T > 0$ ,  $L(\Gamma)$  и  $L(\Gamma_0)$  – симметризованные лапласианы орграфов  $\Gamma$  и  $\Gamma_0$ ,  $\lambda_2(L(\Gamma))$  и  $\lambda_2(L(\Gamma_0))$  – вторые (ненулевые, по возрастанию) собственные числа  $L(\Gamma)$  и  $L(\Gamma_0)$ . Тогда при  $\theta < \theta_0$  алгоритм управления (10)-(12) обеспечивает выполнение целевого условия (3) для сети с подсистемами (1) и ведущей подсистемой (2).

# Метод бэкстеппинга

1. **Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V., Morse A.S.** Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems // IEEE Trans. On Automatic Control. 1991.
2. **Никифоров В.О.** Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. – СПб.: Наука, 2003.
3. **Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.** Нелинейное адаптивное управление динамическими системами. – СПб.: Наука, 2000.

## Модифицированный алгоритм бэкстеппинга

**Фуртат И.Б.** Модифицированный алгоритм обратного обхода интегратора // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009.

### Модификация:

1. Использование всего одного фильтра состояния по переменной  $u(t)$
2. Упрощение виртуальных и основного закона управления

**Пример.** Объекта управления  $W(s) = \frac{k}{s(s^2 + q_1s + q_0)}$

Динамический порядок регулятора

11

6

Количество фильтров состояния

4

1

# Постановка задачи

Объект управления

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), \xi) + b(x(t), \xi)(u(t) + \varphi(x(t), t)), \\ y(t) &= h(x(t)), \quad x(0) = x_0,\end{aligned}$$

$x(t) \in X \subset R^n$  – вектор состояния

$u(t) \in R$  – управляющее воздействие

$y(t) \in Y \subset R$  – регулируемая переменная

$t \in T \subset (0, \infty)$

$f(x, \xi)$ ,  $b(x, \xi)$  и  $h(x)$  – гладкие функции соответствующих размерностей

$\varphi(x, t)$  – возмущение

$\xi \in \Xi$  – вектор неизвестных параметров,  $\Xi$  – известное ограниченное множество

$x_0 \in X$  – вектор начальных условий.

---

**Цель управления**

$$|y(t) - y_M(t)| < \delta \quad \text{для } t > t_f$$

# Постановка задачи

## Предположения.

1. Функции  $f(x, \xi)$ ,  $b(x, \xi)$ ,  $h(x)$  гладкие и для любых  $x \in X$ ,  $\xi \in \Xi$  выполнены следующие условия

$$L_b h(x) = L_b L_f^1 h(x) = \dots = L_b L_f^{\gamma-2} h(x) = 0, \quad \beta(x, \xi) = L_b L_f^{\gamma-1} h(x) > 0,$$

где  $L_f^1 h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x, \xi)$ ,  $L_b h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} b(x, \xi)$  производная Ли от функции  $h(x)$  по

направлению векторных полей  $f(x, \xi)$ ,  $b(x, \xi)$  соответственно,  $\gamma \leq n$ ,  $\gamma$  – относительная степень объекта управления (1). Производные высших порядков вычисляются по формулам

$$L_f^2 h(x) = \frac{\partial (L_f^1 h(x))}{\partial x} f(x, \xi), \dots, L_f^k h(x) = \frac{\partial (L_f^{k-1} h(x))}{\partial x} f(x, \xi).$$

2. Существует гладкая функция  $\phi^{-1}(x)$  такая, что

$$\bar{x}(t) = \phi(x(t)) = [y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(\gamma-1)}(t)]^T = [h(x), L_f^1 h(x), \dots, L_f^{\gamma-1} h(x)]^T.$$

3. Функция  $c(x, \xi) = L_f^\gamma h(x)$  ограничена или ограничена на множестве  $\Xi$  и липшицева по  $x \in X$ .

4. Функция  $\varphi(x, t)$  ограничена или ограничена на множестве  $T$  и липшицева по  $x \in X$ .

5. Функции  $y_M(t)$ ,  $\dot{y}_M(t)$ , ...,  $y_M^{(\gamma)}(t)$  ограниченные.



