

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

На правах рукописи



Арановский Станислав Владимирович

**Идентификационные методы для синтеза адаптивных наблюдателей
нелинейных систем**

Специальность 05.13.01

Системный анализ, управление и обработка информации
(в технических системах)

Диссертация на соискание учёной степени
доктора технических наук

Научный консультант:
доктор технических наук, профессор
Бобцов Алексей Алексеевич

Санкт-Петербург – 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	6
ВВЕДЕНИЕ	7
Глава 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	18
1.1 Общая постановка задачи	18
1.2 Задача 1: оценивание вектора состояний линейной подсистемы . .	19
1.3 Задача 2: оценивание вектора состояний нелинейной подсистемы .	21
Глава 2 ПОСТРОЕНИЕ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ	
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВОЗМУЩАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ...	23
2.1 Обзор методов оценивания и компенсации синусоидальных воздействий	25
2.2 Идентификация параметров синусоидального сигнала	28
2.2.1 Параметризация измеряемого сигнала	28
2.2.2 Идентификация частоты несмещённого моночастотного сигнала	29
2.2.3 Идентификация частоты смещённого моночастотного сигнала	35
2.2.4 Анализ чувствительности алгоритма оценивания по отношению к ограниченным возмущениям	48
2.2.5 Идентификация частот мультисинусоидального сигнала . . .	53
2.3 Построение наблюдателей для периодических сигналов	61
2.3.1 Построение наблюдателя при измерении полного вектора состояний	62
2.3.2 Построение наблюдателя по измерениям выходного сигнала	72
2.4 Непрямая адаптивная компенсация синусоидальных возмущений .	77

2.4.1	Компенсация возмущений для нелинейного объекта	77
2.4.2	Компенсация возмущений для линейного объекта	80
2.5	Методы повышение точности оценивания параметров синусоидальных сигналов	92
2.5.1	Оценивание линейно меняющихся параметров	93
2.5.2	Использование адаптивной каскадной фильтрации для повышения точности оценивания	99
2.6	Выводы по главе	109

Глава 3 КОМПЕНСАЦИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ

ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ПОДАВЛЕНИЯ ВИБРАЦИЙ

ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ 112

3.1	Постановка задачи	115
3.2	Номинальный закон управления	116
3.2.1	Формирование оценки возмущения	116
3.2.2	Формирование номинального закона управления	117
3.2.3	Банк фильтров	122
3.3	Алгоритм адаптации и анализ устойчивости замкнутой системы . .	128
3.3.1	Формирование оценка вектора параметров	128
3.3.2	Анализ устойчивости	129
3.4	Экспериментальные исследования по подавлению вибраций для электромеханического объекта	133
3.4.1	Описание экспериментального стенда	133
3.4.2	Реализация алгоритма компенсации	135
3.4.3	Используемые показатели качества	138
3.4.4	Результаты численного моделирования	140
3.4.5	Экспериментальные результаты	140
3.5	Выводы по главе	150

Глава 4 СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ НЕИЗМЕРЯЕМЫХ СОСТОЯНИЙ К ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ПОСТОЯННЫХ ПАРАМЕТРОВ	152
4.1 Постановка задачи	153
4.2 Обзор наблюдателей для нелинейных систем	154
4.3 Построение адаптивного наблюдателя	156
4.3.1 Параметризация системы	156
4.3.2 Построение наблюдателя	158
4.4 Случай линейной стационарной системы	162
4.5 Построение адаптивного наблюдателя для преобразователя Чука .	165
4.5.1 Первый сценарий работы преобразователя	166
4.5.2 Второй сценарий работы преобразователя	171
4.6 Оценка положения ротора в бездатчиковом электродвигателе	172
4.6.1 Модель рассматриваемой системы	177
4.6.2 Построение адаптивного наблюдателя с оценкой параметров	179
4.6.3 Численное моделирование	186
4.7 Вывод по главе	192
Глава 5 МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ В ЗАДАЧА ОЦЕНИВАНИЯ	194
5.1 Процедура динамического расширения	196
5.1.1 Стандартная процедура оценивания и условие неисчезающего возбуждения	196
5.1.2 Процедура динамического расширения регрессора	196
5.1.3 Иллюстративный пример	201
5.2 Использование динамического расширения при оценивании параметров синусоидальных сигналов	206
5.2.1 Построение алгоритма оценивания с использованием ДРР .	206

5.3	Использование процедуры динамического расширения при нелинейной параметризации	216
5.3.1	Первый пример использования ДРР	217
5.3.2	Второй пример использования ДРР	222
5.3.3	Использование ДРР в общем случае	225
5.4	Выводы по главе	227
ЗАКЛЮЧЕНИЕ		229
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ		233

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

t	время
p	оператор дифференцирования, $p = \frac{d}{dt}$
I	единичная матрица
\mathbb{R}	множество действительных чисел
i	мнимая единица
$\text{Im}\{x\}$	мнимая часть x
$\text{Re}\{x\}$	действительная часть x
$x \in \mathbb{R}^{n_x}$	x – вектор действительных чисел размерности n_x
$\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times m}$	Γ – матрица действительных чисел размерности n на m .
$\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$	диагональная матрица размерности n на n с элементами a_1 — a_n на главной диагонали
\hat{x}	оценка переменной x
\tilde{x}	ошибка оценивания переменной x
θ	вектор неизвестных параметров
УЧП	уравнение в частных производных
АНОП	адаптивный наблюдатель с оценкой параметров
ДРР	динамическое расширение регрессора

ВВЕДЕНИЕ

Задача построения адаптивных наблюдателей для нелинейных систем является важной и актуальной как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. Действительно, нелинейные системы повсеместно встречаются на практике и являются важным объектом исследований в современной теории управления, располагающей к настоящему времени широким инструментарием средств как анализа нелинейных систем, так и управления ими [1].

С точки зрения управления можно выделить два подхода к решению задачи регулирования для нелинейных систем. Первый подход основан на использовании информации о полном векторе состояний системы, в то время как второй базируется на допущении, что измеряется только часть переменных. Естественно, что подходы, построенные в рамках допущения об измеримости всех переменных состояния, как правило, обеспечивают лучшее качество управления и применимы для более широкого класса объектов, нежели законы управления, оперирующие измерениями только части сигналов системы. Однако практическое использование таких методов нередко сталкивается со значительными препятствиями. Действительно, в большинстве прикладных задач для измерения полного вектора состояний технического объекта требуется установка дополнительных измерительных устройств, что повышает стоимость и сложность разработки, приводит к дополнительным вносимым датчиками шумам, а также не всегда приемлемо по техническим и экономическим причинам.

С другой стороны, необходимо отметить, что методы, оперирующие только измерением части вектора состояний, и привлекательные по этой причине для прикладных задач, зачастую могут быть использованы для управления ограниченным классом систем. Данное противоречие может быть разрешено за счёт построения наблюдателей вектора состояний системы

[2], позволяющих восстанавливать (оценивать) неизмеряемые переменные и использовать полученные оценки при формировании законов управления. В силу указанных соображений проблема построения наблюдателей для нелинейных систем вызывает высокий интерес [3].

Отметим, что синтез регуляторов для нелинейных систем является не единственной областью применения наблюдателей. Оценивание недоступных измерению состояний технического объекта может использоваться в задачах диагностики сбоев и обеспечения безопасности, для прогноза траекторий движения системы, оценки качества функционирования или же как сигнал для переключения режимов работы объекта. Оценка неизмеряемых сигналов в нелинейных колебательных системах может быть использована для прогноза перехода системы между различными предельными циклами, что может быть востребовано в ряде биологических приложений.

Однако хорошо зарекомендовавшие себя методы построения наблюдателей для линейных систем не могут быть, как правило, напрямую использованы для нелинейных объектов. Это происходит по следующей причине: так как для нелинейных систем в общем случае не соблюдаются принцип разделения динамики и принцип суперпозиции, то, в отличие от линейных систем, проведённые по отдельности анализ устойчивости алгоритма оценивания и устойчивости закона управления (при допущении, что все сигналы измеряются) не гарантируют, что замкнутая система с наблюдателем будет устойчива [4, 5]. Известно, например, что для нелинейных систем наличие в переходном процессе выбросов или колебаний может привести к потере устойчивости всей замкнутой системы [6]. В силу этого обстоятельства активные исследования по построению наблюдателей для нелинейных систем продолжают и в настоящее время.

Стоит отметить ставшие уже традиционными подходы, основанные на линеаризации исходной системы [7], а также наблюдатели Казантиса-Кравариса-Люенбергера [8]. К недостаткам этих подходов можно отнести то, что они могут быть использованы только для ограниченного класса нелинейных систем.

Одним из способов решения задачи построения наблюдателей для нелинейных систем является использование инструментария теории адаптивного управления. Адаптивное управление имеет богатую историю и хорошо зарекомендовало себя при решении разнообразных прикладных задач [9–11]. Приложение методов теории адаптивного управления к проблеме построения наблюдателей нелинейных систем привело к появлению класса решений, называемых адаптивными наблюдателями [12–17]. Полученные результаты были использованы в задачах обнаружения неисправностей [18, 19], управления двигателями [20, 21], оценивания скорости [22, 23], управления электротехническими системами [24, 25] и ряде других.

Тем не менее, известные результаты предлагают зачастую решение конкретных прикладных проблем и рассматривают достаточно узкую постановку задачи и, соответственно, ограниченный класс нелинейных систем. В целом же, проблема построения адаптивных наблюдателей нелинейных систем остаётся актуальным направлением исследований. К открытыми вопросами этого направления можно отнести:

- построение адаптивных наблюдателей в условиях действия возмущений;
- наличие в системе неизвестных параметров;
- расширение области применимости методов построения адаптивных наблюдателей;
- анализ качества переходных процессов и повышение точности оценивания.

Также предметом исследований остаётся вопрос определения класса траекторий системы, для которых возможно обеспечить сходимость оценок. Последний вопрос тесно связан с понятием регулярного входного сигнала и достаточного возбуждения траекторий системы [3]. Исследованию перечисленных вопросов посвящена настоящая диссертация.

В диссертации предложен новый подход к построению адаптивных наблюдателей нелинейных систем, основанный на сведении задачи оценивания к задаче идентификации постоянных параметров. Разработанные в рамках предложенного подхода методы применимы для широкого класса систем, в том числе подверженных действию возмущений. В последнем случае также предложены методы адаптивной компенсации указанных возмущений. В диссертационной работе уделяется внимание вопросам качества процессов оценивания, предложены методы как повышающие точность оценивания параметров внешних возмущений, так и обеспечивающие отсутствие выбросов и колебаний. Также предложен метод, позволяющий расширить класс траекторий системы, для которого гарантируется асимптотическая сходимость оценок.

В работе используются формальные математические методы: метод функции Ляпунова для анализа устойчивости, методы теории дифференциальных уравнений и линейной алгебры, методы частотных характеристик линейных систем и общие методы теории управления. Также в работе используются методы численного моделирования.

Целью диссертационной работы является разработка нового единого подхода к синтезу методов и алгоритмов построения адаптивных наблюдателей нелинейных систем по измерениям части переменных с использованием идентификационных подходов.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

1. Решена задача построения адаптивного наблюдателя состояния автономного генератора возмущающего воздействия с неизвестными параметрами, действующего на линейную или класс нелинейных систем. С использованием полученного наблюдателя решена задача компенсации указанного возмущения.

2. Для повышения точности оценивания параметров генератора детерминированного возмущения предложен метод построения каскада адаптивных полосовых фильтров.
3. Для подавления вибраций в электромеханических системах предложен метод, основанный на построении адаптивного наблюдателя внешних мультисинусоидальных воздействий. Полученный адаптивный наблюдатель использует концепцию декомпозиции возмущающего воздействия как линейной комбинации некоторых известных сигналов и решает задачу оценивания возмущения как задачу идентификации параметров указанной декомпозиции. Проведены экспериментальные исследования по подавлению вибраций на испытательном стенде.
4. Для нелинейных систем с частично измеряемым вектором состояний предложен метод построения адаптивных наблюдателей, позволяющий свести задачу оценивания состояний к идентификации вектора неизвестных постоянных параметров.
5. С использованием идентификационного метода построения адаптивных наблюдателей решена задача оценивания неизмеряемых электрических сигналов в преобразователе Чука.
6. С использованием идентификационного метода построения адаптивных наблюдателей решена задача оценивания неизмеряемого положения ротора в синхронном двигателе с постоянными магнитами.
7. Предложен метод динамического расширения регрессора, позволяющий обеспечить асимптотическую сходимость оценок вектора постоянных параметров в условиях недостаточного возбуждения входных сигналов.
8. С использованием метода динамического расширения регрессора была решена задача обеспечения монотонности и устранения выбросов

и колебаний в переходных процессах при оценивании неизвестных параметров.

Научная новизна. В работе изложен новый научно обоснованный подход к построению адаптивных наблюдателей нелинейных систем. Новизна изложенного подхода заключается в том, что задача оценивания недоступных прямому измерению состояний системы преобразуется в задачу идентификации неизвестных постоянных параметров, которая затем решается с привлечением идентификационных методов.

Для нелинейной системы, подверженной внешнему детерминированному возмущению, предложен метод построения адаптивного наблюдателя возмущения, отличающийся от известных аналогов пониженной размерностью алгоритма оценивания. Также предложен новый метод повышения точности оценивания параметров внешних возмущений, основанный на построении каскада адаптивных фильтров. Для подавления детерминированных мультисинусоидальных возмущений, действующих на электромеханический объект, в диссертации предложен метод, научная новизна которого состоит в представлении действующего на объект возмущения как комбинации опорных сигналов, которые формируются с использованием банка фильтров. Это, в свою очередь, позволяет представить задачу построения адаптивного наблюдателя возмущения как задачу идентификации параметров такой комбинации.

Научная новизна предложенного в диссертации метода построения адаптивных наблюдателей с оценкой параметров заключается в расширении класса нелинейных систем, для которых такой наблюдатель может быть построен. А именно, предложенный метод применим в тех случаях, когда возможно отыскать преобразование части координат, переводящее исходную систему в желаемую каскадную форму, что выгодно отличается от аналогов, требующих построения преобразования по всем координатам системы.

Научная новизна предложенного в диссертации метода динамического расширения заключается в том, что он позволяет сформулировать новые достаточные требования для асимптотического оценивания параметров, которые, как показано в диссертации, в ряде случаев выгодно отличаются от требования к неисчезающему возбуждению, используемому в большинстве аналогов. Также научной новизной метода динамического расширения является его возможность обеспечить монотонность переходных процессов ошибок оценивания параметров.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость изложенных в диссертации результатов заключается в том, что они вносят вклад в развитие теории управления, предлагая новый научно обоснованный подход к построению адаптивных наблюдателей. Предложенные в диссертации методы могут быть в дальнейшем использованы для решения широкого круга задач адаптивного управления, идентификации параметров, анализа сходимости алгоритмов оценивания недоступных измерению сигналов.

Практическая значимость представленных результатов заключается в том, что полученные методы построения адаптивных наблюдателей нелинейных систем могут быть эффективно применены для широкого класса технических объектов, где ряд сигналов недоступен прямому измерению в силу технических или экономических причин. Применение предложенных в диссертации методов позволит формировать оценку этих сигналов, которая затем может быть использована для построения управления по обратной связи, для диагностики и мониторинга состояния технического объекта, в задачах контроля неисправностей и многих других. Применение предложенных в работе методов позволит также снизить число датчиков, используемых в техническом объекте, для которого решается задача автоматического управления, что положительно скажется как на стоимости, так и на сложности разработки и изготовления такого объекта. В частности, при проведении экспериментальных исследований использование предложенного в работе метода адаптивного оценивания

детерминированного мультисинусоидального возмущения позволило избежать использования датчика вибраций в задачах подавления колебаний для электромеханического объекта.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Метод синтеза адаптивных наблюдателей переменных состояния линейных генераторов возмущающих воздействий, основанный на точном восстановлении неизвестных постоянных параметров генератора. За счёт предложенной параметризации модели объекта управления данный метод расширяет методику синтеза стабилизирующих регуляторов, основанную на подходе Юлы-Кучеры.
2. Метод повышения точности оценивания параметров зашумлённого генератора синусоидального сигнала с использованием каскада адаптивных полосовых фильтров.
3. Концепция синтеза адаптивных наблюдателей, основанная на преобразовании по части координат и позволяющая свести задачу оценивания состояний к задаче идентификации постоянных параметров. Данная концепция расширяет класс нелинейных систем, для которых существуют методики синтеза наблюдателей переменных состояния, и, в отличие от известных аналогов, не требует построения преобразования по всем координатам системы.
4. Метод динамического расширения регрессора, основанный на преобразовании исходной векторной модели к скалярным уравнениям, содержащим только один неизвестный параметр. В сравнении с существующими подходами, данный метод обеспечивает увеличение быстродействия и монотонность переходных процессов ошибок оценивания параметров, а также предлагает новые достаточные условия сходимости.

Степень достоверности полученных результатов, представленных в диссертационной работе, подтверждается:

- аналитическими доказательствами применимости предложенных в диссертации методов и алгоритмов, асимптотической сходимости оценок и устойчивости полученных систем;
- представленными в диссертации результатами численного моделирования предложенных алгоритмов;
- представленными в работе результатами экспериментальных исследований по подавлению вибраций на стендовом оборудовании;
- печатными работами, а также докладами на международных конференциях.

Апробация работы. Представленные в диссертации результаты прошли апробацию как при рецензировании журнальных статей, так и в ходе докладов на следующих международных конференциях:

- 9th IFAC Workshop Adaptation and Learning in Control and Signal Processing, Saint-Petersburg, Russia, 2007. [26] (9-ая международная конференция по адаптации и обучению в управлении и обработке сигналов);
- 15th IFAC Symposium on System Identification, Saint-Malo, France, 2000. [27] (15-ый международный симпозиум по идентификации систем);
- 18th IFAC World Congress, Milan, Italy, 2011. [28] (18-й Всемирный конгресс по автоматическому управлению);
- 20th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation, Barcelona, Spain, 2012. [29] (20-ая Средиземноморская конференция по управлению и автоматизации);
- European Control Conference, Zurich, Switzerland, 2013. [30] (Европейская конференция по управлению);

- 11th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing, Caen, France, 2013. [31] (11-ая международная конференция по адаптации и обучению в управлении и обработке сигналов);
- IEEE International Conference on Control Applications, Antibes, France, 2014. [32, 33] (Международная конференция по прикладным системам управления);
- 19th IFAC World Congress of the International Federation of Automatic Control, Cape Town, South Africa, 2014. [34] (19-й Всемирный конгресс по автоматическому управлению);
- 1st IFAC Conference on Modeling, Identification and Control of Nonlinear Systems, Saint Petersburg, Russia, 2015. [35, 36] (1-ая конференция по моделированию, идентификации и управлению нелинейными системами);
- IEEE International Conference on Control Applications, Sydney, Australia, 2015. [37] (Международная конференция по прикладным системам управления);
- 54th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, Osaka, Japan, 2015. [38] (54-ая Конференция по системным решениям и управлению);
- 12th IFAC Workshop Adaptation and Learning in Control and Signal Processing, Eindhoven, The Netherlands, 2016. [39] (12-ая международная конференция по адаптации и обучению в управлении и обработке сигналов);
- IEEE American Control Conference, Boston, USA, 2016. [40] (Американская конференция по управлению).

Личный вклад. Личный вклад соискателя состоит в непосредственном участии во всех этапах диссертационного исследования, в анализе научной

литературы по теме исследования, в разработке изложенного в диссертации подхода, в выборе использованных методов исследований, формулировании основных утверждений и их доказательстве. Также соискатель принимал непосредственное участие в проведение экспериментальных исследований, результаты которых отражены в диссертации.

Публикации. Основные научные результаты диссертационной работы изложены в 37 печатных изданиях, включая 22 журнальные публикации [41–62] и 15 публикаций в сборниках трудов международных конференций [26–40].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 250 страниц. Диссертация содержит 117 рисунков, 8 таблиц. Список литературы включает 136 наименований.

Глава 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1 Общая постановка задачи

В работе рассматривается нелинейная система вида

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), \theta), \\ y(t) &= h(x(t), u(t), \theta),\end{aligned}\tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ – вектор состояний, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ – вектор входных сигналов, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ – вектор измеряемых сигналов, $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ – вектор неизвестных *постоянных* параметров, $t > 0$ – параметр времени.

Допущение 1.1. *Относительно системы (1.1) выполняются следующие допущения:*

Д1.1-1) Преобразования $f : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ и $h : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ гладкие.

Д1.1-2) Предполагается, что начальные условия $x(0)$ и вектор входных воздействий $u(t)$ такие, что все траектории системы (1.1) определены для всех $t > 0$ и ограничены.

Допущение Д1.1-2 является стандартным допущением в задачах построения наблюдателей и позволяет вывести из рассмотрения вопрос регулирования исходной системы, существования и ограниченности решений.

Для системы (1.1) рассматривается проблема восстановления неизмеряемого вектора $x(t)$, а именно нахождения таких преобразований $f_\chi : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ и $h_\chi : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$, что наблюдатель вида

$$\begin{aligned}\dot{\chi}(t) &= f_\chi(\chi(t), u(t), y(t)), \\ \hat{x}(t) &= h_\chi(\chi(t), u(t), y(t)),\end{aligned}\tag{1.2}$$

где $\chi \in \mathbb{R}^{n_\chi}$, обеспечивает

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{x}(t) - x(t)| = 0. \quad (1.3)$$

Рассмотрим декомпозицию модели (1.1) на две подсистемы:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), u(t), \theta), \quad (1.4)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), u(t), \theta), \quad (1.5)$$

$$y(t) = h(x_1(t), x_2(t), u(t), \theta), \quad (1.6)$$

где $x_1 \in \mathbb{R}^{n_{x_1}}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_{x_2}}$ и

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Сформулируем следующие два допущения и соответствующие им задачи для системы (1.4)-(1.6) и проблемы оценки вектора $x(t)$.

1.2 Задача 1: оценивание вектора состояний линейной подсистемы

Допущение 1.2. Пусть функции $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ и $h(\cdot)$ такие, что система (1.4)-(1.6) может быть записана в виде

$$\dot{x}_1(t) = \phi_1(x_1(t), u(t)) + g_1(x_1(t), x_2(t), u(t)), \quad (1.7)$$

$$\dot{x}_2(t) = \Gamma(\theta)x_2(t), \quad (1.8)$$

$$y(t) = x_1(t), \quad (1.9)$$

где $\phi_1 : \mathbb{R}^{n_{x_1}} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{x_1}}$ и $g_1 : \mathbb{R}^{n_{x_1}} \times \mathbb{R}^{n_{x_2}} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{x_1}}$ – гладкие преобразования, $\Gamma : \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{x_2} \times n_{x_2}}$ также гладкая, причём все собственные числа матрицы $\Gamma(\theta)$ не кратны и имеют нулевую действительную часть. Так же существует такой вектор постоянных значений $q \in \mathbb{R}^{n_{x_1}}$, что

$$q^\top g_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) \equiv h^\top x_2(t), \quad (1.10)$$

где $h \in \mathbb{R}^{n_{x_2}}$ – вектор постоянных значений, такой что пара $(\Gamma(\theta), h^\top)$ полностью наблюдаема.

Так как вектор $x_1(t)$ измеряется, см. равенство (1.9), то проблема оценивания вектора $x(t)$ сводится к задаче оценивания вектора $x_2(t)$. Очевидно, что (1.8) задаёт динамику линейной автономной системы с матрицей состояний $\Gamma(\theta)$ и некоторым неизвестным начальным условием $x_2(0)$. Интерес представляет только тот случай, когда все собственные числа матрицы $\Gamma(\theta)$ не кратны и лежат на мнимой оси. В противном случае либо автономная система устойчива и вектор $x_2(t)$ стремится к нулю, т.е. проблема оценивания решается тривиальной оценкой $\hat{x}_2(t) \equiv 0$, либо автономная система неустойчива и не удовлетворяет Допущению 1.1.

Предположим, что вектор параметров θ известен. Тогда решающий задачу оценивания наблюдатель (1.2) может быть построен как

$$\begin{aligned}\dot{\chi}(t) &= \Gamma(\theta)\hat{x}_2(t) - Kh^\top\hat{x}_2(t) - Kq^\top\phi_1(x_1(t), u(t)), \\ \hat{x}_2(t) &= \chi(t) + Kq^\top y(t),\end{aligned}\tag{1.11}$$

где $n_\chi = n_{x_2}$, вектор $K \in \mathbb{R}^{n_{x_2}}$ выбран так, что матрица $\Gamma(\theta) - Kh^\top$ Гурвицева. Нетрудно видеть, что в этом случае динамика ошибки оценивания $\tilde{x}_2(t) := \hat{x}_2(t) - x_2(t)$ задаётся как

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_2(t) &= \dot{\hat{x}}_2(t) - \dot{x}_2(t) = \\ &= \Gamma(\theta)\hat{x}_2(t) - Kh^\top\hat{x}_2(t) + Kh^\top x_2(t) - \Gamma(\theta)x_2(t) = \\ &= (\Gamma(\theta) - Kh^\top)\tilde{x}_2(t),\end{aligned}$$

где было использовано (1.10) и равенство

$$Kq^\top\dot{y}(t) = Kq^\top\phi_1(x_1(t), u(t)) + Kh^\top x_2(t).$$

Тогда, в силу выбора вектора K , выполняется

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{x}(t) - x(t)| = 0.$$

Вернёмся теперь к исходной задаче, когда вектор θ неизвестен. В этом случае матрица $\Gamma(\theta)$ в наблюдателе (1.11) может быть заменена на её оценку $\hat{\Gamma} := \Gamma(\hat{\theta})$.

Тогда задача оценивания вектора состояний $x_2(t)$ является задачей построения адаптивного наблюдателя, основанного на идентификации вектора неизвестных параметров θ .

1.3 Задача 2: оценивание вектора состояний нелинейной подсистемы

Допущение 1.3. Рассмотрим систему (1.4)-(1.5) предполагая, что вектор параметров θ известен и вектор $x_1(t)$ измеряется, т.е. уравнения (1.4)-(1.6) принимают вид

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)), \quad (1.12)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)), \quad (1.13)$$

$$y(t) = x_1. \quad (1.14)$$

С учётом Допущения 1.3 для оценки вектора $x(t)$ требуется построить наблюдатель для нелинейной подсистемы (1.13). Предполагая, что существуют преобразования

$$- \phi : \mathbb{R}^{n_{x_1}} \times \mathbb{R}^{n_{x_2}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z},$$

$$- \phi^L : \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_{x_1}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{x_2}},$$

$$- h_z : \mathbb{R}^{n_{x_1}} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z},$$

такие что $\forall x_1 \in \mathbb{R}^{n_{x_1}}, \forall x_2 \in \mathbb{R}^{n_{x_2}}$ выполняется

$$\phi^L(\phi(x_1, x_2), x_1) = x_2, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2, u) + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2, u) = h(x_1, u), \quad (1.16)$$

задача оценивания вектора $x_2(t)$ может быть представлена как задача идентификации некоторого вектора неизвестных постоянных параметров θ_0 , что приводит к построению адаптивного наблюдателя для нелинейной системы (1.12)-(1.14).

Таким образом, задача построения наблюдателя вида (1.2) для системы (1.1), обеспечивающего достижение целевого условия (1.3) при выполнении Допущения 1.3 сводится к задаче поиска преобразований ϕ , ϕ^L и h и синтеза схемы идентификации вектора неизвестных постоянных параметров θ_0 .

Глава 2

ПОСТРОЕНИЕ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВОЗМУЩАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

В этой главе рассматривается решение Задачи 1, сформулированной в разделе 1.2. Для простоты изложения, повторим формулировку задачи, изложенную в Допущении 1.2. Пусть система (1.4)-(1.6) может быть записана в виде

$$\dot{x}_1(t) = \phi_1(x_1(t), u(t)) + g_1(x_1(t), x_2(t), u(t)), \quad (2.1)$$

$$\dot{x}_2(t) = \Gamma(\theta)x_2(t), \quad (2.2)$$

$$y(t) = x_1(t), \quad (2.3)$$

где свойства ϕ_1 и g_1 определены в Допущении 1.2, причём все собственные числа матрицы $\Gamma(\theta)$ не кратны и имеют нулевую действительную часть. Так же существует такой вектор постоянных значений $q \in \mathbb{R}^{n_{x_1}}$, что

$$q^\top g_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) \equiv h^\top x_2(t), \quad (2.4)$$

где $h \in \mathbb{R}^{n_{x_2}}$ – вектор постоянных значений, такой что пара $(\Gamma(\theta), h^\top)$ полностью наблюдаема. Ставится задача оценивания вектора состояния $x_2(t)$ при измеряемых сигналах $y(t)$, $u(t)$ и неизвестном векторе постоянных параметров θ .

Введём в рассмотрение дополнительный сигнал

$$\rho(t) := h^\top x_2(t). \quad (2.5)$$

В силу свойств матрицы $\Gamma(\theta)$ и вектора h сигнал $\rho(t)$ имеет вид

$$\rho(t) = A_0 + \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t + \phi_i), \quad (2.6)$$

где N – число синусоидальных компонент в сигнале, амплитуды $A_i > 0$ и фазы $\phi_i \in [0, 2\pi)$ определяются начальными условиями $x_2(0)$, наличие постоянного

смещения A_0 определяется тем, имеет ли матрица $\Gamma(\theta)$ нулевое собственное число. Если матрица $\Gamma(\theta)$ не имеет нулевого собственного числа, то постоянного смещения A_0 нет, число n_{x_2} чётное и $N = \frac{1}{2}n_{x_2}$. Если же матрица $\Gamma(\theta)$ имеет нулевое (некратное) собственное число, то n_{x_2} – нечётное и

$$N = \frac{n_{x_2} - 1}{2}.$$

Неизвестные частоты ω_i , где i варьируется от 1 до N , определяются параметрами θ . Далее в этой главе будем полагать, что $n_\theta = N$ и между частотами ω_i и вектором параметров θ существует однозначная взаимосвязь. Пример такой параметризации приведён в подразделе 2.2.1.

В этой главе структурно выделено четыре раздела в соответствии с рассматриваемыми в них подзадачами, а именно:

- Идентификация параметров синусоидального сигнала. Будем полагать, что сигнал $\rho(t)$ доступен измерению и требуется получить оценку (идентифицировать) вектора неизвестных параметров θ .
- Построение наблюдателя для синусоидальных сигналов. Будем считать, что в системе (2.1)-(2.3) измерению доступны только сигналы $y(t)$ и $u(t)$. Требуется построить оценку вектора состояния $x_2(t)$. Эта подзадача содержательно совпадает с Задачей 1, а её решение строится на основе методов идентификации параметров синусоидального сигнала. Дополнительно рассматривается случай, когда, в отличие от (2.3), измерению доступен не весь вектор состояний $x_1(t)$.
- Непрямая адаптивная компенсация возмущения. Эта подзадача иллюстрирует возможность применения предлагаемых методов в задачах компенсации вибраций и периодических возмущений. В контексте этой подзадачи подсистема, ассоциированная с состоянием $x_2(t)$, будет рассматриваться как генератор возмущающего периодического (синусоидального) воздействия, которое влияет на подсистему,

ассоциированную с состоянием $x_1(t)$. Требуется компенсировать влияние такого возмущения.

- Улучшение сходимости оценки параметров синусоидального сигнала. В этом разделе предложены способы улучшения сходимости оценок параметров, снизить влияние шумов измерений и, в частности, оценить линейно меняющуюся частоту синусоидального сигнала.

2.1 Обзор методов оценивания и компенсации синусоидальных воздействий

Проблема идентификации и наблюдения синусоидальных и мультисинусоидальных сигналов является важной базовой проблемой, находящей различные применения в теоретических и инженерных дисциплинах (см., например, [63]). В частности, такая проблема возникает в задачах компенсации возмущающих воздействий, имеющих периодическую составляющую. Если частота возмущающего воздействия известна, то можно использовать широко распространённый метод внутренней модели (см., например, [64]). Если частота возмущающего воздействия не известна, то решение задачи компенсации возмущений представляет собой достаточно сложную задачу.

Оценивание параметров синусоидальных сигналов

На сегодняшний день известен ряд подходов, посвящённых идентификации неизвестной частоты синусоидальной функции $A \sin(\omega t + \phi)$ (см., например, [65–73]). Отметим, что на сегодняшний день подходы к идентификации параметра $\omega > 0$ не ограничены изучением случая одной синусоиды [63, 67, 69]. В частности, в статьях [65, 68] рассматривается проблема идентификации частоты смещённого синусоидального сигнала, а в работах [66, 70, 72, 73] опубликован общий случай гармонического сигнала, представляющего собой

сумму N синусоидальных функций с различными частотами. Однако в большинстве работ посвящённых синтезу алгоритмов идентификации частоты в непрерывном времени не обсуждается или отсутствует теоретическое обоснование увеличения быстродействия параметрической сходимости и свойства робастности алгоритмов.

Построение наблюдателей неизмеряемых синусоидальных сигналов

Задача оценивания неизмеряемых состояний генератора синусоидального сигнала при неизвестных частотах может быть решена с использованием методов адаптивного наблюдения [74–80]. Однако, большинство известных работ посвящены случаю, когда синусоидальное возмущение приведено только ко входу объекта [74–78], и эти результаты не могут быть непосредственно распространены на более общий случай, рассматриваемый в настоящей работе. В работах [79, 80], в свою очередь, рассмотрен случай возмущений в выходном сигнале, но только для ограниченного класса линейных минимально фазовых объектов.

Компенсация синусоидальных воздействий

Так же за последние десятилетия был разработан методов решения задачи компенсации синусоидальных воздействий. В большинстве из них рассматривается линейная система (стабильная или минимально-фазовая) [81–86]. Однако, существенная часть алгоритмов компенсации возмущений рассматривает задачу сведения выхода объекта в ноль, т.е. либо рассматривается устойчивый объект с нулевым входом, либо задача компенсации объединяется с задачей синтеза стабилизирующего регулятора. Такой подход имеет ограничения, так на практике для большого числа объектов управления уже известен (построен) некоторый номинальный закон управления, обеспечивающий надлежащую отработку объектом задающего сигнала, и

возникает естественное желание разработчика обеспечить компенсацию возмущений не изменяя работу номинальной системы.

Для нелинейных систем, при допущении минимальной фазовости было предложено несколько решений (см., например, [87–90]). В [87] рассматривается проблема полуглобальной стабилизации по измерениям выходного сигнала для параметрически неопределенных систем, когда известны границы возможных значений частоты и возмущения. В [88] была предложена глобальная робастная схема управления с обратной связью по состоянию для систем с неизвестным мульти-синусоидальным возмущением, представляющим регулярную составляющую и нерегулярным воздействием. Для не минимально-фазовых нелинейных систем в работе [89] представлен алгоритм глобальной стабилизации для случая известного количества частот в возмущающем воздействии. И, наконец, в [90] предложен компенсатор с обратной связью по выходному сигналу для не минимально-фазовых нелинейных систем в случае, если известно только верхняя граница для числа синусоид, входящих в состав возмущающего воздействия.

Результаты, представленные в настоящей работе, отличаются от аналогов пониженной размерностью, что справедливо как для алгоритмов оценивания, так и для регуляторов, построенных на их основе. Для нелинейных систем рассматривается задача, когда возмущение приложено ко входу объекта. Для случая линейного объекта в работе предложена общая схема компенсации, основанная на параметризации Юлы-Кучеры и позволяющая строить компенсатор возмущения параллельно заранее заданному устройству стабилизации.

2.2 Идентификация параметров синусоидального сигнала

Пусть измеряется скалярный сигнал $\rho(t)$ вида (2.6). Требуется сформировать оценку частот $\hat{\omega}_i(t)$, такую что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{\omega}_i(t) - \omega_i| = 0 \text{ для всех } i = 1, \dots, N. \quad (2.7)$$

Поставленная задача решается с использованием метода, опубликованного в работе [43] для случая $A_0 = 0$ и $N = 1$ и позже расширенного в работах [26, 31, 45, 46, 58, 59] для общего случая смещённых и мультисинусоидальных сигналов.

2.2.1 Параметризация измеряемого сигнала

Сигнал $\rho(t)$ является выходом линейной автономной системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \Gamma(\theta)x_2(t), \quad x_2(0) \neq 0, \\ \rho(t) &= h^\top x_2(t). \end{aligned}$$

В силу Допущения 1.2 матрица $\Gamma(\theta)$ имеет только некрратные собственные числа с нулевой действительной частью. Рассмотрим сначала случай, когда матрица $\Gamma(\theta)$ не имеет нулевого собственного числа и $n_\theta = N = \frac{1}{2}n_{x_2}$. Тогда характеристический полином матрицы $\Gamma(\theta)$ имеет вид

$$P_\Gamma(s) := s^{2N} + s^{2N-2}\theta_N + s^{2N-4}\theta_{N-1} + \dots + s^2\theta_2 + \theta_1,$$

причём корнями полинома $P_\Gamma(s)$ являются пары комплексно-сопряжённых значений $\pm\omega_i i$, где i – мнимая единица. В этом случае удобно рассматривать параметризацию вида

$$\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N]^\top,$$

то есть рассматривать в качестве вектора неизвестных параметров вектор, состоящий из коэффициентов характеристического полинома $P_\Gamma(s)$. В следующем Замечании сформулирована эквивалентность задач идентификации.

Замечание 2.1. Задача определения частот ω_i и задача определения параметров θ_i полинома P_Γ , где $i = 1, \dots, N$, являются взаимнооднозначными.

Если же матрица $\Gamma(\theta)$ имеет нулевой корень, то её характеристический полином имеет вид

$$\bar{P}_\Gamma(s) := sP_\Gamma(s)$$

и имеет один нулевой корень, а остальные корни совпадают с корнями полинома P_Γ . Таким образом, замечание 2.1 остаётся справедливым.

Далее в работе под идентификацией (оцениванием) частот будет подразумеваться эквивалентная идентификация (оценивание) вектора параметров θ .

2.2.2 Идентификация частоты несмещённого моночастотного сигнала

Постановка задачи

Начнём решение задачи идентификации частот синусоидальных сигналов с частной подзадачи идентификации частоты несмещённого моносинусоидального измеряемого скалярного сигнала вида

$$\rho_m(t) = A \sin(\omega t + \phi), \quad (2.8)$$

где $A > 0$ – неизвестная постоянная амплитуда сигнала, $\phi \in [0, 2\pi)$ – неизвестная постоянная фаза, а ω – неизвестная постоянная частота, которую требуется оценить, то есть построить оценку $\hat{\omega}(t)$, такую что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{\omega}(t) - \omega| = 0. \quad (2.9)$$

Построение регрессионной модели

Хорошо известно, что для генерирования синусоидального сигнала вида (2.8) можно использовать дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2}{dt^2} \rho_m(t) = -\omega^2 \rho_m(t) = -\theta \rho_m(t), \quad (2.10)$$

где $\theta = \omega^2$ – постоянный параметр. В этом случае полином $P_\Gamma(s)$, определённый в подразделе 2.2.1, имеет вид

$$P_\Gamma(s) = s^2 + \theta,$$

и задача оценивания частоты ω сводится к задаче оценивания параметра θ .

Введём в рассмотрение вспомогательный фильтр

$$\begin{cases} \dot{\varsigma}_1(t) = \varsigma_2(t), \\ \dot{\varsigma}_2(t) = -2\varsigma_2(t) - \varsigma_1(t) + \rho_m(t), \\ \varsigma(t) = \varsigma_1(t) \end{cases}$$

или

$$\varsigma(t) = \frac{1}{(p+1)^2} \rho_m(t). \quad (2.11)$$

Обозначим

$$z(t) := 2\dot{\varsigma}(t) + \varsigma(t) - \rho_m(t). \quad (2.12)$$

Лемма 2.1. *Рассмотрим дифференциальное уравнение (2.10) и дополнительный фильтр (2.11). Тогда выполняется*

$$z(t) = \theta\varsigma(t) + \varepsilon_\rho(t), \quad (2.13)$$

где $\varepsilon_\rho(t)$ – экспоненциально затухающая функция времени, определяемая ненулевыми начальными условиями.

Доказательство. Переходя к изображениям Лапласа для уравнения (2.10), получаем

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{-1}{(s+1)^2} \theta R(s) + \frac{2s+1}{(s+1)^2} R(s) + \frac{D(s)}{(s+1)^2} = \\ &= \theta \frac{-1}{(s+1)^2} R(s) + \frac{2s}{(s+1)^2} R(s) + \frac{1}{(s+1)^2} R(s) + \frac{D(s)}{(s+1)^2}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где s – комплексная переменная,

$$R(s) = \mathcal{L}\{\rho_m(t)\}$$

представляет собой результат преобразования Лапласа сигнала $\rho_m(t)$, а полином $D(s)$ обозначает сумму всех членов, содержащих ненулевые начальные условия.

Из уравнения (2.14) имеем

$$\rho_m(t) = -\theta \frac{1}{(p+1)^2} \rho_m(t) + \frac{2p}{(p+1)^2} \rho_m(t) + \frac{1}{(p+1)^2} \rho_m(t) - \varepsilon_\rho(t), \quad (2.15)$$

где экспоненциально затухающая функция времени

$$\varepsilon_\rho(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-D(s)}{(s+1)^2} \right\}$$

определяется ненулевыми начальными условиями.

Поставляя (2.11) в уравнение (2.15), получаем

$$2\dot{\zeta}(t) + \zeta(t) - \rho_m(t) = \theta\zeta(t) + \varepsilon_\rho(t),$$

что и требовалось доказать. □

Оценивание постоянного параметра θ

Пренебрегая экспоненциально затухающей составляющей $\varepsilon_\rho(t)$, перепишем (2.13) как

$$z(t) = \theta\zeta(t). \quad (2.16)$$

Для оценивания параметра θ построим адаптивный идентификатор

$$\hat{z}(t) = \hat{\theta}(t)\zeta(t),$$

где $\hat{z}(t)$ – оценка сигнала $z(t)$, а $\hat{\theta}(t)$ – оценка параметра θ . Выберем следующий алгоритм оценивания неизвестного параметра:

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = k_\zeta(t)(z(t) - \hat{z}(t)). \quad (2.17)$$

Утверждение 2.1. *Для модели (2.16) с алгоритмом оценивания (2.17) выполняется*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{\theta}(t) - \theta| = 0,$$

что, в свою очередь, обеспечивает достижение цели (2.9).