# Синтез системы управления

Принимая во внимание Предположение 1, продифференцируем  $\gamma$  раз функцию  $y(t)$ :

$$p^\gamma y(t) = c(x, \xi) + \beta(x, \xi)(u(t) + \varphi(x, t)),$$

Уравнение ошибки  $e_1(t) = y(t) - y_M(t)$

$$p^\gamma e_1(t) = c(x, \xi) + \beta(x, \xi)(u(t) + \varphi(x, t)) - p^\gamma y_M(t).$$

Введем в рассмотрение оператор  $Q_{\gamma-1}(p) = \sum_{i=0}^{\gamma-1} k_{\gamma-i} p^i$  такой, что полином

$Q(\lambda) = \lambda^\gamma + Q_{\gamma-1}(\lambda)$  гурвицев, где  $\lambda$  – комплексная переменная. Добавляя и вычитая  $Q_{\gamma-1}(p)e_1(t)$  в левой части (4), получим

$$Q(p)e_1(t) = u(t) + \psi(x, \xi, y_M, t),$$

где функция

$$\psi(x, \xi, y_M, t) = c(x, \xi) + \beta(x, \xi)\varphi(x, t) + (\beta(x, \xi) - 1)u(t) - p^\gamma y_M(t) - Q_{\gamma-1}(p)e(t)$$

содержит параметрические и внешние возмущения.

# Синтез системы управления

Введем фильтр

$$\dot{v}(t) = A_0 v(t) + l u(t),$$

$$v(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_\gamma(t)]^T, \quad A_0 = \begin{bmatrix} -k_1 & & & \\ -k_2 & & I_{\gamma-1} & \\ \vdots & & & \\ -k_\gamma & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad I_{\gamma-1} \in R^{(\gamma-1) \times (\gamma-1)} \quad -$$

единичная матрица,  $l = [0, \dots, 0, 1]^T$ .

*Шаг 1.* Предположим, что функция  $v_2(t)$  – сигнал управления. Определим  $v_2(t)$  в виде  $v_2(t) = U_1(t)$ . Зададим стабилизирующее управляющее воздействие  $U_1(t)$  как

$$U_1(t) = -c_1 \mu^{-1} e_1(t) + k_1 v_1(t),$$

$c_1 > 0$  и  $\mu > 0$  – коэффициенты, выбираемые разработчиком

# Синтез системы управления

*Шаг 2.* Введем в рассмотрение ошибку вида  $e_2(t) = v_2(t) - U_1(t)$ .

Пусть функция  $v_3(t)$  является сигналом управления. Положим  $v_3(t) = U_2(t)$  и зададим  $U_2(t)$  в виде

$$U_2(t) = -c_2 e_2(t) + k_2 v_1(t) + \bar{U}_1(t)$$

$c_2 > 0$  – коэффициент, выбираемый разработчиком,  $\bar{U}_1(t)$  – оценка сигнала  $\dot{U}_1(t)$

*Шаг  $i$  ( $3 \leq i \leq \gamma - 1$ ).* Рассмотрим функцию ошибки  $e_i(t) = v_i(t) - U_{i-1}(t)$ .

Предположим, что функция  $v_{i+1}(t)$  является управлением. Пусть  $v_{i+1}(t) = U_i(t)$  и определим  $U_i(t)$  в виде

$$U_i(t) = -c_i e_i(t) + k_i v_1(t) + \bar{U}_{i-1}(t)$$

$c_i > 0$  – коэффициент, выбираемый разработчиком,  $\bar{U}_{i-1}(t)$  – оценка сигнала  $\dot{U}_{i-1}(t)$

# Синтез системы управления

*Шаг  $\gamma$ .* Рассмотрим функцию  $e_\gamma(t) = v_\gamma(t) - U_{\gamma-1}(t)$ .

Закон управления

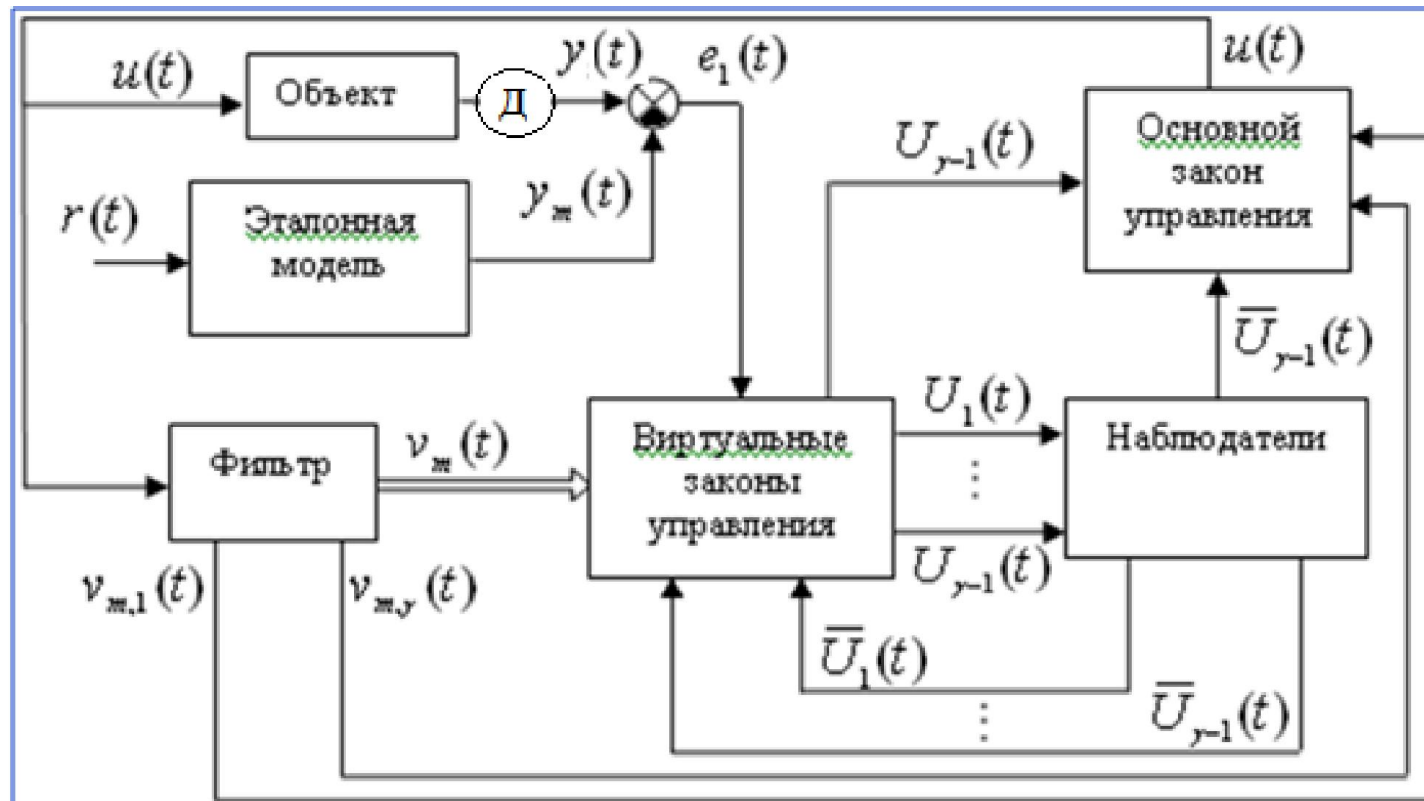
$$u(t) = -c_\gamma e_\gamma(t) + k_\gamma v_1(t) + \bar{U}_{\gamma-1}(t),$$

$c_\gamma > 0$  – коэффициент, выбираемый разработчиком,  $\bar{U}_{\gamma-1}(t)$  – оценка функции  $\dot{U}_{\gamma-1}(t)$ .

Для реализации стабилизирующих управлений и закона управления воспользуемся следующими наблюдателями

$$\dot{\bar{U}}_{i-1}(t) = -\mu^{-1} \bar{U}_{i-1}(t) + \mu^{-1} \dot{U}_{i-1}(t), \quad i = \overline{2, \gamma}.$$