Доказательство. Рассмотрим ошибку

$$\tilde{\theta}(t) := \theta - \hat{\theta}(t). \quad (2.18)$$

Дифференцируя (2.18), получим

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}}(t) &= -\dot{\hat{\theta}}(t) = -k_{\zeta}(t)(z(t) - \hat{z}(t)) = \\ &= -k_{\zeta}^2(t)\tilde{\theta}(t). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V(t) = \frac{1}{2}\tilde{\theta}^2(t).$$

Дифференцируя $V(t)$ с учётом (2.19), получим

$$\dot{V}(t) = -k_{\zeta}^2(t)\tilde{\theta}^2(t) \leq -k_{\zeta}^2(t)V(t).$$

Интегрируя $\dot{V}(t)$, имеем

$$V(t) \leq e^{-k\gamma(t,t_0)}V(t_0),$$

где функция

$$\gamma(t, t_0) = \int_{t_0}^t \zeta^2(\tau) d\tau.$$

В силу формы сигнала (2.8) и выбора вспомогательного фильтра (2.11), сигнал $\zeta(t)$ представляет собой незатухающий синусоидальный сигнал,

$$\zeta(t) = A_{\zeta} \sin(\omega t + \phi_{\zeta}) + \varepsilon_{\zeta}(t),$$

где константы $A_{\zeta} > 0$ и ϕ_{ζ} зависят от параметров A , ϕ и неизвестной частоты ω , и $\varepsilon_{\zeta}(t)$ – экспоненциально затухающий член. Следовательно, для любого фиксированного t_0 справедливо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t, t_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t A_{\zeta} \sin(\omega \tau + \phi_{\zeta}) d\tau + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \varepsilon_{\zeta}(\tau) d\tau = \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-k\gamma(t, t_0)} = 0,$$

$V(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, и выполняется

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{\theta}(t) - \theta| = 0.$$

□

Замечание 2.2. Из доказательства утверждения можно показать, что, увеличивая коэффициент k в алгоритме (2.17), можно достичь увеличения скорости сходимости ошибки оценивания $\hat{\theta}(t)$ к нулю.

Таким образом, алгоритм оценивания частоты несмещённого моносинусоидального сигнала (2.8) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\varsigma}_1(t) &= \varsigma_2(t), \\ \dot{\varsigma}_2(t) &= -2\varsigma_2(t) - \varsigma_1(t) + \rho_m(t), \\ \dot{\hat{\theta}}(t) &= k\varsigma_1(t) \left(\varsigma_1(t) + 2\varsigma_2(t) - \rho_m(t) - \hat{\theta}(t)\varsigma_1(t) \right), \\ \hat{\omega}(t) &= \sqrt{|\hat{\theta}(t)|}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

и обеспечивает достижение цели (2.9).

Численное моделирование

Для иллюстрации применимости алгоритма оценивания (2.20) рассмотрим его численное моделирование. На рисунках 2.1, 2.2 приведены результаты оценивания для сигнала

$$\rho_m(t) = 3 \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) \tag{2.21}$$

при значениях $k = 3$ и $k = 30$. На рисунках 2.3 и 2.4 приведены результаты оценивания для сигнала

$$\rho_m(t) = 15 \sin\left(5t + \frac{\pi}{3}\right) \tag{2.22}$$

при тех же значениях коэффициента k . В обоих случаях начальные значения состояний фильтра (2.11) выбраны нулевыми, а начальное значение оценки частоты выбрано как $\hat{\omega}(t_0) = 1$. Результаты моделирования иллюстрируют применимость предложенного алгоритма оценивания и повышение быстродействия при увеличении параметра k в соответствии с Замечанием 2.2.

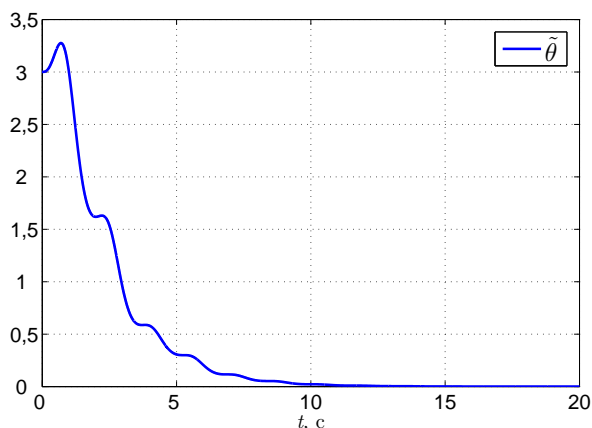


Рисунок 2.1. Ошибка оценивания $\tilde{\theta}(t)$ (рад²/с²) при оценивании частоты сигнала (2.21), $k = 3$.

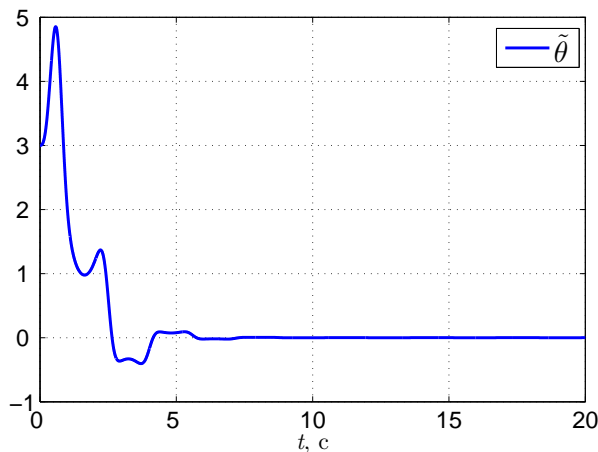


Рисунок 2.2. Ошибка оценивания $\tilde{\theta}(t)$ (рад²/с²) при оценивании частоты сигнала (2.21), $k = 30$.

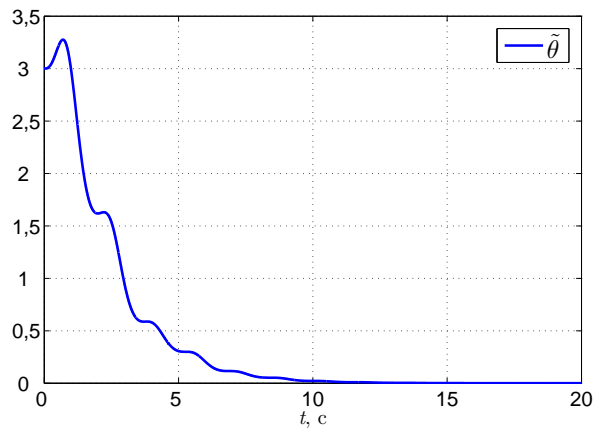


Рисунок 2.3. Ошибка оценивания $\tilde{\theta}(t)$ (рад²/с²) при оценивании частоты сигнала (2.22), $k = 3$.

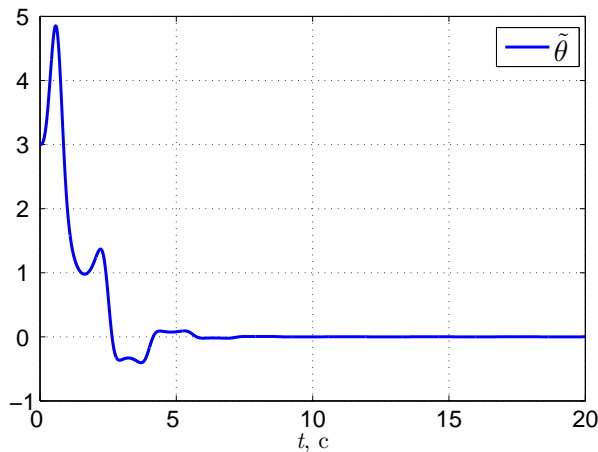


Рисунок 2.4. Ошибка оценивания $\tilde{\theta}(t)$ (рад²/с²) при оценивании частоты сигнала (2.22), $k = 30$.

2.2.3 Идентификация частоты смещённого моночастотного сигнала

Постановка задачи

Расширим рассмотренную в предыдущем подразделе задачу и будем рассматривать смещённый моносинусоидальный скалярный сигнал¹

$$\rho_m(t) = A_0 + A \sin(\omega t + \phi), \quad (2.23)$$

¹Отметим, что во избежание перегруженности текста обозначениями, для рассматриваемых в настоящем разделе сигналов используются те же обозначения, что и для аналогичных сигналов в подразделе 2.2.2, а именно ρ_m для измеряемого моносинусоидального сигнала, $\hat{\omega}$ для оценки частоты, и так далее.

где A_0 – неизвестное постоянное смещение, а параметры $A > 0$, $\phi \in [0, 2\pi)$ и $\omega > 0$ имеют тот же смысл, что и для сигнала (2.8).

Задача оценивания совпадает с задачей оценивания, введённой в подразделе 2.2.2: требуется построить оценку $\hat{\omega}(t)$, такую что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{\omega}(t) - \omega| = 0. \quad (2.24)$$

Мы рассмотрим два подхода к оцениванию частоты сигнала (2.23): подход, основанный на использовании алгоритма оценивания вида (2.17) и расширенного фильтра состояний, и подход, основанный на фильтре состояний пониженной размерности и модифицированном алгоритме оценивания.

Построение регрессионной модели с расширенным фильтром

Известно, что для генерирования сигнала (2.23) можно использовать дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^3}{dt^3} \rho_m(t) = -\omega^2 \frac{d}{dt} \rho_m(t) = -\theta \dot{\rho}_m(t), \quad (2.25)$$

где $\theta = \omega^2$ – постоянный параметр. В этом случае полином $P_\Gamma(s)$, определённый в подразделе 2.2.1, имеет вид

$$P_\Gamma(s) = s(s^2 + \theta),$$

и задача оценивания частоты ω сводится к задаче оценивания параметра θ .

Введём в рассмотрение вспомогательный фильтр

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1(t) = \zeta_2(t), \\ \dot{\zeta}_2(t) = \zeta_3(t), \\ \dot{\zeta}_3(t) = -3\zeta_3(t) - 3\zeta_2(t) - \zeta_1(t) + \rho_m(t), \\ \zeta(t) = \zeta_1(t) \end{cases}$$

или

$$\zeta(t) = \frac{1}{(p+1)^3} \rho_m(t). \quad (2.26)$$

Сформулируем следующую Лемму, аналогичную Лемме 2.1

Лемма 2.2. Рассмотрим дифференциальное уравнение (2.25) и дополнительный фильтр (2.26). Тогда выполняется

$$z_\zeta(t) = \theta \dot{\zeta}(t) + \varepsilon_\rho(t), \quad (2.27)$$

где

$$z_\zeta(t) := 3\ddot{\zeta} + 3\dot{\zeta}(t) + \zeta(t) - \rho_m(t), \quad (2.28)$$

и $\varepsilon_\rho(t)$ – экспоненциально затухающая функция времени.

Доказательство. Переходя к изображениям Лапласа для уравнения (2.25), получаем

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{-s}{(s+1)^3} \theta R(s) + \frac{3s^2 + 3s + 1}{(s+1)^3} R(s) + \frac{D(s)}{(s+1)^3} = \\ &= -\theta \frac{s}{(s+1)^3} R(s) + \frac{3s^2}{(s+1)^3} R(s) + \frac{3s}{(s+1)^3} R(s) + \\ &+ \frac{1}{(s+1)^3} R(s) + \frac{D(s)}{(s+1)^3}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где

$$R(s) = \mathcal{L}\{\rho_m(t)\}$$

представляет собой результат преобразования Лапласа сигнала $\rho_m(t)$, а полином $D(s)$ обозначает сумму всех членов, содержащих ненулевые начальные условия.

Из уравнения (2.29) имеем

$$\begin{aligned} \rho_m(t) &= -\theta \frac{p}{(p+1)^3} \rho_m(t) + \frac{3p^2}{(p+1)^3} \rho_m(t) + \frac{3p}{(p+1)^3} \rho_m(t) + \\ &+ \frac{1}{(p+1)^3} \rho_m(t) - \varepsilon_\rho(t), \end{aligned} \quad (2.30)$$

где экспоненциально затухающая функция времени

$$\varepsilon_\rho(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-D(s)}{(s+1)^3} \right\}.$$

Поставляя (2.26) в уравнение (2.30), получаем

$$3\ddot{\zeta}(t) + 3\dot{\zeta}(t) + \zeta(t) - \rho_m(t) = \theta \dot{\zeta}(t) + \varepsilon_\rho(t),$$

что и требовалось доказать. □

Для полученной регрессионной модели (2.27) построим алгоритм оценивания неизвестного параметра,

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = k\dot{\zeta}(t)(z_{\zeta}(t) - \hat{z}_{\zeta}(t)), \quad (2.31)$$

где сигнал $z_{\zeta}(t)$ определён как (2.28) и

$$\hat{z}_{\zeta}(t) := \hat{\theta}(t)\dot{\zeta}(t).$$

Применимость предложенного алгоритма оценивания следует из Утверждения 2.1.

Окончательно, алгоритм оценивания частоты смещённого моносинусоидального сигнала, построенный с использованием расширенного фильтра состояний, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1(t) &= \zeta_2(t), \\ \dot{\zeta}_2(t) &= \zeta_3(t), \\ \dot{\zeta}_3(t) &= -3\zeta_3(t) - 3\zeta_2(t) - \zeta_1(t) + \rho_m(t), \\ \dot{\hat{\theta}}(t) &= k\dot{\zeta}_2(t) \left(\zeta_1(t) + 3\zeta_2(t) + 3\zeta_3(t) - \rho_m(t) - \hat{\theta}(t)\zeta_2(t) \right), \\ \hat{\omega}(t) &= \sqrt{|\hat{\theta}(t)|}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

и обеспечивает достижение цели (2.24).

Построение регрессионной модели с использованием фильтра пониженной размерности

Как и раньше, мы рассматриваем дифференциальное уравнение (2.25). Однако, вместо вспомогательного фильтра 3-го порядка (2.26) мы рассмотрим фильтр 2-го порядка, аналогичный фильтру (2.11):

$$\begin{cases} \dot{s}_1(t) = s_2(t), \\ \dot{s}_2(t) = -2\alpha s_2(t) - \alpha^2 s_1(t) + \rho_m(t), \\ s(t) = s_1(t) \end{cases}$$

или

$$\zeta(t) = \frac{1}{(p + \alpha)^2} \rho_m(t), \quad (2.33)$$

где $\alpha > 0$ – настраиваемый параметр.

Обозначим

$$z(t) := 2\alpha\ddot{\zeta}(t) + \alpha^2\dot{\zeta}(t) - \dot{\rho}_m(t) \quad (2.34)$$

и сформулируем следующую Лемму

Лемма 2.3. *Рассмотрим дифференциальное уравнение (2.25) и дополнительный фильтр (2.33). Тогда выполняется*

$$z(t) = \theta\dot{\zeta}(t) + \varepsilon_\rho(t), \quad (2.35)$$

где $z(t)$ определено как (2.34) и $\varepsilon_\rho(t)$ – экспоненциально затухающая функция времени.

Доказательство. Переходя к изображениям Лапласа для уравнения (2.25), получаем

$$s^3R(s) = -\theta sR(s) + D(s),$$

где $R(s)$ представляет собой результат преобразования Лапласа сигнала $\rho_m(t)$, а полином $D(s)$ обозначает сумму всех членов, содержащих ненулевые начальные условия. Прибавив к левой и правой частям равенства член $(2\alpha s^2 + \alpha^2 s)R(s)$, получим

$$sR(s) = -\theta \frac{s}{(s + \alpha)^2} R(s) + \frac{2\alpha s^2 + \alpha^2 s}{(s + \alpha)^2} R(s) + \frac{D(s)}{(s + \alpha)^2} \quad (2.36)$$

Отсюда находим

$$\frac{2\alpha p^2 + \alpha^2 p}{(p + \alpha)^2} \rho_m(t) - \dot{\rho}_m(t) = \theta \frac{p}{(p + \alpha)^2} \rho_m(t) + \varepsilon_\rho(t)$$

где $\varepsilon_\rho(t)$ – экспоненциально затухающая функция времени. С учётом (2.33), получим

$$2\alpha\ddot{\zeta}(t) + \alpha^2\dot{\zeta}(t) - \dot{\rho}_m(t) = \theta\dot{\zeta}(t) + \varepsilon_\rho(t),$$

что и требовалось доказать. □

На основе Утверждения 2.1 можно предложить следующий алгоритм оценки частоты:

$$\frac{d}{dt}\hat{\theta}(t) = k\dot{\zeta}(t) \left(z(t) - \dot{\zeta}(t)\hat{\theta}(t) \right),$$

однако такой алгоритм нереализуем, так как сигнал $z(t)$ содержит в себе неизмеряемую компоненту $\dot{\rho}_m(t)$, и, следовательно, не может быть использован для построения оценки $\hat{\theta}(t)$.

Рассмотрим вместо этого следующую схему оценивания неизвестного параметра θ :

$$\begin{cases} \hat{\theta}(t) = k(\chi(t) - \dot{\zeta}(t)\rho_m(t)), \\ \dot{\chi}(t) = \dot{\zeta}(t) \left(2\alpha\ddot{\zeta}(t) + \alpha^2\dot{\zeta}(t) - \dot{\zeta}(t)\hat{\theta}(t) \right) + \ddot{\zeta}(t)\rho_m(t), \end{cases} \quad (2.37)$$

где $k > 0$ – настроечный параметр. Применимость алгоритма оценивания показана в следующем Утверждении.

Утверждение 2.2. *Рассмотрим сигнал (2.23), описываемый дифференциальным уравнением (2.25), и дополнительный фильтр (2.33). Тогда алгоритм оценивания (2.37) обеспечивает*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \hat{\theta}(t) - \theta \right| = 0,$$

что, в свою очередь, обеспечивает достижение цели (2.24).

Доказательство. Продифференцируем $\hat{\theta}(t)$ в (2.37) пренебрегая экспоненциально затухающим членом в (2.35):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}(t) &= k(\dot{\chi}(t) - \ddot{\zeta}(t)\rho_m(t) - \dot{\zeta}(t)\dot{\rho}_m(t)) = \\ &= k \left(2\alpha\dot{\zeta}(t)\ddot{\zeta}(t) + \alpha^2\dot{\zeta}^2(t) - \dot{\zeta}(t)\dot{\rho}_m(t) - \dot{\zeta}^2(t)\hat{\theta}(t) \right) = \\ &= k\dot{\zeta}(t) \left(z(t) - \dot{\zeta}(t)\hat{\theta}(t) \right) = k\dot{\zeta}^2(t)\tilde{\theta}(t), \end{aligned}$$

где $\tilde{\theta}(t) := \theta - \hat{\theta}(t)$.

Тогда для $\tilde{\theta}(t)$ справедливо

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -k\dot{\zeta}^2(t)\tilde{\theta}(t)$$

и

$$\tilde{\theta}(t) = e^{-k\gamma(t,t_0)}\tilde{\theta}(t_0), \quad (2.38)$$

где функция

$$\gamma(t, t_0) = \int_{t_0}^t \dot{\zeta}^2(\tau) d\tau. \quad (2.39)$$

Очевидно, что в силу выбора полинома $(p + \alpha)^2$, функция $\zeta(t)$ будет иметь вид

$$\zeta(t) = A_{\zeta,0} + A_{\zeta} \sin(\omega t + \phi_{\zeta}) + \varepsilon_{\zeta}(t),$$

где константы $A_{\zeta,0}$, $A_{\zeta} > 0$ и ϕ_{ζ} зависят от параметров A_0 , A , ϕ , неизвестной частоты ω и параметра фильтра α , а $\varepsilon_{\zeta}(t)$ – экспоненциально затухающий член.

Пренебрегая слагаемым $\varepsilon_{\zeta}(t)$, продифференцируем $\zeta(t)$:

$$\dot{\zeta}(t) = A_{\zeta}\omega \cos(\omega t + \phi_{\zeta}).$$

Подставляя $\dot{\zeta}(t)$ в (2.39), имеем

$$\begin{aligned} \gamma(t, t_0) &= \int_{t_0}^t \dot{\zeta}^2(\tau) d\tau = \\ &= A_{\zeta}^2 \omega^2 \int_{t_0}^t (\cos(\omega\tau + \phi_{\zeta}))^2 d\tau = \frac{A_{\zeta}^2 \omega^2 t}{2} - \frac{A_{\zeta}^2 \omega^2 t_0}{2} + \\ &+ \frac{A_{\zeta}^2 \omega^2 \sin(2\omega t + 2\phi_{\zeta})}{4\omega} - \frac{A_{\zeta}^2 \omega^2 \sin(2\omega t_0 + 2\phi_{\zeta})}{4\omega} = \\ &= \gamma_0 t + \gamma_1(t, t_0), \end{aligned} \quad (2.40)$$

где функция

$$\gamma_1(t, t_0) = -\frac{A_{\zeta}^2 \omega^2 t_0}{2} + \frac{A_{\zeta}^2 \omega^2 \sin(2\omega t + 2\phi_{\zeta})}{4\omega} - \frac{A_{\zeta}^2 \omega^2 \sin(2\omega t_0 + 2\phi_{\zeta})}{4\omega}$$

ограничена для любого t , а число $\gamma_0 = \frac{A_{\zeta}^2 \omega^2}{2} > 0$.