# Синтез системы управления

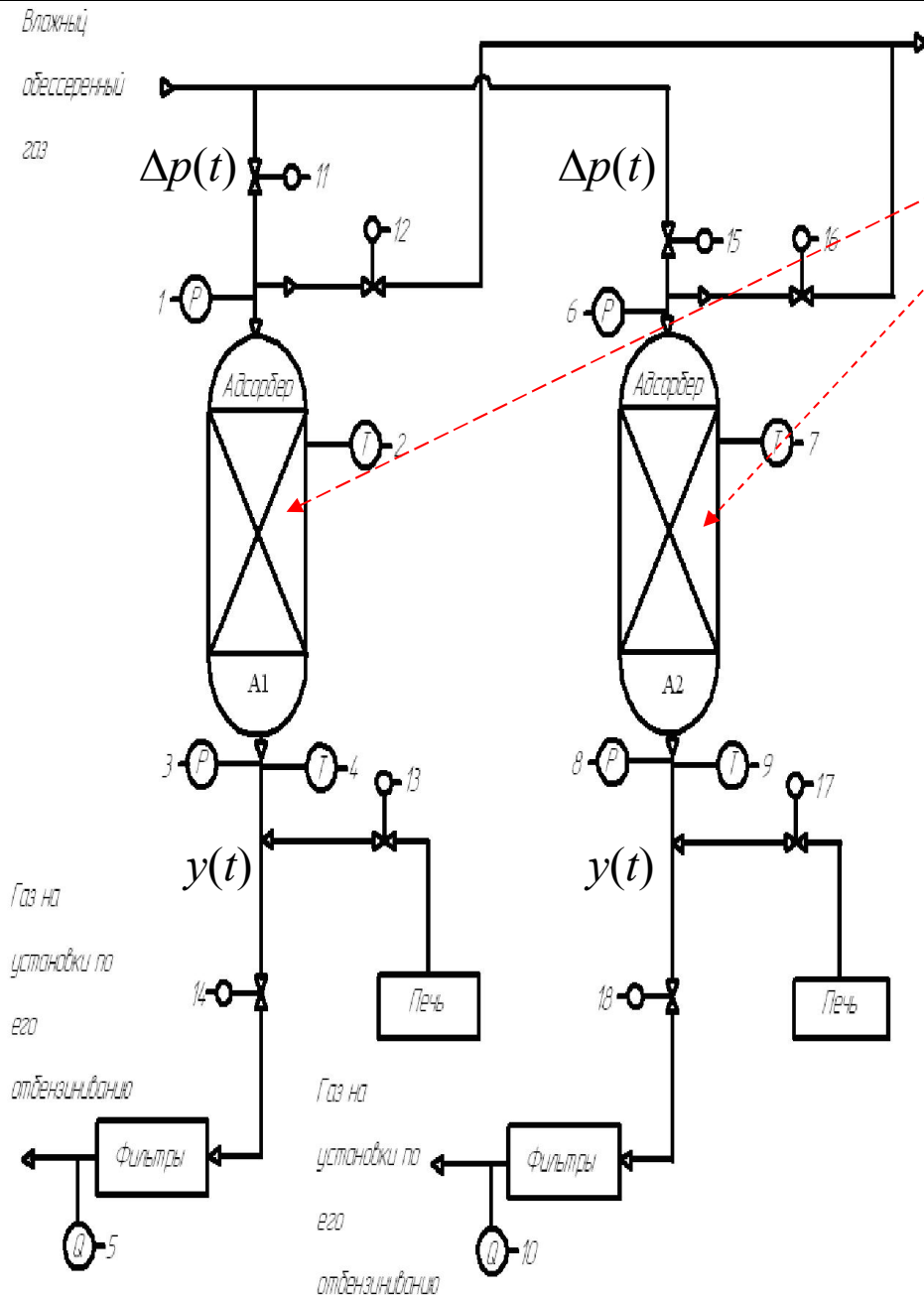


**Утверждение.** Пусть выполнены условия Предположений. Тогда при  $\mu \leq \mu_0$  система управления, состоящая из фильтра состояния, законов управлений и наблюдателей обеспечивает выполнение целевого условия и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.

# План выступления

1. Системы адаптивного управления
2. Системы робастного управления
- 3. Управление в химической промышленности**
  - **Адаптивное управление процессом адсорбции**
  - **Робастное управление процессом ректификации**

# Адаптивное управление адсорбером



## Модель адсорбера

$$Q(p)y(t) = k\sqrt{|\Delta P(t-h)|}$$

$y$  – концентрация жидкости в газе на выходе из адсорбера [ppm (относительное содержание влаги в газе)]

$\Delta P$  – давление на входе в адсорбер [КПа/см<sup>2</sup>]

$h$  – время запаздывания,  $h=300$  с

$$Q(p) = q_3p^3 + q_2p^2 + q_1p + q_0$$

Множество  $\Xi$ :

$$380439872 \leq q_3 \leq 620258112$$

$$1573228 \leq q_2 \leq 1602640$$

$$1963 \leq q_1 \leq 2081, \quad 0,5 \leq q_0 \leq 10$$

$$0,04 \leq k \leq 0,2$$

Цель управления  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_m(t-h)| < \delta$

Задача – найти  $u(t) = \sqrt{\Delta P(y, t)}$  : ЦУ

## Адаптивное управление адсорбером

**Эталонная модель**  $(p + 0,0008)^2(p + 0,001)y_m(t) = 0,17r(t)$

**Фильтр**  $\dot{V}(t) = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -6,4 \cdot 10^{-10} & -2,24 \cdot 10^{-6} & -2,24 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix} V(t) + [0, 0, 1]^T u(t - 300)$

**Наблюдатель**  $\dot{\xi}_1(t) = \xi_2(t) - 2 \cdot 10(\xi_1(t) - v(t)), \quad \dot{\xi}_2(t) = -100(\xi_1(t) - v(t))$

**Закон управления**  $\Delta P(t) = u^2(t) = (\dot{\xi}_2(t) + 2\xi_2(t) + \xi_1(t))^2, \quad v(t) = c^T(t)\bar{w}(t)$

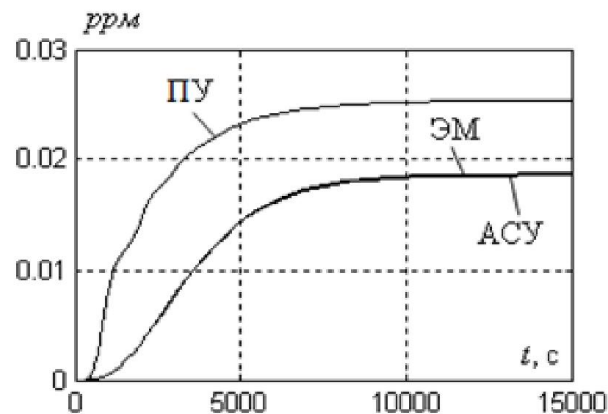
$$(p + 1)^2 \bar{w}(t) = w(t), \quad w = [V^T, 2,5 \cdot 10^{10} V^T, 0,3]^T$$

**Алгоритм настройки параметров**  $\dot{c}(t) = -0,3[y(t) - y_m(t)]\bar{w}(t - 300)$

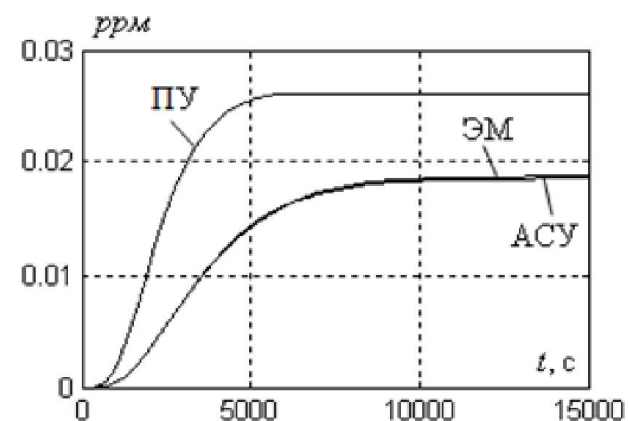
Модель 1.  $(619008000p^3 + 1571468,75p^2 + 1955,26p + 1)y(t) = 0,0848\sqrt{|\Delta p(t - 300)|}$

Модель 2.  $(380439872p^3 + 1602639,75p^2 + 2080,09p + 1)y(t) = 0,087\sqrt{|\Delta p(t - 300)|}$