Подставим (2.40) в (2.38)

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(t_0) e^{-k\gamma_0 t} e^{-k\gamma_1(t,t_0)}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) = 0,$$

а, следовательно, для $\hat{\omega}(t) := \sqrt{|\hat{\theta}(t)|}$ достигается цель (2.24). \square

Окончательно алгоритм оценки частоты смещённого моносинусоидального сигнала (2.23) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \dot{\varsigma}_1(t) &= \varsigma_2(t), \\
 \dot{\varsigma}_2(t) &= -2\alpha\varsigma_2(t) - \alpha^2\varsigma_1(t) + \rho_m(t), \\
 \dot{\chi}(t) &= 2\alpha\varsigma_2(t) (\rho_m(t) - 2\alpha\varsigma_2(t) - \alpha^2\varsigma_1(t)) + \\
 &\quad + (\rho_m(t) - 2\alpha\varsigma_2(t) - \alpha^2\varsigma_1(t)) \rho_m(t) + \\
 &\quad + \alpha^2\varsigma_2^2(t) - \varsigma_2^2(t)\hat{\theta}(t), \\
 \dot{\hat{\theta}}(t) &= k (\chi(t) - \varsigma_2(t)\rho_m(t)), \\
 \hat{\omega}(t) &= \sqrt{|\hat{\theta}(t)|},
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

и обеспечивает достижение цели (2.24).

Замечание 2.3. На основе предложенного алгоритма оценки частоты так же может быть построена схема оценивания амплитуд и смещения сигнала. Действительно, из выражения (2.35) можно получить оценку первой и второй производных сигнала $\rho_m(t)$:

$$\hat{\rho}_m(t) = \alpha^2\dot{\varsigma}(t) + 2\alpha\ddot{\varsigma}(t) - \hat{\theta}(t)\dot{\varsigma}(t)$$

и

$$\hat{\dot{\rho}}_m(t) = \alpha^2\ddot{\varsigma}(t) - \hat{\theta}(t)\ddot{\varsigma}(t) - 2\alpha\dot{\hat{\theta}}(t)\dot{\varsigma}(t).$$

Введём в рассмотрение дополнительные переменные:

$$\beta(t) = \frac{\ddot{\rho}_m(t)}{\theta} = -A \sin(\omega t + \phi),$$

и

$$\hat{\beta}(t) = \frac{\hat{\dot{\rho}}_m(t)}{\hat{\theta}(t)}.$$

Тогда оценки амплитуды \hat{A} и смещения \hat{A}_0 сигнала (2.23) могут быть построены как

$$\hat{A}(t) = \sqrt{\frac{\hat{\rho}_m^2(t)}{\hat{\theta}(t)} + \hat{\beta}^2(t)}$$

и

$$\hat{A}_0(t) = \rho_m(t) + \hat{\beta}(t).$$

Численное моделирование

Для иллюстрации применимости алгоритмов оценивания (2.32) и (2.41) рассмотрим их численное моделирование. На рисунках 2.5 и 2.6 представлены результаты численного моделирования алгоритма (2.32) для смещённого моносинусоидального сигнала

$$\rho_m(t) = 4 + 3 \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \quad (2.42)$$

для значений $k = 3$ и $k = 30$ и начального значения $\hat{\theta}(t_0) = 1$.

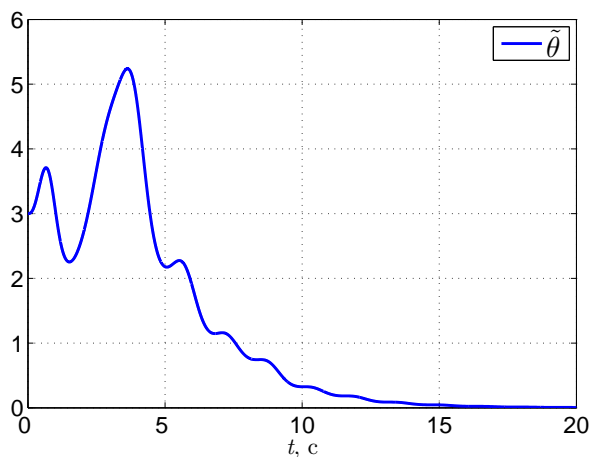


Рисунок 2.5. Ошибка оценивания $\tilde{\theta}(t)$ ($\text{рад}^2/\text{с}^2$) при оценивании частоты сигнала (2.42) алгоритмом (2.32), $k = 3$.

На рисунках 2.7 и 2.8 приведены результаты численного моделирования алгоритма (2.41) для сигнала (2.42) при параметрах $k = 3$, $\alpha = 1$ и $k = 30$, $\alpha = 1$, а на рисунках 2.9 и 2.10 приведены результаты численного моделирования при значениях параметров $k = 3$, $\alpha = 3$ и $k = 30$, $\alpha = 3$. Рассмотрим теперь

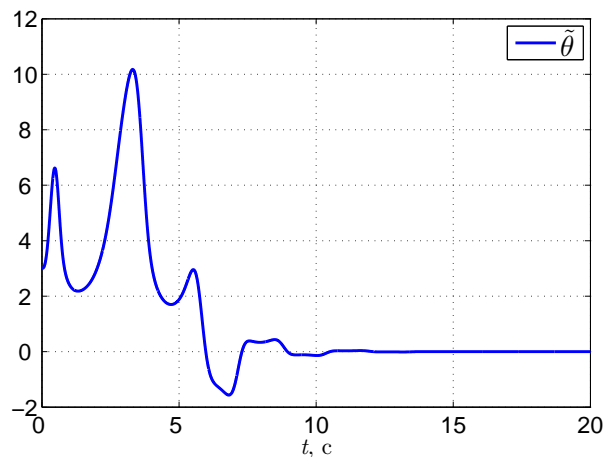


Рисунок 2.6. Ошибка оценивания $\tilde{\theta}(t)$ (рад²/с²) при оценивании частоты сигнала (2.42) алгоритмом (2.32), $k = 30$.

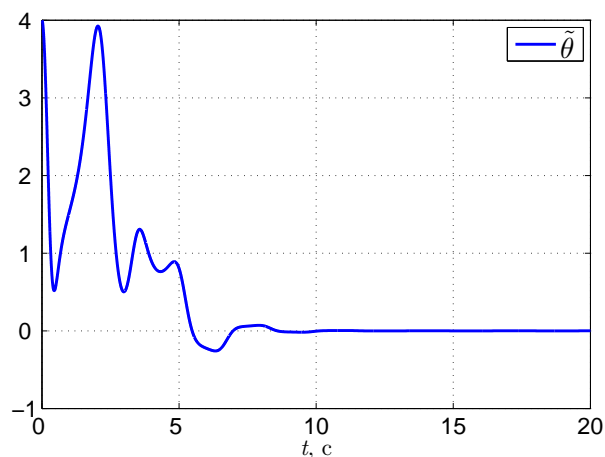


Рисунок 2.7. Ошибка оценивания $\tilde{\theta}(t)$ (рад²/с²) при оценивании частоты сигнала (2.42) алгоритмом (2.41) при $\alpha = 1$, $k = 3$.

результаты численного моделирования алгоритма (2.41) при оценивании частоты сигнала

$$\rho_m(t) = 7 + 15 \sin\left(5t + \frac{\pi}{6}\right). \quad (2.43)$$

На рисунках 2.11 и 2.12 приведены результаты оценивания параметра θ при $\alpha = 1$ и $k = 3$ и $k = 30$. На рисунках 2.13 и 2.14 приведены результаты оценивания параметра θ при $\alpha = 3$ и $k = 3$ и $k = 30$. Из результатов моделирования видно, что увеличение значений k и α ведёт к увеличению быстродействия алгоритма оценивания, причём увеличение параметра α также уменьшает осцилляции в переходных процессах.

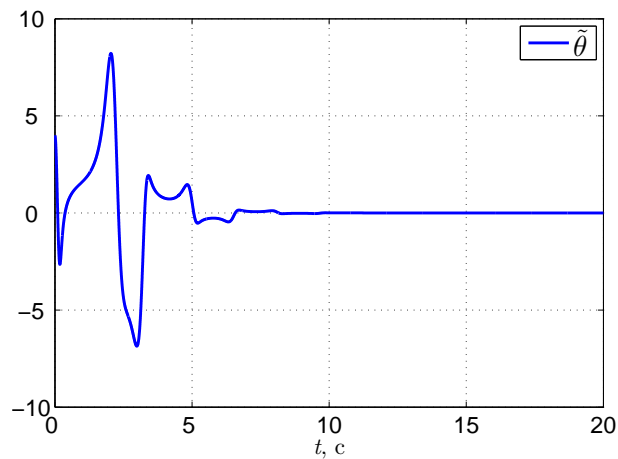


Рисунок 2.8. Ошибка оценивания $\tilde{\theta}(t)$ ($\text{рад}^2/\text{с}^2$) при оценивании частоты сигнала (2.42) алгоритмом (2.41) при $\alpha = 1$, $k = 30$.

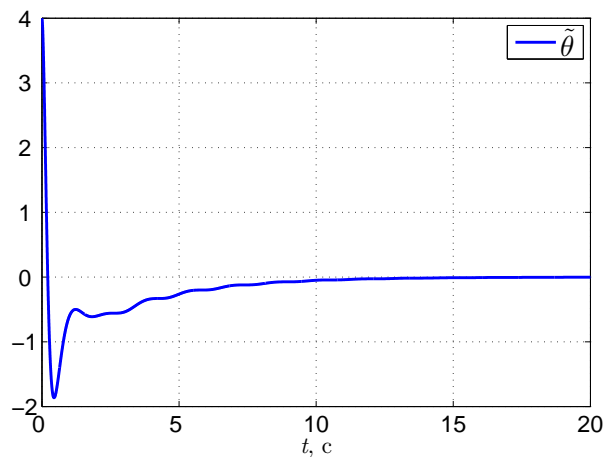


Рисунок 2.9. Ошибка оценивания $\tilde{\theta}(t)$ ($\text{рад}^2/\text{с}^2$) при оценивании частоты сигнала (2.42) алгоритмом (2.41) при $\alpha = 3$, $k = 3$.

На рисунках 2.15 и 2.16 приведены результаты численного моделирования алгоритма (2.41) при оценивании амплитуды и смещения в сигнале (2.42). Результаты моделирования иллюстрируют работоспособность предложенных алгоритмов оценивания параметров моносинусоидального сигнала.

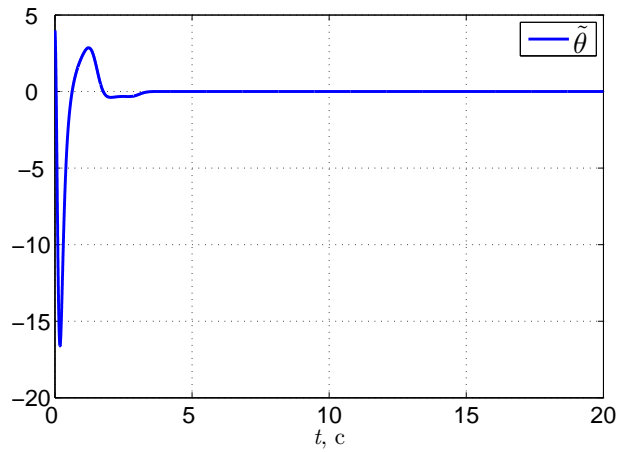


Рисунок 2.10. Ошибка оценивания $\tilde{\theta}(t)$ ($\text{рад}^2/\text{с}^2$) при оценивании частоты сигнала (2.42) алгоритмом (2.41) при $\alpha = 3$, $k = 30$.

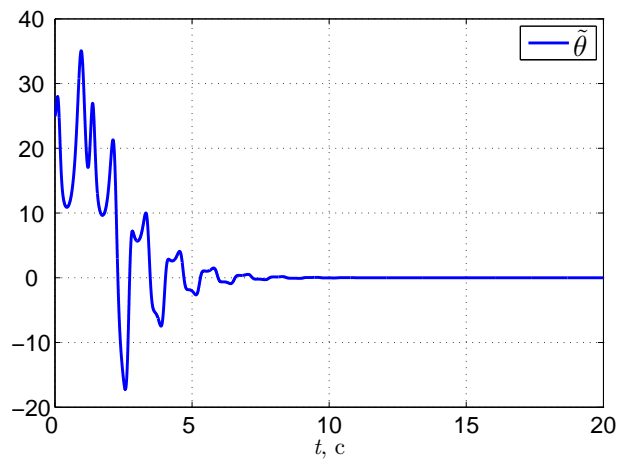


Рисунок 2.11. Ошибка оценивания $\tilde{\theta}(t)$ ($\text{рад}^2/\text{с}^2$) при оценивании частоты сигнала (2.43) алгоритмом (2.41) при $\alpha = 1$, $k = 3$.

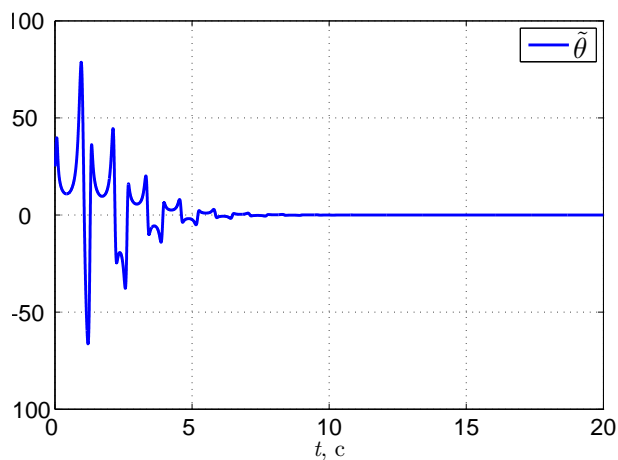


Рисунок 2.12. Ошибка оценивания $\tilde{\theta}(t)$ ($\text{рад}^2/\text{с}^2$) при оценивании частоты сигнала (2.43) алгоритмом (2.41) при $\alpha = 1$, $k = 30$.

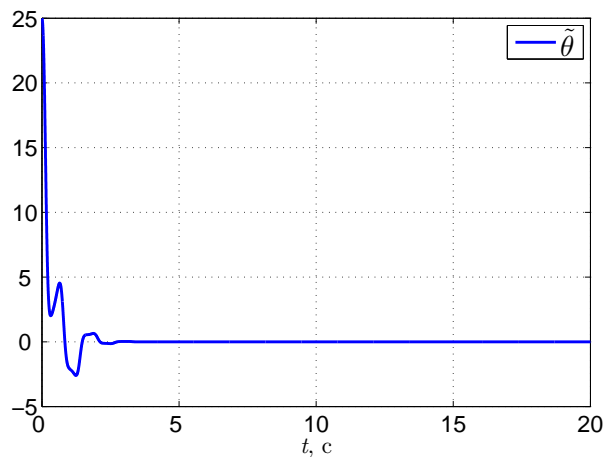


Рисунок 2.13. Ошибка оценивания $\tilde{\theta}(t)$ (рад²/с²) при оценивании частоты сигнала (2.43) алгоритмом (2.41) при $\alpha = 3$, $k = 3$.

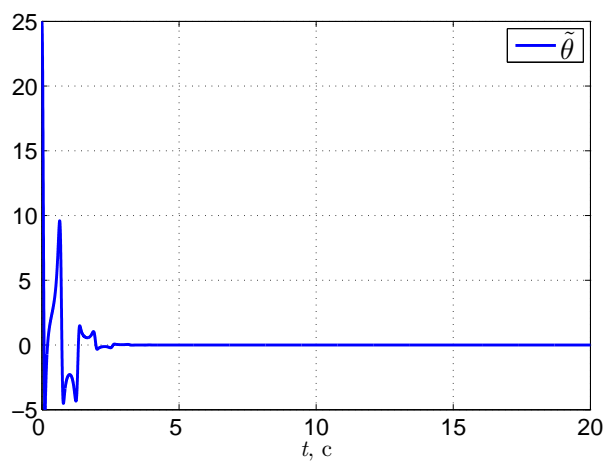


Рисунок 2.14. Ошибка оценивания $\tilde{\theta}(t)$ (рад²/с²) при оценивании частоты сигнала (2.43) алгоритмом (2.41) при $\alpha = 3$, $k = 30$.

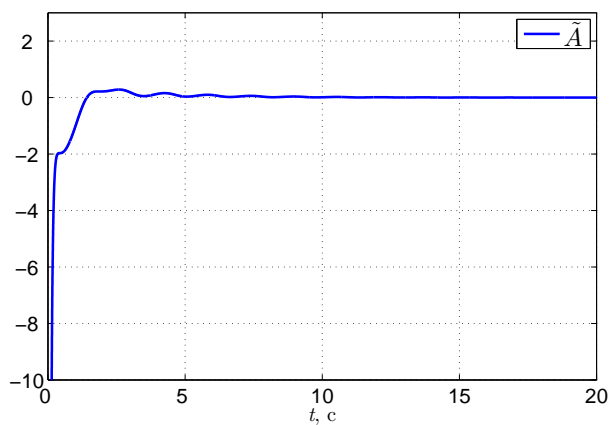


Рисунок 2.15. Ошибка оценивания амплитуды $\tilde{A}(t)$ при оценивании параметров сигнала (2.42) алгоритмом (2.41) при $\alpha = 3$ и $k = 3$.

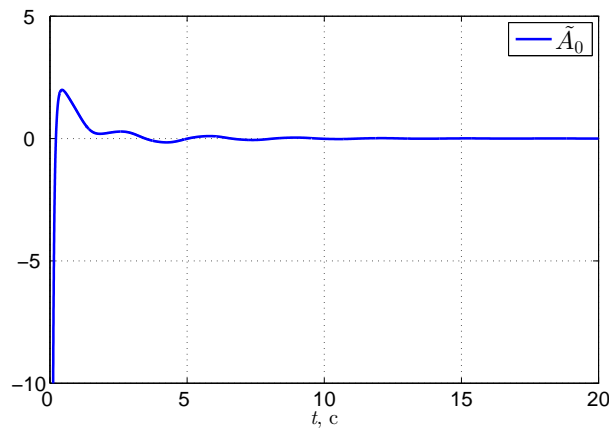


Рисунок 2.16. Ошибка оценивания смещения $\tilde{A}_0(t)$ при оценивании параметров сигнала (2.42) алгоритмом (2.41) при $\alpha = 3$ и $k = 3$.

2.2.4 Анализ чувствительности алгоритма оценивания по отношению к ограниченным возмущениям

Ограниченность траекторий при наличии ограниченного возмущения

Рассмотрим чувствительность предложенных алгоритмов оценивания к наличию в измеряемом сигнале ограниченных возмущений. Для простоты изложения, проанализируем чувствительность только для алгоритма оценки частоты несмещенного моносинусоидального сигнала (2.20), однако приведённые рассуждения легко могут быть повторены для алгоритмов (2.32) и (2.41).

Пусть измеряется сигнал

$$w(t) = A \sin(\omega t + \phi) + \delta(t) = \rho_m(t) + \delta(t), \quad (2.44)$$

где сигнал $\rho_m(t)$ определён в (2.8), $\delta(t)$ – ограниченное возмущение. Построим оценку частоты сигнала $\rho_m(t)$ с использованием алгоритма (2.20):

$$\begin{aligned}\dot{\varsigma}_1(t) &= \varsigma_2(t), \\ \dot{\varsigma}_2(t) &= -2\varsigma_2(t) - \varsigma_1(t) + w(t), \\ \dot{\hat{\theta}}(t) &= k\varsigma_1(t) \left(\varsigma_1(t) + 2\varsigma_2(t) - w(t) - \hat{\theta}(t)\varsigma_1(t) \right), \\ \hat{\omega}(t) &= \sqrt{|\hat{\theta}(t)|}.\end{aligned}\tag{2.45}$$

Утверждение 2.3. Для сигнала (2.44) алгоритм оценивания частоты (2.45) обеспечивает

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\hat{\omega}^2(t) - \omega^2| \leq \delta_0,\tag{2.46}$$

где число δ_0 зависит от амплитуды возмущения $\delta(t)$.