Модель 1



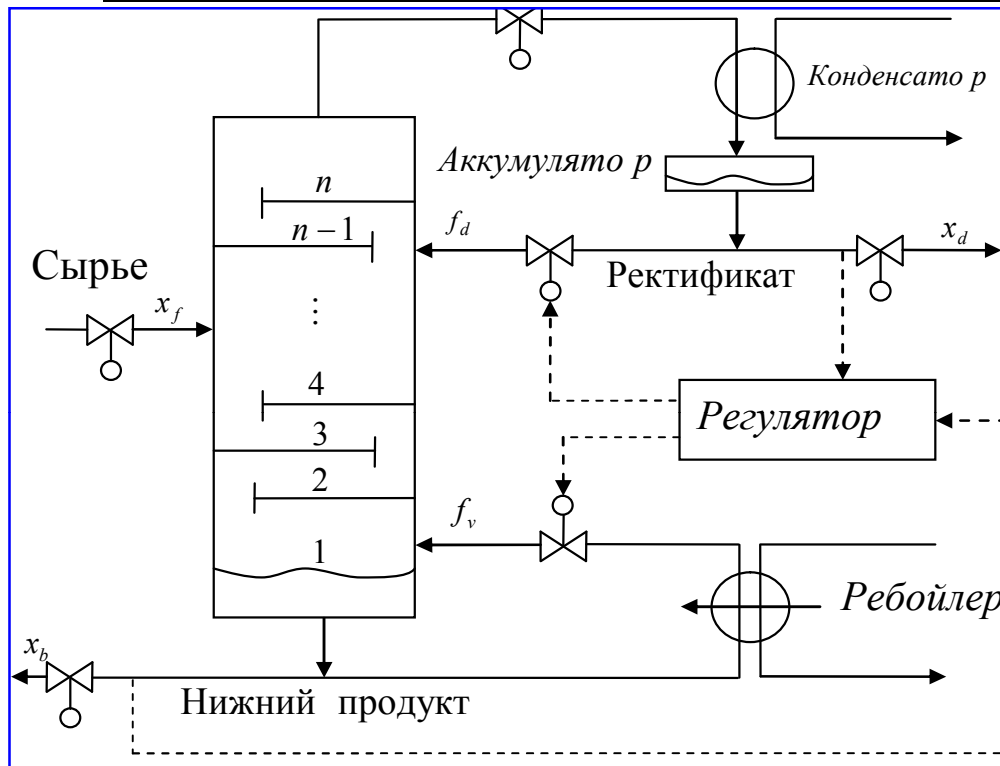
Модель 2





# Робастное управление ректификационной колонной

$$\begin{bmatrix} x_d(t) \\ x_b(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{4500p+1} \begin{pmatrix} 0,878 & -0,864 \\ 1,082 & -1,096 \end{pmatrix} (I + w_I(p, \vartheta) \Delta_I(\vartheta)) \begin{bmatrix} f_d(x_d, x_b, t) \\ f_v(x_d, x_b, t) \end{bmatrix} + G_d(p, \vartheta) x_f(t, \vartheta)$$



$x_d(t)$  – расход ректификата (моль/с)

$x_b(t)$  – расход нижнего продукта (моль/с)

$f_d(t)$  – обратный расход ректификата (моль/с)

$f_v(t)$  – обратный расход нижнего продукта (моль/с)

$x_f(t)$  – поток исходного сырья (моль/с)

$G(s)$  – номинальная ПФ

$G_d(s)$  – ПФ по подачи исходного сырья

$w_I(s)$  – структурная неопределенность

$\Delta_I$  – параметрическую неопределенность

Цель управления  $\left| [x_d(t), x_b(t)]^T - [0,99, 0,01]^T \right| < \delta$

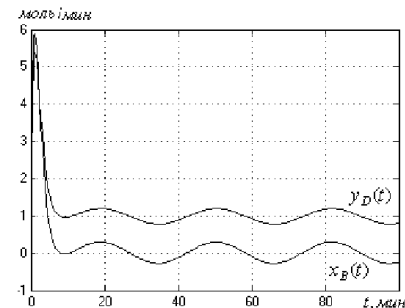
•Skogestad S., Morari M., Doyle J. Robust control of ill-conditioned plants: high-purity distillation // IEEE Transaction on Automatic Control. 1988. Vol. 33. No. 12. P. 1092-1105.

•Diggelen R.C., Kiss A.A., Heemink W. Comparison of control strategies for dividing-wall columns // Industrial & Engineering Chemistry Research. 2010. Vol. 49. No. 1. P. 288-307.

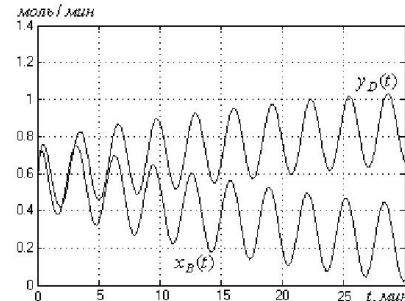
# Существующие решения

## 1. Исключены структурные возмущения. Внешнее возмещение не постоянное

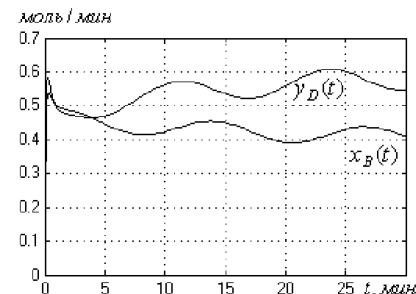
Инверсный регулятор 
$$C_1(p) = \frac{k_1(4500p+1)}{p} \begin{pmatrix} 39.942 & -31.487 \\ 39.432 & -31.997 \end{pmatrix}$$



Диагональный регулятор 
$$C_2(p) = \frac{k_2(4500p+1)}{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



$\mu$ -оптимальный регулятор 
$$C_\mu(p) = \frac{(4500p+1)}{p} \begin{pmatrix} 3.82 & -0.92 \\ 1.73 & -3.52 \end{pmatrix}$$



## 2. Наличие структурных возмущений требует пересчет регуляторов

## Робастное управление ректификационной колонной

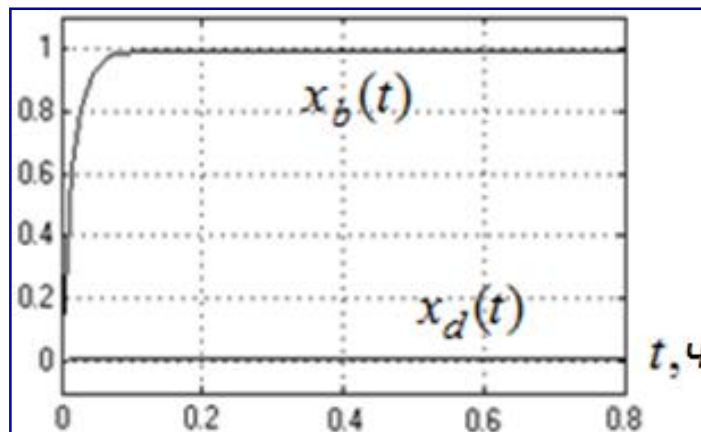
**Вспомогательный контур** 
$$\bar{e}(t) = \frac{1}{4500p+1} \begin{pmatrix} 0,878 & -0,864 \\ 1,082 & -1,096 \end{pmatrix} u(t)$$

**Наблюдатель** 
$$\dot{\xi}_{i1}(t) = -\xi_{i2}(t) - 2 \cdot 100(\xi_{i1}(t) - \zeta_i(t)), \quad \dot{\xi}_{i2}(t) = -100^2(\xi_{i1}(t) - \zeta_i(t)), \quad i=1,2$$

**Закон управления** 
$$u(t) = - \begin{bmatrix} 39,942 & -31,487 \\ 39,432 & -31,997 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4500\xi_{12}(t) + \xi_{11}(t) \\ 4500\xi_{22}(t) + \xi_{21}(t) \end{bmatrix}$$

**Модель ректификационной колонны**

$$y(t) = \frac{1}{4500p+1} \begin{pmatrix} -0,878 & 0,014 \\ -1,082 & -0,014 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0,2 \frac{5p+1}{0,5p+1} \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix} \right) u(t) + \begin{pmatrix} \frac{0,7}{14,4p+1} \\ \frac{1,3}{12p+1} \end{pmatrix} (2 + \sin(t-1))$$



## Робастное управление ректификационной колонной

Модель ректификационной колонны  $\dot{x}(t) = A(\mathcal{G})x(t) + B(\mathcal{G})u(y, t) + D(\mathcal{G})f(t, \mathcal{G})$ ,  $y(t) = Cx(t)$

$$A = A_m + B_m \text{ones}_{1 \times 11} - \text{неустойчивая}, \lambda_{\max}(A) = 0,8, B = 3B_m, F = 2D_m,$$

$$x(0) = [1 \ 0,8983 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0,4878 \ 1 \ 1]^T,$$

$$f(t) = 0,14[1 + 2 \sin t, 0,2 + 2 \sin 1,5t, 1 + 2 \sin 2t, 1 + 2 \sin 3t, 1 + 2 \sin 0,5t]^T$$