Доказательство. Покажем, что для сигнала $w(t)$ справедливо

$$\varsigma_1(t) + 2\varsigma_2(t) - w(t) = \theta\varsigma_1(t) + \bar{\delta}(t) + \varepsilon_w(t),$$

где $\theta := \omega^2$, $\varepsilon_w(t)$ – экспоненциально затухающая функция времени и

$$\bar{\delta}(t) = -\frac{p^2 + \theta}{(p+1)^2}\delta.$$

В силу доказательства Леммы 2.1, имеем

$$\begin{aligned}\rho_m(t) &= \frac{2p+1-\theta}{(p+1)^2}\rho_m(t) + \varepsilon_\rho(t) = \frac{2p+1-\theta}{(p+1)^2}(w(t) - \delta(t)) + \varepsilon_\rho(t) = \\ &= -\theta\frac{1}{(p+1)^2}w(t) + \frac{2p}{(p+1)^2}w(t) + \frac{1}{(p+1)^2}w(t) - \\ &- \frac{2p+1-\theta}{(p+1)^2}\delta(t) - \varepsilon_\rho(t).\end{aligned}$$

Используя

$$\frac{2p+1-\theta}{(p+1)^2}\delta(t) = \delta(t) + \bar{\delta}(t)$$

и

$$\varsigma(t) = \frac{1}{(p+1)^2}w(t),$$

получим

$$\rho_m(t) + \delta(t) = 2\varsigma_2(t) + \varsigma_1(t) - \theta_{\varsigma_1}(t) - \bar{\delta}(t) - \varepsilon_\rho(t),$$

откуда

$$2\varsigma_2(t) + \varsigma_1(t) - w(t) = \theta_{\varsigma_1}(t) + \bar{\delta}(t) + \varepsilon_\rho(t). \quad (2.47)$$

Подставляя (2.47) в (2.45) и пренебрегая экспоненциально затухающим членом $\varepsilon_\rho(t)$, получим

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = k_{\varsigma_1}(t) \left(\theta_{\varsigma_1}(t) + \bar{\delta}(t) - \hat{\theta}(t)\varsigma_1(t) \right),$$

откуда

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -k_{\varsigma_1}^2 \tilde{\theta}(t) + k_{\varsigma_1}(t) \bar{\delta}(t), \quad (2.48)$$

где $\tilde{\theta}(t) := \theta - \hat{\theta}(t)$.

Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V(\tilde{\theta}) = \frac{\tilde{\theta}^2}{2}.$$

Дифференцируя V с учётом уравнения (2.48), получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -2k_{\varsigma_1}^2(t)V(t) + k_{\varsigma_1}(t)\bar{\delta}(t)\tilde{\theta}(t) \leq \\ &\leq -2k_{\varsigma_1}^2(t)V(t) + \frac{1}{2}k_{\varsigma_1}^2(t)\tilde{\theta}^2(t) + \frac{1}{2}k\bar{\delta}^2(t) \leq \\ &\leq -k_{\varsigma_1}^2(t)V(t) + \frac{1}{2}k\bar{\delta}^2(t). \end{aligned}$$

Так как $\delta(t)$ ограничена, и в силу Гурвицевости полинома $(p+1)^2$, сигнал $\bar{\delta}(t)$ также ограничен. Следовательно, существует число C_0 , такое что $C_0 \geq \frac{1}{2}k\bar{\delta}^2(t)$ для всех t , и можно записать

$$\dot{V}(t) \leq -k_{\varsigma_1}^2(t)V(t) + C_0. \quad (2.49)$$

Интегрируя (2.49), получим

$$V(t) \leq V(t_0)e^{-k\gamma(t,t_0)} + C_0 \int_{t_0}^t e^{-k\gamma(t,\tau)} d\tau,$$

где функция $\gamma(t, t_0) = \int_{t_0}^t \varsigma_1^2(\tau) d\tau$.

Как было показано в Утверждении 2.1, для функции $\gamma(t, t_0)$ справедливо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t, t_0) = \infty.$$

Так как функция $\varsigma_1(t)$ ограничена, то существует число C_1 , такое что

$$\gamma(t, t_0) \leq C_1(t - t_0)$$

для всех $t > t_0$, и, следовательно,

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-k\gamma(t, \tau)} d\tau =: C_2 < \infty.$$

Отсюда следует, что

$$|\tilde{\theta}(t)|^2 < 2C_0C_2 + |\tilde{\theta}(t_0)|^2 e^{-k\gamma(t, t_0)}.$$

Соответственно, для любого $\epsilon_\theta > 0$ существует $t_\theta > t_0$, такой что для всех $t > t_\theta$ выполняется

$$|\tilde{\theta}(t)| < \sqrt{2C_0C_2} + \epsilon_\theta$$

и достигается цель (2.46). □

Замечание 2.4. Учитывая, что $\hat{\theta}(t)$ и, следовательно, $\hat{\omega}(t)$ ограничены, из (2.46) следует, что ошибка оценивания частоты $\tilde{\omega}(t) := \omega - \omega(t)$ так же ограничена.

Численное моделирование

Для иллюстрации ограниченности траекторий системы при действии внешнего возмущения проведём численное моделирование алгоритма (2.45) для оценивания частоты сигнала

$$w(t) = 3 \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + \delta(t). \quad (2.50)$$

На рисунках 2.17 и 2.18 приведены результаты моделирования для различных значений коэффициента k при выборе $\delta(t) = 0.3 \sin(10t)$. Из результатов

моделирования видно, что увеличение k увеличивает быстродействие, однако также ведёт к увеличению области, в которую сходится ошибка оценивания.

Рассмотрим теперь численное моделирование алгоритма оценивания выбрав $\delta(t)$ как равномерный случайный сигнал, $|\delta(t)| < 1$, имеющий нулевое математическое ожидание и дисперсию $\frac{1}{3}$. Результаты численного моделирования представлены на рисунках 2.19 и 2.20. Как и в предыдущем случае, увеличение k увеличивает быстродействие, однако также ведёт к увеличению области, в которую сходится ошибка оценивания.

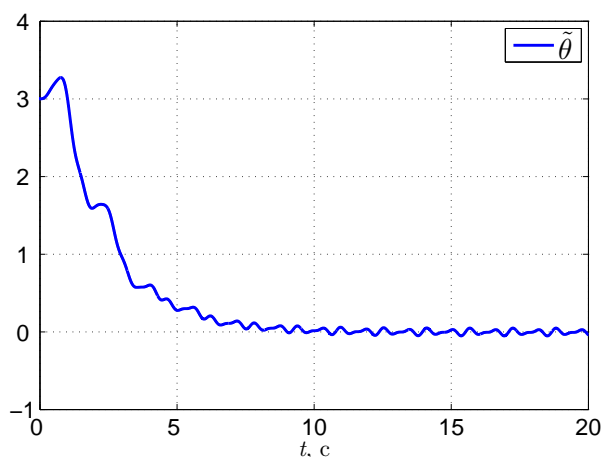


Рисунок 2.17. Ошибка оценивания $\tilde{\theta}(t)$ (рад²/с²) в алгоритме (2.45), сигнал (2.50) при $\delta(t) = 0.3 \sin(10t)$, $k = 3$.

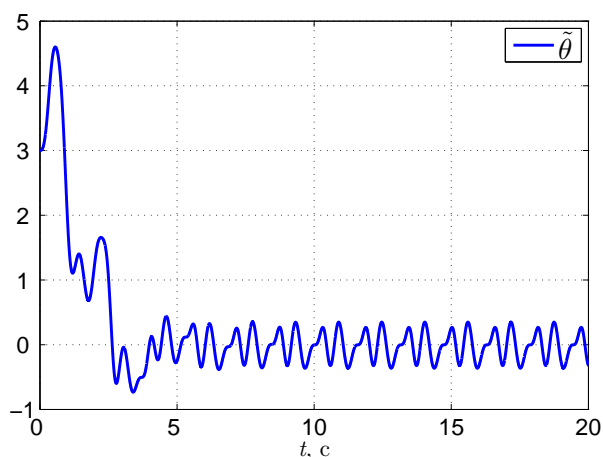


Рисунок 2.18. Ошибка оценивания $\tilde{\theta}(t)$ (рад²/с²) в алгоритме (2.45), сигнал (2.50) при $\delta(t) = 0.3 \sin(10t)$, $k = 30$.

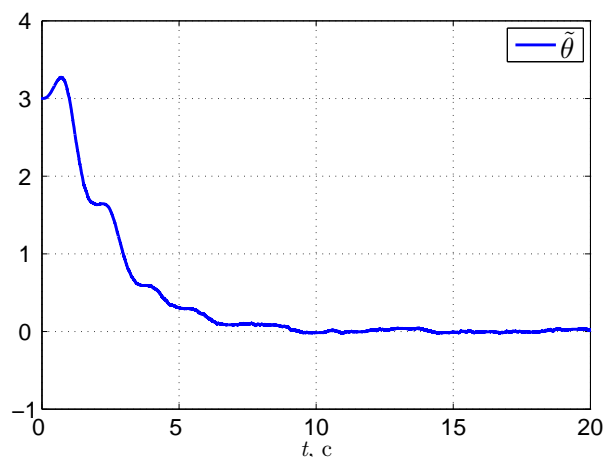


Рисунок 2.19. Ошибка оценивания $\tilde{\theta}(t)$ ($\text{рад}^2/\text{с}^2$) в алгоритме (2.45), сигнал (2.50), $\delta(t)$ – равномерный случайный сигнал, $k = 3$.

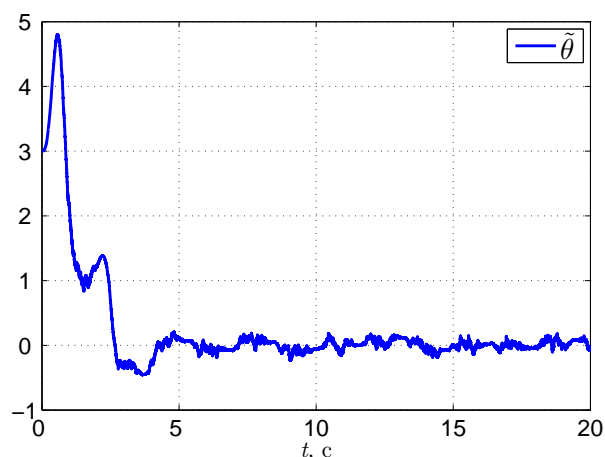


Рисунок 2.20. Ошибка оценивания $\tilde{\theta}(t)$ ($\text{рад}^2/\text{с}^2$) в алгоритме (2.45), сигнал (2.50), $\delta(t)$ – равномерный случайный сигнал, $k = 30$.

2.2.5 Идентификация частот мультисинусоидального сигнала

Данный подраздел посвящён проблеме идентификации частот мультисинусоидального сигнала вида

$$\rho_m(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t + \phi_i).$$

Отметим, что алгоритм, приведённый в данном разделе, является расширением алгоритма (2.20), рассмотренного в подразделе 2.2.2. Полученный в результате алгоритм идентификации частот мультисинусоидального сигнала является робастным по отношению к неучтенным возмущениям и обладает

размерностью $3N - 1$, что является наименьшей размерностью среди аналогов. Так, в работе [80] размерность устройства идентификации частот в случае мультисинусоидального сигнала составляет $5N$. Кроме того, отметим, что во многих работах, посвящённых идентификации параметров синусоидальных сигналов, вопрос об идентификации мультисинусоидального сигнала либо не рассматривается вообще, либо отмечается невозможность расширения предложенного подхода на случай нескольких частот в силу специфики представления синусоидального сигнала, как, например, в работе [68].

Постановка задачи

Рассмотрим мультисинусоидальный сигнал, представляющий собой сумму N синусоид с неизвестными параметрами

$$\rho_m(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t + \phi_i), \quad (2.51)$$

где $A_i > 0$, ϕ_i и $\omega_i > 0$ – неизвестные постоянные параметры. Требуется сформировать оценку частот $\hat{\omega}_i(t)$, такую что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{\omega}_i(t) - \omega_i| = 0 \text{ для всех } i = 1, \dots, N. \quad (2.52)$$

Алгоритм оценивания параметров

Известно, что генерирования сигнала вида (2.51) может быть использовано выражение

$$\rho_m^{(2N)}(t) = \theta_N \rho_m^{(2N-2)}(t) + \theta_{N-1} \rho_m^{(2N-4)}(t) + \dots + \theta_2 \rho_m^{(2)}(t) + \theta_1 \rho_m(t). \quad (2.53)$$

В этом случае полином $P_\Gamma(s)$, определённый в подразделе 2.2.1, имеет вид

$$P_\Gamma(s) = \prod_{i=1}^N (s^2 + \omega_i^2) = s^{2N} - \theta_N s^{2N-2} - \dots - \theta_2 s^2 - \theta_1 = s^{2N} - \theta(s).$$

Применим преобразование Лапласа к обеим частям выражения (2.53) пренебрегая составляющей, вызванной ненулевыми начальными условиями:

$$s^{2N}R(s) = \theta(s)R(s),$$

или

$$s(s + \alpha)^{2N-1}Y(s) = a(s)Y(s) + \theta(s)Y(s),$$

где $a(s) = s(s + \alpha)^{2N-1} - s^{2N}$, и $\alpha > 0$. Отсюда можно получить

$$\dot{\rho}_m(t) = \frac{a(p)}{(p + \alpha)^{2N-1}}\rho_m(t) + \frac{\theta(p)}{(p + \alpha)^{2N-1}}\rho_m(t). \quad (2.54)$$

Введём в рассмотрение фильтр порядка $N - 1$:

$$\bar{\zeta}(t) = \frac{1}{(p + \alpha)^{2N-1}}\rho_m(t)$$

Тогда мы получим

$$\dot{\rho}_m(t) = a(p)\bar{\zeta}(t) + \theta(p)\bar{\zeta}(t) = \bar{z}(t) + \psi^\top(t)\theta_e,$$

где $\bar{z}(t) = a(p)\bar{\zeta}(t)$ и

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} \bar{\zeta}^{(2N-2)}(t) \\ \bar{\zeta}^{(2N-4)}(t) \\ \dots \\ \ddot{\bar{\zeta}}(t) \\ \bar{\zeta}(t) \end{bmatrix}, \quad \theta_e = \begin{bmatrix} \theta_N \\ \theta_{N-1} \\ \dots \\ \theta_2 \\ \theta_1 \end{bmatrix}.$$

В силу замечания 2.1, далее будем рассматривать задачу оценивания (идентификации) вектора параметров θ_e .

Для начала предположим, что сигнал $\dot{\rho}_m(t)$ измеряем. В этом случае идеальный алгоритм идентификации параметров сигнала будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_e(t) &= k\psi(t)(\dot{\rho}_m(t) - \bar{z}(t)) - k\psi(t)\psi^\top(t)\hat{\theta}_e(t) = \\ &= k\psi(t)\psi^\top(t)(\theta_e - \hat{\theta}_e(t)), \end{aligned}$$

где число $k > 0$. Доказательство применимости данного алгоритма оценивания эквивалентно доказательству, приведённому в Утверждении 2.1, и здесь не приводится.

Однако измерению доступен только сигнал $\rho_m(t)$, но не его производные. Для получения реализуемой схемы идентификации, введём в рассмотрение дополнительную переменную

$$\chi_e(t) = \hat{\theta}_e(t) - k\psi(t)\rho_m(t)$$

Дифференцируя выражение для $\chi(t)$, мы получим

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_e(t) &= k\psi(t)\dot{\rho}_m(t) - k\psi(t)\dot{\bar{z}}(t) - \\ &- k\psi(t)\dot{\psi}^\top(t)\hat{\theta}_e(t) - k\psi(t)\dot{\rho}_m(t) - k\dot{\psi}(t)\rho_m(t) = \\ &= -k\dot{\psi}(t)\rho_m(t) - k\psi(t)\dot{\bar{z}}(t) - k\psi(t)\dot{\psi}^\top(t)\hat{\theta}_e(t). \end{aligned}$$

Окончательно, алгоритм оценивания частот мультисинусоидального сигнала (2.51) примет вид

$$\begin{aligned} \bar{z}(t) &= \frac{1}{(p + \alpha)^{2N-1}}\rho_m(t), \\ \dot{\chi}_e(t) &= -k\dot{\psi}(t)\rho_m(t) - k\psi(t)\dot{\bar{z}}(t) - k\psi(t)\dot{\psi}^\top(t)\hat{\theta}_e(t), \\ \hat{\theta}_e(t) &= k\psi(t)\rho_m(t) + \chi_e(t). \end{aligned} \tag{2.55}$$

Этот алгоритм обеспечивает достижение цели (2.52) с учётом замечания 2.1. На рисунке 2.21 приведена структурная схема алгоритма (2.55).

Замечание 2.5. Нетрудно показать, что рассуждения, приведённые в замечании 2.2 и в подразделе 2.2.4, также применимы и к алгоритму (2.55). Таким образом, полученный алгоритм робастен относительно ограниченных возмущений, а так же позволяет варьировать быстродействие путём изменения параметра k .

Замечание 2.6. Алгоритм оценивания (2.55) может быть модифицирован для оценивания параметров сигнала (2.5) путём введения

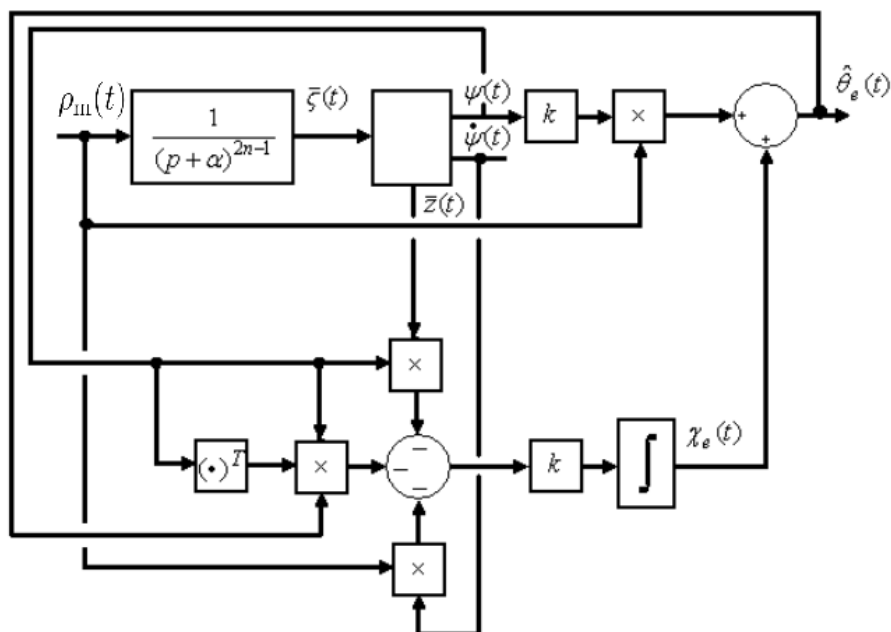


Рисунок 2.21. Структурная схема алгоритма (2.55).

расширенного фильтра состояний, как это было сделано в подразделе 2.2.3. В этом случае фильтр состояний примет вид

$$\bar{\zeta}(t) = \frac{1}{(p + \alpha)^{2N}} \rho_m(t).$$

Численное моделирование

Для иллюстрации применимости предложенного алгоритма для оценивания частот смещённого мультисинусоидального сигнала вида (2.5) проведём численное моделирование (2.55) с учётом замечания 2.6. Рассмотрим сигнал

$$\begin{aligned} \rho_m(t) &= A_0 + A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) = \\ &= 3 + 15 \sin\left(1.5t + \frac{\pi}{6}\right) - 21 \sin\left(1.3t - \frac{\pi}{7}\right). \end{aligned} \quad (2.56)$$

На рисунках 2.22 и 2.23 приведены результаты оценивания параметров θ_1 и θ_2 сигнала (2.56) при параметрах $\alpha = 1$, $k = 30$ и единичных начальных условиях.

Рассмотрим теперь сигнал

$$\begin{aligned} \rho_m(t) &= A_0 + A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) = \\ &= 3 + 15 \sin\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) - 21 \sin\left(2t - \frac{\pi}{7}\right). \end{aligned} \quad (2.57)$$

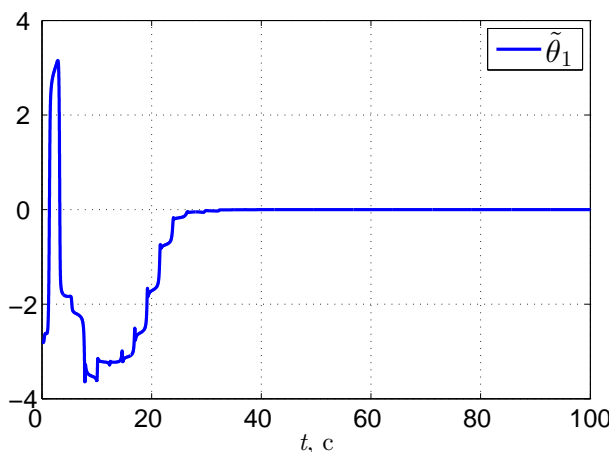


Рисунок 2.22. Ошибки оценивания $\tilde{\theta}_1(t)$ (рад⁴/с⁴) при оценивании параметров сигнала (2.56), $\alpha = 1$, $k = 30$.

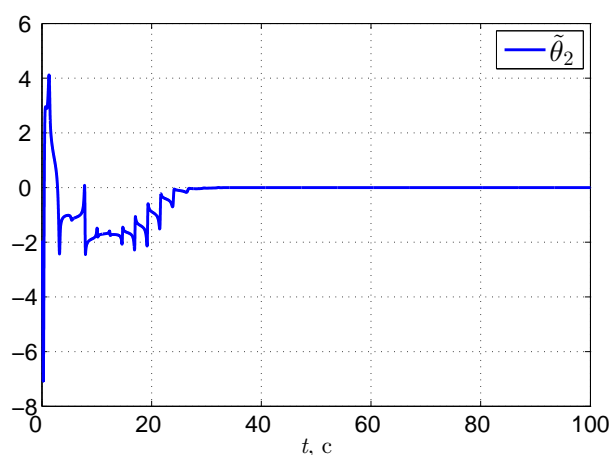


Рисунок 2.23. Ошибки оценивания $\tilde{\theta}_2(t)$ (рад²/с²) при оценивании параметров сигнала (2.56), $\alpha = 1$, $k = 30$.