---

$x(t) = [x_d(t), x_6(t), \dots, x_f(t), \dots, x_1(t), x_b(t), P_c(t), V_s(t)]^T$ ,  $C = [0, 1, 0, \dots, 0]$ ,  $x_d(t)$  – концентрация легкой фракции в верхнем продукте,  $x_6(t)$  – концентрация легкой фракции в холодильнике,  $x_2(t), \dots, x_6(t)$  – концентрации легкой фракции в камерах № 2, ..., № 6,  $x_1(t)$  – концентрация легкой фракции в нагревателе,  $x_f(t)$  – концентрация легкой фракции в той части колонны, куда поступает исходная смесь (сырье),  $x_b(t)$  – концентрация легкой фракции в нижнем продукте,  $P_c(t)$  – давление в верхней камере колонны,  $V_s(t)$  – обратный расход нижнего продукта,  $u(t) = L_r(t)$  – расход орошения в верхней части колонны,  $f(t) = [P_f(t), F(t), z_f(t), P_{ss}(t), X_v(t)]^T$  – вектор неконтролируемых возмущений,  $P_f(t)$ ,  $F(t)$  и  $z_f(t)$  – давление, расход и концентрация легкой фракции в исходной смеси (сырье),  $P_{ss}(t)$ ,  $X_v(t)$  – давление и содержание легких фракций в обратном потоке нижнего продукта

---

**Эталонная модель**  $\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_m(t) + D_m f_m(t)$ ,  $y_m(t) = C x_m(t)$ .

$$u_m(t) = 0,1404, f_m(t) = 0,14[1 \ 0,2 \ 1 \ 1 \ 1]^T, x(0) = [1 \ 0,8983 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0,4878 \ 1 \ 1]^T$$

- 
- Буяхияу К., Григорьев Л., Лаауад, Ф. Оптимальное нечеткое управление для снижения энергопотребления в дистилляционных колоннах // Автоматика и телемеханика. 2005.

# Робастное управление ректификационной колонной

Цель управления

$$J = \int_0^{\infty} (0,008e_m^2(t) + 0,2u_0^2(t)) dt$$

Вспомогательный контур

$$\dot{\bar{\varepsilon}}(t) = A_0 \bar{\varepsilon}(t) + 0,04B_m u(t), \quad \bar{e}(t) = L\bar{\varepsilon}(t), \quad \bar{\varepsilon}(0) = 0.$$

Наблюдатель

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1(t) &= -\xi_2(t) - 2 \cdot 50(\xi_1(t) - \zeta(t)), & \dot{\xi}_2(t) &= -1 \cdot 50^2(\xi_1(t) - \zeta(t)), & \xi(0) &= 0 \\ u(t) &= -100[18,762\xi_2(t) + 0,405\xi_1(t) - \end{aligned}$$

Закон управления

$$\begin{aligned} & \frac{5,75 \cdot 10^{-4} p^9 + 3,53 \cdot 10^{-3} p^8 + 1,91 \cdot 10^{-3} p^7 + 4,27 \cdot 10^{-4} p^6 + 4,86 \cdot 10^{-5} p^5 + 3 \cdot 10^{-6} p^4 +}{p^{11} + 6,18 p^{10} + 3,76 p^9 + 0,984 p^8 + 0,14 p^7 + 0,012 p^6 + 5,96 \cdot 10^{-4} p^5 + 1,81 \cdot 10^{-5} p^4 +} \\ & \left. \frac{+ 9,97 \cdot 10^{-8} p^3 + 1,68 \cdot 10^{-9} p^2 + 1,27 \cdot 10^{-11} p + 3 \cdot 10^{-14}}{+ 3,23 \cdot 10^{-7} p^3 + 3,2 \cdot 10^{-9} p^2 + 1,62 \cdot 10^{-11} p + 3 \cdot 10^{-14}} e(t) \right]. \end{aligned}$$