На рисунках 2.24 и 2.25 приведены результаты оценивания параметров θ_1 и θ_2 сигнала (2.57) при параметрах $\alpha = 1$, $k = 30$. Видно, что увеличение частот увеличивает время переходного процесса, так как увеличивается значение $\tilde{\theta}(t_0)$.

Рассмотрим влияние параметров на быстродействие оценивания. На рисунках 2.26 и 2.26 приведены результаты оценивания параметров θ_1 и θ_2 того же сигнала (2.57), но при параметрах $\alpha = 3$, $k = 100$. Видно, что увеличение параметров приводит к увеличенному быстродействию.

Проиллюстрируем теперь робастность предложенного алгоритма к внешним ограниченными воздействиям. Для этого проведём численного моделирование

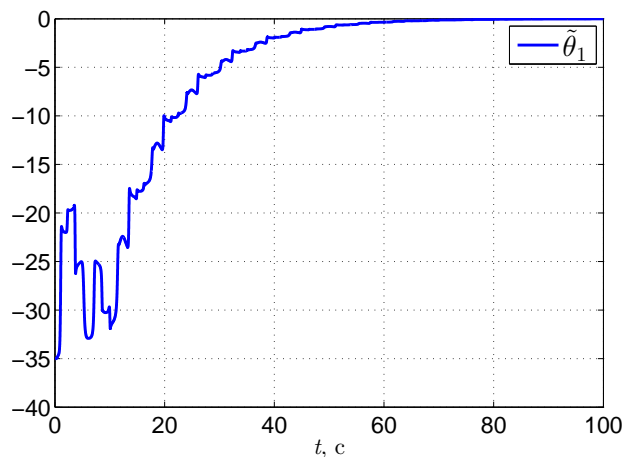


Рисунок 2.24. Ошибки оценивания $\tilde{\theta}_1(t)$ (рад⁴/с⁴) при оценивании параметров сигнала (2.57), $\alpha = 1$, $k = 30$.

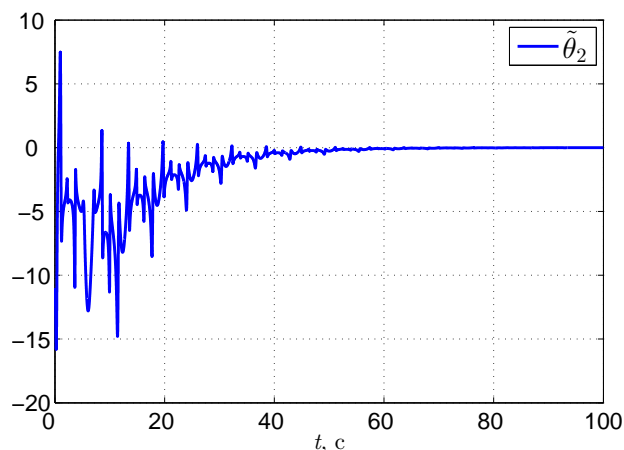


Рисунок 2.25. Ошибки оценивания $\tilde{\theta}_2(t)$ (рад²/с²) при оценивании параметров сигнала (2.57), $\alpha = 1$, $k = 30$.

алгоритма оценивания для сигнала (2.57), добавив к нему возмущение $\delta(t)$, выбранное как равномерный ограниченный случайный сигнал, $|\delta(t)| < 3$, имеющий нулевое математическое ожидание и дисперсию 3. Результаты моделирования приведены на рисунках 2.28 и 2.29. Видно, что оценки параметров остаются ограничены при наличии ограниченного возмущения.

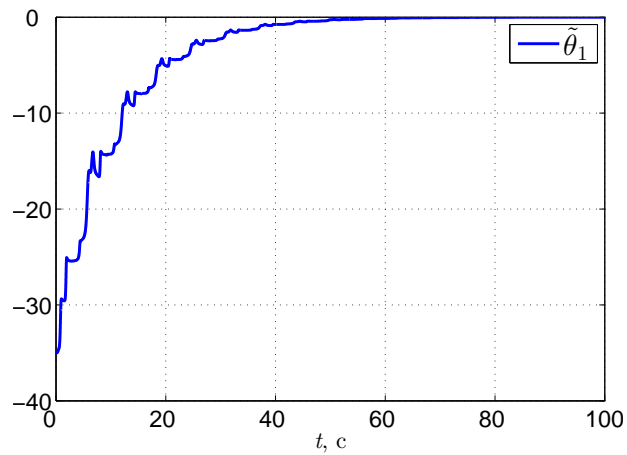


Рисунок 2.26. Ошибки оценивания $\tilde{\theta}_1(t)$ (рад⁴/с⁴) при оценивании параметров сигнала (2.57), $\alpha = 3$, $k = 100$.

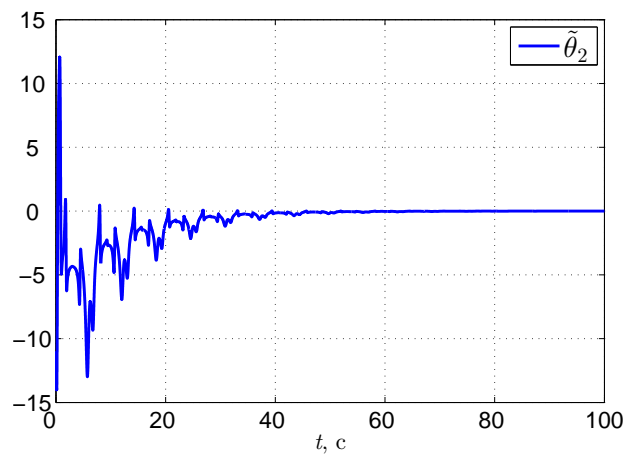


Рисунок 2.27. Ошибки оценивания $\tilde{\theta}_2(t)$ (рад²/с²) при оценивании параметров сигнала (2.57), $\alpha = 3$, $k = 100$.

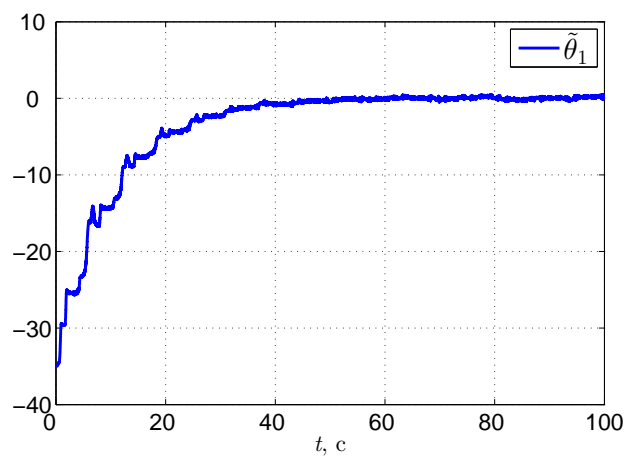


Рисунок 2.28. Ошибки оценивания $\tilde{\theta}_1(t)$ (рад⁴/с⁴), сигнал (2.57) при наличии аддитивного ограниченного возмущения $\delta(t)$, $\alpha = 3$, $k = 100$.

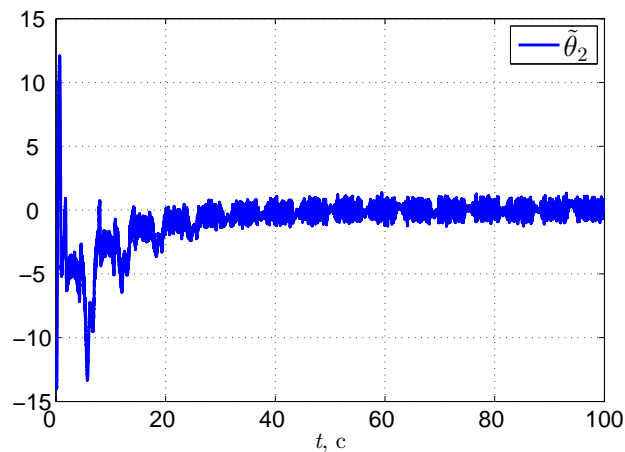


Рисунок 2.29. Ошибки оценивания $\tilde{\theta}_2(t)$ (рад²/с²), сигнал (2.57) при наличии аддитивного ограниченного возмущения $\delta(t)$, $\alpha = 3$, $k = 100$.

2.3 Построение наблюдателей для периодических сигналов

В этом разделе будем рассматривать систему (2.1)-(2.3), в которой измеряются сигналы $y(t)$ и $u(t)$, а вектор параметров θ неизвестен. Ставится задача оценки вектора состояний $x_2(t)$, то есть формирование такой оценки $\hat{x}_2(t)$, что достигается цель

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}_2(t) - x_2(t)\| = 0. \quad (2.58)$$

Далее в данном разделе будем трактовать подсистему (2.1) как некоторый объект, подверженный внешнему воздействию (возмущению), генерируемому подсистемой (2.2). Таким образом, задача оценивания состояния $x_2(t)$ может быть представлена как задача построения наблюдателя для мультисинусоидального возмущения, действующего на объект (2.1).

Будем рассматривать две подзадачи. В первом случае, рассмотренном в подразделе 2.3.1, будем полагать, что, в соответствии с (2.3), измерению доступен вектор $x_1(t)$, то есть все состояния объекта. Во втором случае, рассмотренном в подразделе 2.3.2 будем рассматривать задачу, когда измеряется только некоторый выход объекта

$$y(t) = Cx_1(t),$$

но сам объект (подсистема (2.1)) – линейный.

Результаты данного раздела расширяют и обобщают методы построения адаптивных наблюдателей, представленные ранее в работах [27, 44, 47–50].

2.3.1 Построение наблюдателя при измерении полного вектора состояний

Построение наблюдателя при известном векторе параметров θ

Рассмотрим систему (2.1)-(2.1) и предположим, что вектор параметров θ известен. Обозначим

$$\tilde{x}_2(t) := \hat{x}_2(t) - x_2(t)$$

и выберем $K(\theta) \in \mathbb{R}^{n_{x_2}}$, такой что матрица $L(\theta)$ Гурвицева, где

$$L(\theta) := \Gamma(\theta) - K(\theta)h^\top \quad (2.59)$$

и h определено в (2.4). В этом случае для построения наблюдателя достаточно формировать оценку $\hat{x}_2(t)$ так, что

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = (\Gamma(\theta) - Kh^\top) \tilde{x}_2(t) = L(\theta)\tilde{x}_2(t).$$

Это равенство может быть обеспечено путём выбора

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = \Gamma(\theta)\hat{x}_2(t) - K(\theta)h^\top \hat{x}_2(t) + K(\theta)h^\top x_2(t),$$

однако сигнал $x_2(t)$ не измеряется. С другой стороны, умножив (2.1) на q^\top , получим

$$q^\top \dot{x}_1(t) = q^\top \phi_1(x_1(t), u(t)) + h^\top x_2(t), \quad (2.60)$$

откуда

$$h^\top x_2(t) = q^\top \dot{y}(t) - q^\top \phi_1(x_1(t), u(t)).$$

Используя это равенство, запишем алгоритм оценивания вектора состояний $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\chi}(t) &= \Gamma(\theta)\hat{x}_2(t) - K(\theta)h^\top \hat{x}_2(t) - K(\theta)q^\top \phi_1(x_1(t), u(t)), \\ \hat{x}_2(t) &= \chi(t) + K(\theta)q^\top y(t). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Утверждение 2.4. Рассмотрим систему (2.1)-(2.3), где параметр θ известен. Выберем q и h удовлетворяющие (2.4), и найдём $K(\theta)$, такой что матрица $L(\theta)$, определённая как (2.59) Гурвицева. Тогда алгоритм оценивания (2.61) обеспечивает достижение цели (2.58).

Доказательство. Как было показано выше, при известном параметре θ алгоритм (2.61) задаёт следующую динамику ошибки оценивания:

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = L(\theta)\tilde{x}_2(t).$$

Тогда, в силу выбора матрицы $L(\theta)$, обеспечивается целевое условие (2.58). \square

Построение наблюдателя при наличии оценки $\hat{\theta}(t)$

Рассмотрим теперь случай, когда параметр θ не известен, но известна его оценка $\hat{\theta}(t)$, удовлетворяющая следующему допущению.

Допущение 2.1. Оценка $\hat{\theta}(t)$ вектора постоянных параметров θ такова, что ошибка оценивания $\tilde{\theta}(t) := \theta - \hat{\theta}(t)$ ограничена и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\theta}(t)\| = 0.$$

Для простоты дальнейшего изложения сформулируем вспомогательную Лемму.

Лемма 2.4. Рассмотрим систему вида

$$\dot{z}(t) = A_z(t)z(t) + u(t),$$

где $z \in \mathbb{R}^{n_z}$, а сигнал $u(t)$ ограничен и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = 0.$$

Пусть существует матрица $P > 0$, такая что для всех t выполняется

$$PA_z(t) + A_z^\top(t)P < 0.$$

Тогда выполняется

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |z(t)| = 0.$$

Результат Леммы 2.4 является классическим результатом в теории управления ([1]).

Рассмотрим теперь модифицированный алгоритм оценивания вектора состояний $x_2(t)$.

$$\begin{aligned} \dot{\chi}(t) &= \Gamma(\hat{\theta}(t))\hat{x}_2(t) - K(\hat{\theta}(t))h^\top \hat{x}_2(t) - K(\hat{\theta}(t))q^\top \phi_1(x_1(t), u(t)), \\ \hat{x}_2(t) &= \chi(t) + K(\hat{\theta}(t))q^\top y(t). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Утверждение 2.5. *Рассмотрим систему (2.1)-(2.3), где параметр θ неизвестен, но доступна его оценка $\hat{\theta}(t)$, удовлетворяющая Допущению 2.1. Выберем q и h удовлетворяющие (2.4), и будем строить $K(\hat{\theta}(t))$ так, что матрица*

$$L(\hat{\theta}) := \Gamma(\hat{\theta}) - K(\hat{\theta})h^\top$$

Гурвицева для всех значений $\hat{\theta}$. Тогда алгоритм оценивания (2.62) обеспечивает достижение цели (2.58).

Доказательство. Запишем

$$\begin{aligned} \Gamma(\hat{\theta}(t)) &= \Gamma(\theta + \tilde{\theta}(t)) = \Gamma(\theta) + \tilde{\Gamma}(\theta, \tilde{\theta}(t)), \\ K(\hat{\theta}(t)) &= K(\theta + \tilde{\theta}(t)) = K(\theta) + \tilde{K}(\theta, \tilde{\theta}(t)), \end{aligned}$$

и

$$L(\hat{\theta}(t)) = L(\theta) + \tilde{L}(\theta, \tilde{\theta}(t)),$$

где

$$\tilde{L}(\theta, \tilde{\theta}) := \tilde{\Gamma}(\theta, \tilde{\theta}) - \tilde{K}(\theta, \tilde{\theta})h^\top.$$

Отметим, что в силу непрерывности справедливо

- функции $\tilde{\Gamma}(\theta, \tilde{\theta})$, $\tilde{K}(\theta, \tilde{\theta})$ и $\tilde{L}(\theta, \tilde{\theta})$ ограничены при ограниченном $\tilde{\theta}$,
- $\tilde{\Gamma}(\theta, 0) = 0$, $\tilde{K}(\theta, 0) = 0$ и $\tilde{L}(\theta, 0) = 0$,

– для любого $\epsilon > 0$ существует $\epsilon_\theta > 0$ такой что

$$\|\tilde{L}(\theta, \tilde{\theta})\|_2 \leq \epsilon$$

для всех $\|\tilde{\theta}\| < \epsilon_\theta$.

Рассмотрим теперь динамику ошибки оценивания при использовании алгоритма (2.62). Запишем

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_2(t) &= \Gamma(\hat{\theta}(t))\hat{x}_2(t) - K(\hat{\theta}(t))h^\top \hat{x}_2(t) - K(\hat{\theta}(t))q^\top \phi_1(x_1(t), u(t)) + \\ &+ K(\hat{\theta}(t))q^\top \dot{y}(t) = L(\hat{\theta}(t))\hat{x}_2(t) + K(\hat{\theta}(t))h^\top x_2(t). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_2(t) &= L(\hat{\theta}(t))\hat{x}_2(t) + K(\hat{\theta}(t))h^\top x_2(t) - \Gamma(\theta)x_2(t) = \\ &= L(\hat{\theta}(t))\hat{x}_2(t) - \left(\Gamma(\theta) + \tilde{\Gamma}(\theta, \tilde{\theta}(t)) - K(\hat{\theta}(t))h^\top \right) x_2(t) + \tilde{\Gamma}(\theta, \tilde{\theta}(t))x_2(t) = \\ &= L(\hat{\theta}(t))\tilde{x}_2(t) + \tilde{\Gamma}(\theta, \tilde{\theta}(t))x_2(t). \end{aligned}$$

Окончательно запишем

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = \left(L(\theta) + \tilde{L}(\theta, \tilde{\theta}(t)) \right) \tilde{x}_2(t) + \tilde{\Gamma}(\theta, \tilde{\theta}(t))x_2(t). \quad (2.63)$$

Так как $x_2(t)$ не зависит от $\tilde{x}_2(t)$ и ограничен, а

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\Gamma}(\theta, \tilde{\theta}(t))\|_2 = 0, \quad (2.64)$$

то (2.63) представляет собой линейную нестационарную систему, на вход которой подается асимптотически затухающее ограниченное воздействие.

В силу выбора матрицы $L(\theta)$, существует такая матрица $P > 0$, что

$$PL(\theta) + L^\top(\theta)P =: -Q < 0.$$

Далее, в силу свойств функции $\tilde{L}(\theta, \tilde{\theta}(t))$ и стремления $\|\tilde{\theta}(t)\|$ к нулю при $t \rightarrow \infty$, следует, что существует такой момент времени t_L , что для всех $t > t_L > t_0$ выполняется

$$P \left(L(\theta) + \tilde{L}(\theta, \tilde{\theta}(t)) \right) + \left(L(\theta) + \tilde{L}(\theta, \tilde{\theta}(t)) \right)^\top P < -\frac{1}{2}Q < 0. \quad (2.65)$$

Очевидно, что в линейной системе (2.63) на интервале $t \in [t_0, t_L]$ решение $\tilde{x}_2(t)$ существует, единственно и ограничено. Тогда, в силу (2.64), (2.65) и Леммы 2.4 достигается цель (2.58). \square

Построение образа сигнала $h^\top x_2(t)$

Для использования предложенного алгоритма (2.62) требуется сформировать оценку $\hat{\theta}(t)$, удовлетворяющую допущению 2.1. Для этого могут использоваться алгоритмы оценивания параметров синусоидальных сигналов, предложенные в разделе 2.2, однако они не могут быть применены явным образом, так как сигнал $\rho(t) = h^\top x_2(t)$ не измеряется. Следовательно, требуется сформировать некоторый сигнал, являющийся синусоидальным сигналом тех же частот, что и $\rho(t)$, но, возможно, с другими амплитудами и фазами; такой сигнал будем называть *образом* сигнала $\rho(t)$.

Перепишем равенство (2.60) как

$$q^\top \dot{y}(t) = q^\top \phi_1(y(t), u(t)) + \rho(t) \quad (2.66)$$

и обозначим

$$\begin{aligned} \xi_y(t) &:= q^\top \frac{p}{p + \alpha_\rho} y(t), \\ \xi_\phi(t) &:= q^\top \frac{1}{p + \alpha_\rho} \phi_1(y(t), u(t)), \\ \bar{\rho}(t) &:= \frac{1}{p + \alpha_\rho} \rho(t), \end{aligned}$$

где p – оператор дифференцирования и $\alpha > 0$. Тогда справедливо

$$\bar{\rho}(t) = \xi_y(t) - \xi_\phi(t) + \varepsilon_\rho(t), \quad (2.67)$$

где $\varepsilon_\rho(t)$ – экспоненциально затухающая функция времени. Очевидно, что, в силу выбора параметра α_ρ , сигнал $\bar{\rho}(t)$ является суммой синусоидальных компонент тех же частот, что и сигнал $\rho(t)$, и, следовательно, так же может быть представлен как выход автономного генератора с матрицей состояний $\Gamma(\theta)$.

Следовательно, сигнал $\bar{\rho}(t)$ может быть использован для формирования оценки $\hat{\theta}(t)$.

Окончательно, алгоритм формирования оценки $\hat{\rho}(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_{\rho,1}(t) &= -\alpha_{\rho}\zeta_{\rho,1}(t) + q^{\top}y(t), \\ \dot{\zeta}_{\rho,2}(t) &= -\alpha_{\rho}\zeta_{\rho,2}(t) + q^{\top}\phi_1(y(t), u(t)), \\ \hat{\rho}(t) &= q^{\top}y(t) - \alpha_{\rho}\zeta_{\rho,1}(t) - \zeta_{\rho,2}(t),\end{aligned}\tag{2.68}$$

а наблюдатель вектора состояний $x_2(t)$ состоит из алгоритмов (2.62), (2.68) и одного из алгоритмов из раздела 2.2 ((2.20), (2.32), (2.41) или (2.55)), выбранного в соответствии с размерностью вектора $x_2(t)$ и числом синусоидальных компонент с различными частотами. Размерность полученного наблюдателя составляет $\frac{5n_{x_2}+2}{2}$ для чётных n_{x_2} (нет смещения A_0) и $\frac{5n_{x_2}+1}{2}$ для нечётных n_{x_2} (смещение $A_0 \neq 0$).

Иллюстративный пример

Рассмотрим в качестве иллюстративного примера систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,1}(t) &= x_{1,2}(t) - x_{1,1}(t)x_{2,2}(t), \\ \dot{x}_{1,2}(t) &= -x_{1,1}^3(t) - x_{1,2}(t) + u^2(t) + x_{2,1}(t), \\ \dot{x}_{2,1}(t) &= x_{2,2}(t), \\ \dot{x}_{2,2}(t) &= -\omega^2x_{1,1}(t), \\ y(t) &= [x_{1,1}(t), x_{1,2}(t)]^{\top},\end{aligned}\tag{2.69}$$

которая соответствует системе (2.1)-(2.3) при выборе $x_1 = [x_{1,1}, x_{1,2}]^{\top}$, $x_2 = [x_{2,1}, x_{2,2}]^{\top}$,

$$\begin{aligned}\phi_1(x_1(t), u(t)) &= \begin{bmatrix} x_{1,2}(t) \\ -x_{1,1}^3(t) - x_{1,2}(t) + u^2(t) \end{bmatrix}, \\ g_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) &= \begin{bmatrix} -x_{1,1}(t)x_{2,2}(t) \\ x_{2,1}(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

и

$$\Gamma(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\theta & 0 \end{bmatrix},$$

где $\theta := \omega^2$. Равенство (2.4) выполняется при выборе

$$q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и пара $(\Gamma(\theta), h^\top)$ наблюдаема для всех $\omega > 0$.

Сформируем образ $\hat{\rho}(t)$ в соответствии с (2.68)

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_{\rho,1}(t) &= -\alpha_\rho \zeta_{\rho,1}(t) + x_{1,2}(t), \\ \dot{\zeta}_{\rho,2}(t) &= -\alpha_\rho \zeta_{\rho,2}(t) - x_{1,1}^3(t) - x_{1,2}(t) + u^2(t), \\ \hat{\rho}(t) &= x_{1,2}(t) - \alpha_\rho \zeta_{\rho,1}(t) - \zeta_{\rho,2}(t). \end{aligned} \tag{2.70}$$

Выберем алгоритм оценивания (2.20) и построим оценку $\hat{\theta}(t)$ как

$$\begin{aligned} \dot{\varsigma}_1(t) &= \varsigma_2(t), \\ \dot{\varsigma}_2(t) &= -2\varsigma_2(t) - \varsigma_1(t) + \hat{\rho}(t), \\ \dot{\hat{\theta}}(t) &= k\varsigma_1(t) \left(\varsigma_1(t) + 2\varsigma_2(t) - \hat{\rho}(t) - \hat{\theta}(t)\varsigma_1(t) \right). \end{aligned} \tag{2.71}$$

Обозначим $K(\theta) = [k_1, k_2(\theta)]^\top$. Тогда $L(\theta)$ имеет вид

$$L(\theta) = \Gamma(\theta) - K(\theta)h^\top = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -(k_2(\theta) + \theta) & 0 \end{bmatrix},$$

а характеристический полином матрицы $L(\theta)$

$$P_L(s) = s^2 + k_1 s + k_2 + \theta.$$

Тогда, выбрав

$$K(\theta) = \begin{bmatrix} k_1^* \\ k_2^* - \theta \end{bmatrix}, \tag{2.72}$$

получим, что характеристический полином матриц $L(\theta)$ постоянен для всех значений θ ,

$$P_L(s) = s^2 + k_1^* s + k_2^*,$$

и соответствующий выбор параметров k_1^* , k_2^* обеспечивает гурвицевость матрицы $L(\theta)$.

С учётом (2.72), алгоритм оценивания (2.62) примет вид

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_1(t) &= -k_1^* \hat{x}_{2,1}(t) + \hat{x}_{2,2}(t) - k_1^* (u^2(t) - x_{1,1}^3(t) - x_{1,2}(t)), \\ \dot{\chi}_2(t) &= -k_2^* \hat{x}_{2,1}(t) - (k_2^* - \hat{\theta}(t)) (u^2(t) - x_{1,1}^3(t) - x_{1,2}(t)), \\ \hat{x}_{2,1}(t) &= \chi_1(t) + k_1^* x_{1,2}(t), \\ \hat{x}_{2,2}(t) &= \chi_2(t) + (k_2^* - \hat{\theta}(t)) x_{1,2}(t).\end{aligned}\tag{2.73}$$

Окончательно, наблюдатель $\hat{x}_2(t)$ для системы (2.69) описывается выражениями (2.70), (2.71) и (2.73).

Численное моделирование

Проведём численное моделирование объекта (2.69) с наблюдателем (2.70), (2.71) и (2.73). Выберем $\omega = 2$ и начальные условия $x_2(0) = [3, 0]^\top$. Тогда сигнал $\rho(t) = h^\top x_2(t) = x_{2,1}(t)$ имеет вид

$$\rho(t) = 3 \sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Также выберем параметры $x_1(0) = [1, 2]^\top$, $\alpha_\rho = 2$, $k_1^* = 6$, $k_2^* = 9$ и $k = 10$. Сигнал управления $u(t)$ выберем как интеграл равномерного случайного сигнала с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\frac{1}{3}$.

На рисунках 2.30 и 2.31 приведены результат численного моделирования для сигналов $x_{1,1}(t)$ и $x_{1,2}(t)$. На рисунке 2.32 приведены результаты численного моделирования для сигналов $\bar{\rho}(t)$ и $\hat{\rho}(t)$, а на рисунке 2.33 – оценки параметра $\hat{\theta}(t)$. На рисунках 2.34 и 2.35 приведены результаты численного моделирования для ошибок оценивания $\tilde{x}_{2,1}(t)$ и $\tilde{x}_{2,2}(t)$.

Проиллюстрируем влияние параметров на быстродействие. Выберем $k = 100$, $k_1^* = 20$ и $k_2^* = 100$. На рисунке 2.36 приведены результаты численного моделирования для оценки параметра $\hat{\theta}(t)$, а на рисунках 2.37 и 2.38 приведены результаты численного моделирования для ошибок оценивания $\tilde{x}_{2,1}(t)$ и $\tilde{x}_{2,2}(t)$.

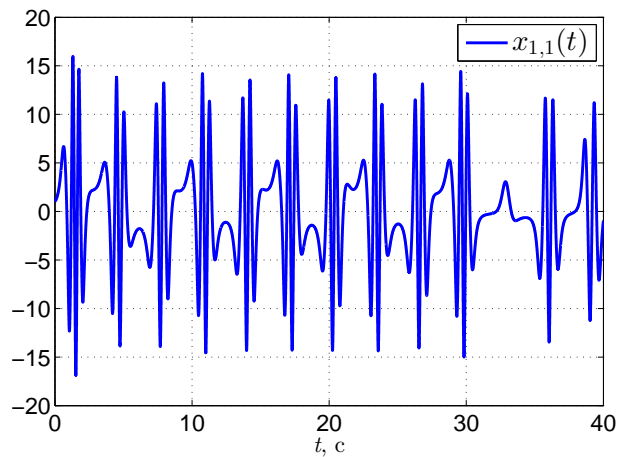


Рисунок 2.30. Сигнал $x_{1,1}(t)$ системы (2.69).

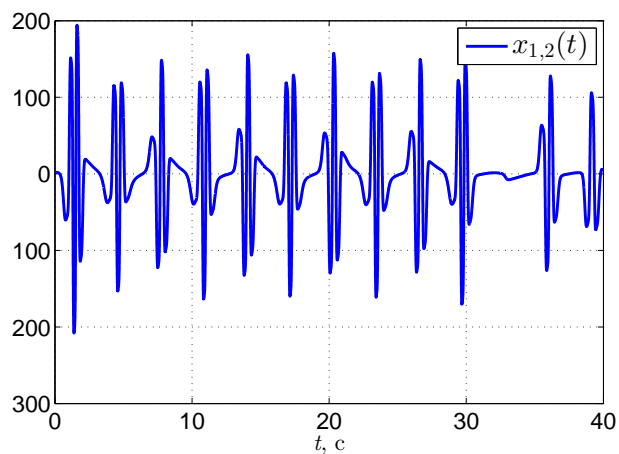


Рисунок 2.31. Сигнал $x_{1,2}(t)$ системы (2.69).

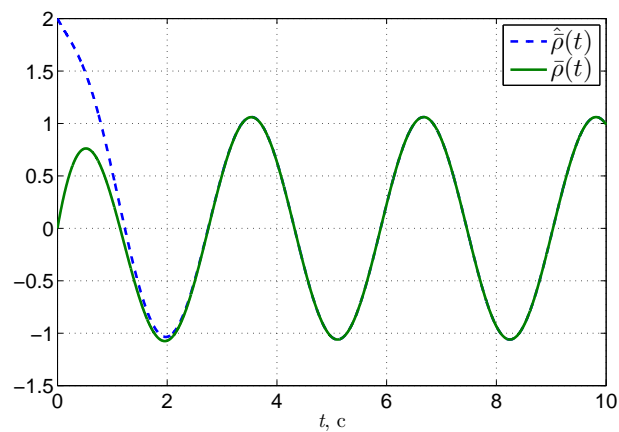


Рисунок 2.32. Оценка сигнала $\hat{\rho}(t)$ (2.70) при $\alpha_\rho = 2$, $k = 10$.

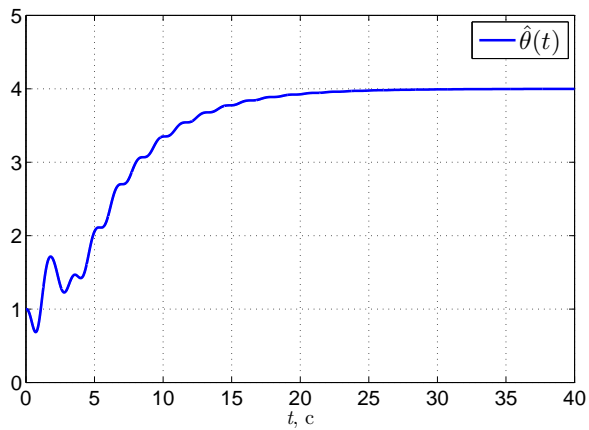


Рисунок 2.33. Оценка параметра $\hat{\theta}(t)$ (2.71) при $\alpha_\rho = 2$, $k = 10$.

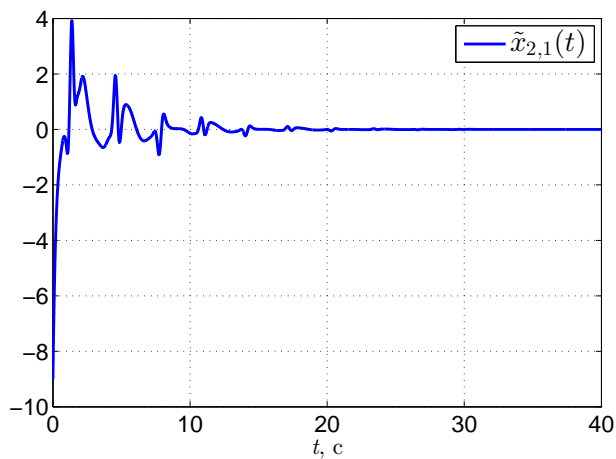


Рисунок 2.34. Ошибки оценивания $\tilde{x}_{2,1}(t)$ при $\alpha_\rho = 2$, $k = 10$ и $k_1^* = 6$, $k_2^* = 9$.

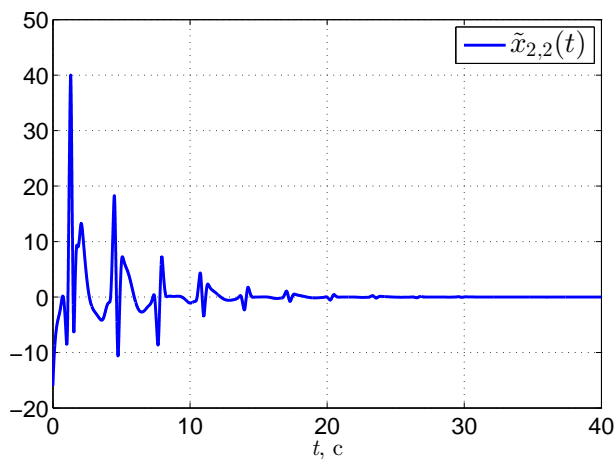


Рисунок 2.35. Ошибки оценивания $\tilde{x}_{2,2}(t)$ при $\alpha_\rho = 2$, $k = 10$ и $k_1^* = 6$, $k_2^* = 9$.

Результаты моделирования иллюстрируют, что увеличение параметров ведёт к сокращению времени оценивания.

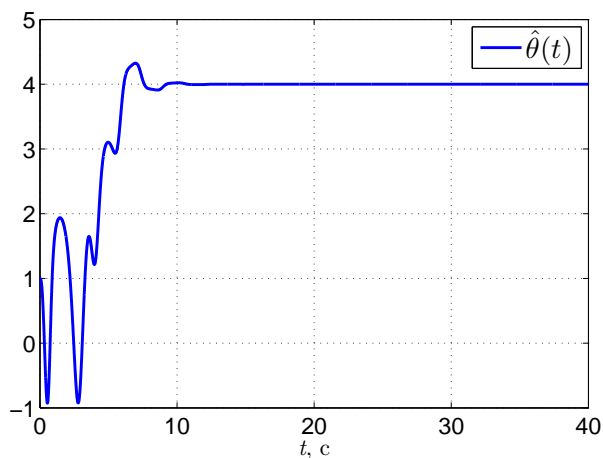


Рисунок 2.36. Оценка параметра $\hat{\theta}(t)$ (2.71) при $\alpha_\rho = 2$, $k = 100$.

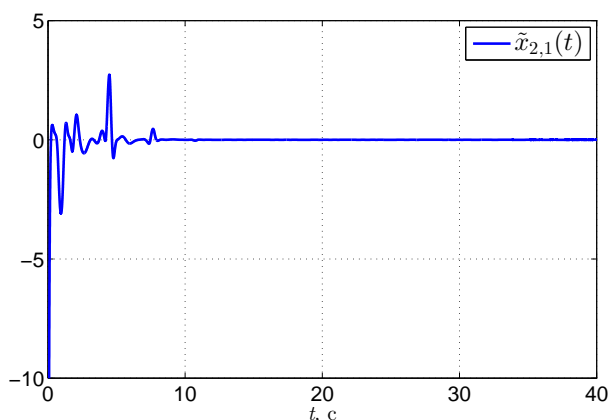


Рисунок 2.37. Ошибки оценивания $\tilde{x}_{2,1}(t)$ при $\alpha_\rho = 2$, $k = 100$ и $k_1^* = 20$,
 $k_2^* = 100$.

2.3.2 Построение наблюдателя по измерениям выходного сигнала

В предыдущем подразделе мы рассмотрели задачу оценивания вектора состояний $x_2(t)$ для нелинейного объекта, при условии измерения полного вектора $x_1(t)$. Однако на практике часто встречается случай, когда вектор $x_1(t)$ измеряется лишь частично, или же измеряется некоторая комбинация его компонентов. В этом разделе мы рассмотрим частную задачу, предполагая, что

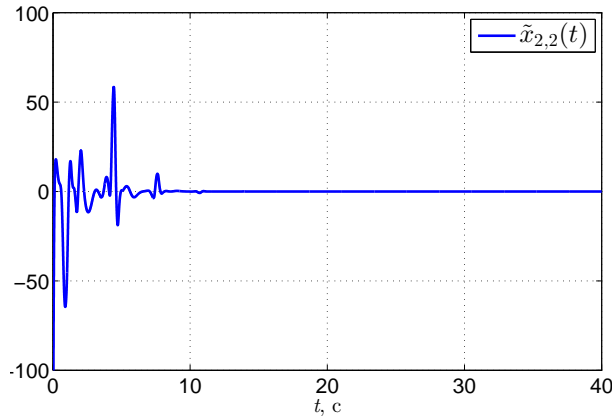


Рисунок 2.38. Ошибки оценивания $\tilde{x}_{2,2}(t)$ при $\alpha_\rho = 2$, $k = 100$ и $k_1^* = 20$,
 $k_2^* = 100$.

система (2.1)-(2.3) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= Ax_1(t) + bu(t) + Fx_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \Gamma(\theta)x_2(t), \\ y(t) &= c_y^\top x_1(t), \end{aligned} \quad (2.74)$$

где $u(t)$ и $y(t)$ – скалярные сигналы, $A \in \mathbb{R}^{n_{x_1} \times n_{x_1}}$ и $F \in \mathbb{R}^{n_{x_1} \times n_{x_2}}$ – постоянные известные матрицы, $b \in \mathbb{R}^{n_{x_1}}$ и $c_y \in \mathbb{R}^{n_{x_1}}$ – постоянные известные вектора. Причём матрица A Гурвицева, пара (A, b) полностью управляема, а пары (A, c_y) и $(\Gamma(\theta), h)$ – полностью наблюдаемы, и так же наблюдаема пара (A_0, C_0) , где

$$A_0 := \begin{bmatrix} A & F \\ 0 & \Gamma(\theta) \end{bmatrix}, \quad C_0 := \begin{bmatrix} c_y & 0 \end{bmatrix}.$$

Построение наблюдателя при известном θ

В начале предположим, что вектор параметров θ известен. Тогда оценка вектора состояний $x_2(t)$ может быть получена как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{x}_1(t) &= A\hat{x}_1(t) + bu(t) + F\hat{x}_2(t) + L_1(\hat{y}(t) - y(t)), \\ \frac{d}{dt} \hat{x}_2(t) &= \Gamma(\theta)\hat{x}_2(t) + L_2(\hat{y}(t) - y(t)), \\ \hat{y}(t) &= c_y \hat{x}_1(t), \end{aligned} \quad (2.75)$$

где вектора L_1 и L_2 выбраны так, что матрица

$$F_0 := A_0 - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} C_0$$

Гурвицева.

Утверждение 2.6. Для системы (2.74) наблюдатель (2.75) при известном θ обеспечивает достижение цели (2.58).

Доказательство. Как и раньше, обозначим $\tilde{x}_1(t) := x_1(t) - \hat{x}_1(t)$ и $\tilde{x}_2(t) := x_2(t) - \hat{x}_2(t)$. Запишем

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = (A - L_1 c_y) \tilde{x}_1 + F \tilde{x}_2(t),$$

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = -L_2 c_y \tilde{x}_1 + \Gamma(\theta) \tilde{x}_2(t),$$

или

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \end{bmatrix} = F_0 \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix}.$$

Так как матрица F_0 Гурвицева, то достигается цель (2.58). \square

Построение адаптивного наблюдателя при неизвестном θ

По аналогии с подразделом 2.3.1, реализуемый алгоритм оценивания может быть получен при замене вектора θ его оценкой $\hat{\theta}(t)$, удовлетворяющей Допущению 2.1. Такая оценка может быть получена с использованием методов, предложенных в разделе 2.2, однако для их применения требуется сформировать образ сигнала $x_2(t)$, то есть получить измеримый синусоидальный сигнал, содержащий те же частоты, что и $x_2(t)$.

На ряду с моделью вход-состояние-выход (2.74), запишем модель вход-выход, связывающую $y(t)$ с сигналами $u(t)$ и $x_2(t)$:

$$y(t) = c_y(pI - A)^{-1} b u(t) + c_y(pI - A)^{-1} F x_2(t)$$

или

$$a(p)y(t) = b(p)u(t) + a(p)\rho(t), \quad (2.76)$$

где сигнал

$$\rho(t) := c_y(pI - A)^{-1}Fx_2(t),$$

в силу Гурвицевости матрицы A и пренебрегая экспоненциально затухающими членами, является синусоидальным сигналом тех же частот, что и вектор состояний $x_2(t)$.

Рассмотрим произвольный полином $\gamma(s)$ степени n_{x_1} , все корни которого имеют отрицательную действительную часть. Тогда, обозначив $a_1(s) := \gamma(s) - a(s)$, для равенства (2.76) имеем

$$\gamma(p)y(t) = a_1(p)y(t) + b(p)u(t) + a(p)\rho(t),$$

или

$$y(t) = \frac{a_1(p)}{\gamma(p)}y(t) + \frac{b(p)}{\gamma(p)}u(t) + \bar{\rho}(t), \quad (2.77)$$

где $\bar{\rho}(t)$ удовлетворяет равенству

$$\gamma(p)\bar{\rho}(t) = a(p)\rho(t)$$

и, в силу выбора полинома $\gamma(s)$, является образом сигнала $\rho(t)$. Будем формировать оценку $\bar{\rho}(t)$ как

$$\hat{\bar{\rho}}(t) := y(t) - \frac{a_1(p)}{\gamma(p)}y(t) - \frac{b(p)}{\gamma(p)}u(t). \quad (2.78)$$

Тогда выполняется

$$\hat{\bar{\rho}}(t) = \bar{\rho}(t) + \varepsilon_\rho(t),$$

где $\varepsilon_\rho(t)$ экспоненциально затухает. Соответственно, сигнал $\hat{\bar{\rho}}(t)$ может использоваться для формирования оценки $\hat{\theta}(t)$ с посредством методов, изложенных в разделе 2.2.

Окончательно алгоритм оценивания $\hat{x}_2(t)$ включает в себя формирование сигнала $\hat{\bar{\rho}}(t)$ (2.78), один из алгоритмов формирования оценки $\hat{\theta}(t)$ из раздела 2.2 ((2.20), (2.32), (2.41) или (2.55)), выбранный в соответствии с размерностью вектора $x_2(t)$ и числом синусоидальных компонент с различными частотами,

и наблюдателя (2.75), где вместо θ используется оценка $\hat{\theta}(t)$. Доказательство работоспособности такого алгоритма оценивания аналогично доказательству Утверждения 2.5.

Замечание 2.7. Отметим, что предложенный алгоритм может быть легко расширен на случай гладкой нелинейной обратной связи по выходу. Действительно, рассмотрим вместо системы (2.74) систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= Ax_1(t) + bu(t) + d\phi(y) + Fx_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \Gamma(\theta)x_2(t), \\ y(t) &= c_y^\top x_1(t),\end{aligned}$$

где $d \in \mathbb{R}^{n_{x_1}}$ – постоянный известный вектор, а $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – известная гладкая функция. Тогда наблюдатель (2.75) примет вид

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{x}_1(t) &= A\hat{x}_1(t) + bu(t) + d\phi(y) + F\hat{x}_2(t) + L_1(\hat{y}(t) - y(t)), \\ \frac{d}{dt}\hat{x}_2(t) &= \Gamma(\theta)\hat{x}_2(t) + L_2(\hat{y}(t) - y(t)), \\ \hat{y}(t) &= c_y\hat{x}_1(t),\end{aligned}$$

выражение (2.76) будет заменено на

$$a(p)y(t) = b(p)u(t) + d(p)\phi(y(t)) + a(p)\rho(t),$$

где

$$\frac{d(p)}{a(p)} = c_y(pI - A)^{-1}d,$$

и оценка $\bar{\rho}(t)$ будет формироваться вместо (2.78) как

$$\hat{\rho}(t) = y(t) - \frac{a_1(p)}{\gamma(p)}y(t) - \frac{b(p)}{\gamma(p)}u(t) - \frac{d(p)}{\gamma(p)}\phi(y(t)).$$

Работоспособность модифицированного алгоритма оценивания напрямую следует из работоспособности оригинального алгоритма.

2.4 Непрямая адаптивная компенсация синусоидальных возмущений

В разделе 2.2 были получены методы оценивания неизвестного параметра θ , а в разделе 2.3.1, с использованием этих методов, были построены адаптивные наблюдатели неизмеряемого вектора состояний $x_2(t)$. Как уже обсуждалось в разделе 2.3, полученные методы могут быть использованы в задачах оценивания синусоидальных возмущений. В этом случае вектор неизвестных параметров θ ассоциирован с частотами возмущений, подсистема (2.1) рассматривается как некоторый объект, подверженный внешнему возмущающему воздействию, а подсистема (2.2) является автономным генератором синусоидальных возмущений.

В настоящем разделе будут рассмотрены методы компенсации синусоидальных возмущений. Предложенные в разделе подходы основаны на предложенных ранее методах оценивания и построения адаптивных наблюдателей. По аналогии с разделом 2.3, вначале в подразделе 2.4.1 будет рассмотрена задача компенсации возмущений, действующих на нелинейный объект, а затем, в подразделе 2.4.2 будет предложена общая схема компенсации синусоидальных возмущений для линейных объектов, основанная на параметризации Юлы-Кучеры.

Представленные в настоящем разделе результаты обобщают и расширяют результаты, ранее представленные в работах [41, 42] и [28, 29, 33, 34].

2.4.1 Компенсация возмущений для нелинейного объекта

Рассмотрим класс нелинейных объектов, для которых будет решаться задача компенсации синусоидального возмущения. Пусть в системе (2.1)-(2.3) выполняется

$$\begin{aligned}\phi_1(x_1(t), u(t)) &= f(x_1(t)) + g(x_1(t))u(t), \\ g_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) &= g(x_1)h^\top x_2(t).\end{aligned}$$

Тогда система (2.1)-(2.3) может быть записана как

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \phi_1(x_1(t)) + g(x_1(t)) (u(t) + h^\top x_2(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= \Gamma(\theta)x_2(t), \\ y(t) &= x_1(t),\end{aligned}\tag{2.79}$$

а условие (2.4) принимает вид

$$q^\top g(x_1) = 1.$$

Пусть для номинальной модели

$$\dot{x}(t) = \phi_1(x(t)) + g(x(t))u(t)\tag{2.80}$$

выполняется следующее допущение.

Допущение 2.2. Для номинальной модели (2.80) известны управление $u = U(x)$ и функция Ляпунова $V(x)$, такие что

$$c_1 |x|^2 \leq V(x) \leq c_2 |x|^2,\tag{2.81}$$

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)U(x)) \leq -c_3 |x|^2.\tag{2.82}$$

При этом предполагается, что положительные числа c_1 , c_2 и c_3 могут быть неизвестны.

Цель управления заключается в синтезе гладкой обратной связи по состоянию $x_1(t)$, обеспечивающей в замкнутой системе при любых начальных состояниях $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_1(t)\| = 0.\tag{2.83}$$

Построение закона управления

Предположим, что доступна оценка $\hat{\rho}(t)$ сигнала $\rho(t) := h^\top x_2(t)$, такая что $\tilde{\rho}(t) := \rho(t) - \hat{\rho}(t)$ ограничена и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\rho}(t)| = 0.$$

Обозначим

$$\varpi(x) := \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x)$$

и выберем закон управления в виде

$$u(t) = U(x(t)) - \varpi(x(t)) - \hat{\rho}(t). \quad (2.84)$$

Утверждение 2.7. Для объекта (2.79) закон управления (2.84) обеспечивает достижение цели (2.83).

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова $V(x_1)$, удовлетворяющую Допущению 2.2. Тогда

$$\dot{V}(t) = \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} (f(x(t)) + g(x(t))U(x(t)) + g(x(t))\tilde{\rho}(t) - g(x)\varpi(x(t))).$$

Подставляя в последнее уравнение выражение (2.82), получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -c_3 |x(t)|^2 + \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} (g(x(t))\tilde{\rho}(t) - g(x)\varpi(x(t))) \leq \\ &\leq -c_3 |x(t)|^2 + \tilde{\rho}^2(t) \end{aligned}$$

где в последнем неравенстве было использовано

$$\varpi(x(t))\tilde{\rho}(t) \leq \varpi^2(x(t)) + \tilde{\rho}^2(t).$$

Окончательно, получим

$$\dot{V}(t) \leq -c_0 V(t) + \tilde{\rho}^2(t),$$

где $c_0 > 0$ и, в силу свойств сигнала $\tilde{\rho}(t)$ и Леммы 2.4, $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$ и достигается цель (2.83). \square

Формирование сигнала $\hat{\rho}(t)$

С учётом Утверждения 2.7, для решения задачи компенсации требуется сформировать оценку $\hat{\rho}(t)$, удовлетворяющую указанным выше требованиям.

Такая оценка может быть получена при использовании алгоритма (2.68)

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_{\rho,1}(t) &= -\alpha_{\rho}\zeta_{\rho,1}(t) + q^{\top}y(t), \\ \dot{\zeta}_{\rho,2}(t) &= -\alpha_{\rho}\zeta_{\rho,2}(t) + q^{\top}(f(x_1(t)) + g(x_1(t))u(t)), \\ \hat{\bar{\rho}}(t) &= q^{\top}y(t) - \alpha_{\rho}\zeta_{\rho,1}(t) - \zeta_{\rho,2}(t),\end{aligned}$$

где $\alpha_{\rho} > 0$. Сигнал $\bar{\rho}(t)$ определён как

$$\bar{\rho}(t) = \frac{1}{p + \alpha_{\rho}}\rho(t),$$

и при известном векторе θ сигнал $\rho(t)$ может быть однозначно восстановлен по измерениям $\bar{\rho}(t)$. Оценка вектора θ , в свою очередь, может быть получена и использованием алгоритмов идентификации, предложенных в разделе 2.2.

2.4.2 Компенсация возмущений для линейного объекта

Рассмотрим задачу компенсации мультисинусоидального возмущения для линейного объекта. Как было показано в разделе 2.3.2, система вида (2.74) может быть представлена как объект управления \mathcal{P} вида

$$a(p)y(t) = b(p)u(t) + a(p)\rho(t), \quad (2.85)$$

где n_a – размерность полинома $a(s)$, n_b – размерность полинома $b(s)$, $n_a \geq n_b$, причём многочлен $a(s)$ имеет единичный коэффициент при старшей степени. Неизмеряемое синусоидальное возмущение $\rho(t)$ имеет вид

$$\rho(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t + \phi_i), \quad (2.86)$$

где N – известное число синусоидальных компонент, $\omega_i > 0$, A_i и ϕ_i – неизвестные частоты, амплитуды и фазы сигнала (2.86), причём $\omega_i \neq \omega_j$ при $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, N$

Постановка задачи

Пусть известен номинальный закон управления C_0 вида

$$s(p) u(t) = r(p) (g(t) - y(t)), \quad (2.87)$$

где $g(t)$ – задающее воздействие, n_s – размерность полинома $s(s)$, n_r – размерность полинома $r(s)$, $n_s \geq n_r$, причём многочлен $s(s)$ имеет единичный коэффициент при старшей степени.

Передаточная функция объекта \mathcal{P} , связывающая входной сигнал $u(t)$ с выходным сигналом $y(t)$, задается как

$$P_0(s) = \frac{b(s)}{a(s)}. \quad (2.88)$$

Допущение 2.3. Передаточная функция $P_0(s)$ может быть неустойчивой, однако не имеет чисто мнимых нулей и полюсов (корней многочленов $b(s)$ и $a(s)$).

Допущение 2.4. Закон управления C_0 таков, что многочлен $a(s)s(s) + b(s)r(s)$ – Гурвицев, а замкнутая система (2.85)-(2.87) при отсутствии возмущения имеет единственное нулевое положение равновесия, которое является асимптотически устойчивым.

В отсутствие возмущения, т.е. при $\rho(t) \equiv 0$, выходной сигнал замкнутой системы (2.85)-(2.87) может быть представлен как

$$y_0(t) = \frac{b(p) r(p)}{a(p) s(p) + b(p) r(p)} g(t) = W_0(p) g(t), \quad (2.89)$$

где передаточную функцию $W_0(s)$ будем называть номинальной. Тогда задача компенсации возмущения $\rho(t)$ формулируется следующим образом. Для заданного объекта \mathcal{P} (2.85) и закона управления C_0 (2.87) требуется построить закон управления C вида

$$u(t) = C (g(t), y(t)), \quad (2.90)$$

такой что для выходного сигнала $y(t)$ замкнутой системы (2.85),(2.90) выполняется

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_0(t)) = 0, \quad (2.91)$$

где $y_0(t)$ описывается выражением (2.89). Иными словами, при компенсации возмущения выходной сигнал в замкнутой системе с законом управления C при наличии возмущения (2.86) должен асимптотически совпадать с выходным сигналом невозмущенной замкнутой системы с номинальным законом управления C_0 при том же задающем сигнале $g(t)$.

Параметризация Юлы-Кучеры

Будем строить закон управления на основе параметризации Юлы-Кучеры всех стабилизирующих контроллеров [91–93]. Данная параметризация хорошо известна в теории управления и нашла широкое применение в адаптивных системах [94]. Для полноты изложения приведем здесь без доказательства упрощённую формулировку данной параметризации для случая линейного скалярного объекта, т.е. объекта со скалярными входом и выходом.

Будем называть реализуемой такую передаточную функцию, порядок многочлена в числителе которой не превышает порядок многочлена в знаменателе. Обозначим множество всех устойчивых реализуемых передаточных функций как Ω . Далее, будем говорить, что передаточная функция $C(s)$ стабилизирует объект $P(s)$, если замкнутая система, приведённая на рисунке 2.39 устойчива.

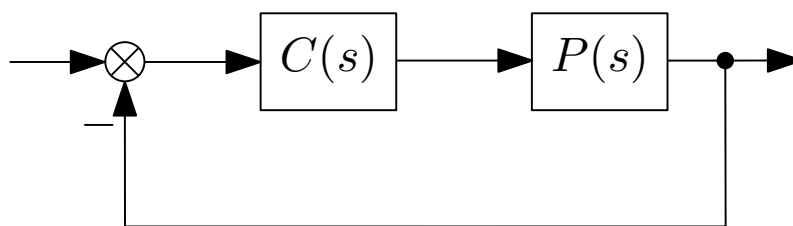


Рисунок 2.39. Замкнутая система с регулятором $C(s)$ и объектом $P(s)$.

Теорема 2.1 (Параметризация Юлы-Кучеры). Пусть передаточная функция линейного стационарного объекта задана как

$$P(s) = \frac{N(s)}{M(s)}, \quad (2.92)$$

где передаточные функции $N(s) \in \Omega$ и $M(s) \in \Omega$. Пусть известны передаточные функции $X(s) \in \Omega$ и $Y(s) \in \Omega$, являющиеся решением уравнения Безу:

$$N(s)X(s) + M(s)Y(s) = 1. \quad (2.93)$$

Тогда множество всех регуляторов $C(s)$, стабилизирующих объект $P(s)$, может быть параметризовано как

$$C(s) = \frac{X(s) + M(s)Q(s)}{Y(s) - N(s)Q(s)}, \quad (2.94)$$

где передаточная функция $Q(s) \in \Omega$. Иначе говоря, любой регулятор, полученный как (2.94), стабилизирует объект $P(s)$, и любой регулятор, стабилизирующий объект $P(s)$, может быть представлен как (2.94).

Рассмотрим применение Теоремы 2.1 для объекта \mathcal{P} с передаточной функцией (2.88). Выберем

$$N(s) = \frac{b(s)}{f(s)}, \quad M(s) = \frac{a(s)}{f(s)},$$

где $f(s)$ – произвольный Гурвицев полином, $n_l = n_a$. Сформируем

$$X(s) = \frac{r(s)f(s)}{z(s)}, \quad Y(s) = \frac{s(s)f(s)}{z(s)},$$

где $z(s) = a(s)s(s) + b(s)r(s)$. Очевидно, что при таком выборе выполняется равенство (2.93), и множество всех регуляторов, стабилизирующих \mathcal{P} , задается выражением (2.94). Справедливо и обратное – если некоторый регулятор с передаточной функцией $F(s)$ стабилизирует объект \mathcal{P} , то он может быть представлен в виде (2.94), где

$$Q(s) = \frac{F(s)Y(s) - X(s)}{F(s)N(s) + M(s)}.$$

Замкнутая система, состоящая из объекта \mathcal{P} с регулятором (2.94), описывается как

$$y(t) = N(p) (X(p) + M(p)Q(p)) g(t) + M(p) (Y(p) - N(p)Q(p)) \rho(t).$$

В частности, при выборе $Q(s) \equiv 0$ получим регулятор, соответствующий номинальному закону управления (2.87):

$$C(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{r(s)}{s(s)}.$$

В этом случае замкнутая система принимает вид

$$y(t) = N(p)X(p)g(t) + M(p)Y(p)\rho(t),$$

причём несложно проверить, что $N(s)X(s)$ совпадает с номинальной передаточной функцией $W_0(s)$.

Закон управления, описываемый регулятором (2.94), может быть представлен как

$$u(t) = C(p) (g(t) - y(t)) \quad (2.95)$$

или

$$\begin{aligned} Y(p)u(t) &= (X(p) + M(p)Q(p))g(t) - X(p)y(t) - \\ &- Q(p)(M(p)y(t) - N(p)u(t)). \end{aligned} \quad (2.96)$$

На рисунках 2.40 и 2.41 представлены две эквивалентные реализации замкнутой системы с регулятором (2.94), соответствующие выражениям (2.95) и (2.96).

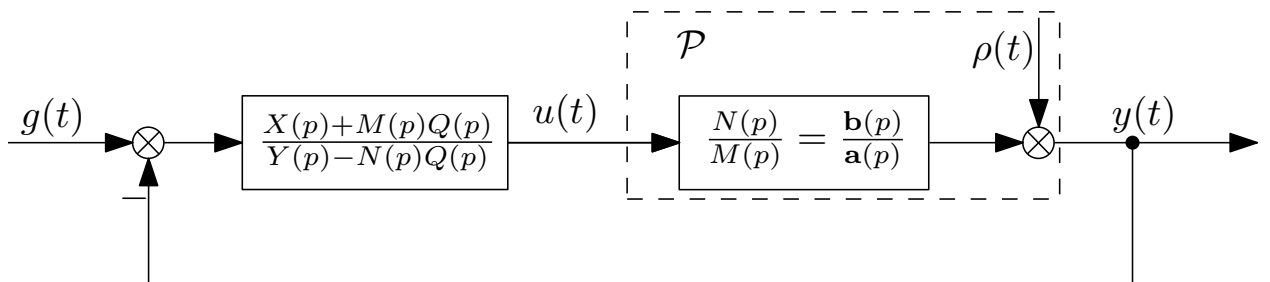


Рисунок 2.40. Реализация замкнутой системы с регулятором (2.94) в соответствии с (2.95).

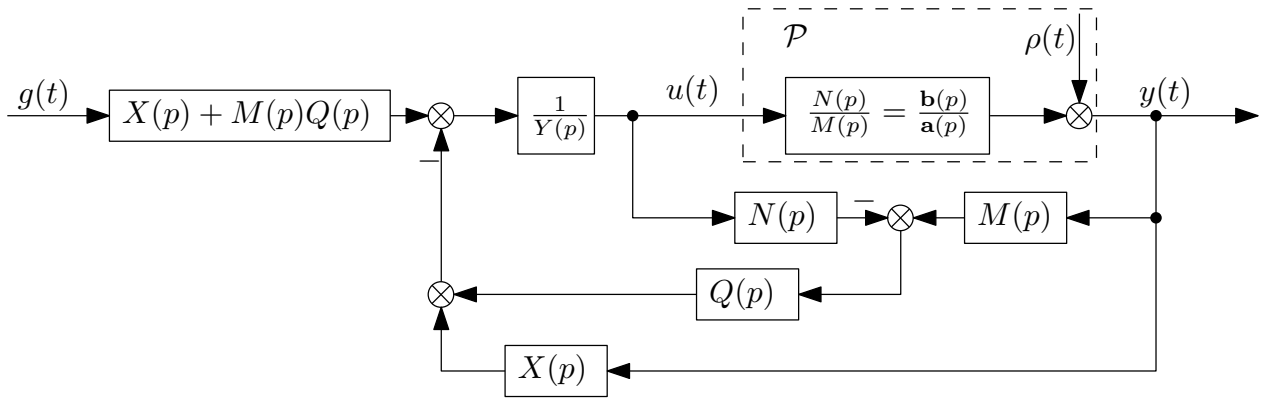


Рисунок 2.41. Реализация замкнутой системы с регулятором (2.94) в соответствии с (2.96).

Упрощённая параметризация регулятора

Заданная в Теореме 2.1 параметризация позволяет описать *все* регуляторы, стабилизирующие объект, что избыточно для поставленной задачи компенсации. Рассмотрим упрощённую параметризацию, описывающую регуляторы, при которых передаточная функция замкнутой системы от $g(t)$ к $y(t)$ совпадает с номинальной. Будем формировать сигнал управления как

$$u(t) = \frac{X(p)}{Y(p) - N(p)Q(p)}g(t) - \frac{X(p) + M(p)Q(p)}{Y(p) - N(p)Q(p)}y(t), \quad (2.97)$$

или, по аналогии с (2.96),

$$Y(p)u(t) = X(p)(g(t) - y(t)) - Q(p)(M(p)y(t) - N(p)u(t)). \quad (2.98)$$

Выбрав $Q(s) = Y(s)Q_0(s)$, где $Q_0(s) \in \Omega$, получим следующее описание замкнутой системы с объектом (2.85) и законом управления (2.97):

$$y(t) = N(p)X(p)g(t) + M(p)Y(p)(1 - N(p)Q_0(p))\rho(t).$$

Обозначив передаточную функцию $W_c(s) = 1 - N(s)Q_0(s)$ и сигнал

$$\rho_c(t) = W_c(p)\rho(t), \quad (2.99)$$

сформулируем следующее Утверждение, доказательство которого вытекает из приведенных выше рассуждений.

Утверждение 2.8. Рассмотрим объект (2.85) с законом управления (2.97) и $Q(s) = Y(s)Q_0(s)$. При выборе любой передаточной функции $Q_0(s) \in \Omega$ замкнутая система будет устойчива, а передаточная функция от входного сигнала $g(t)$ к выходному сигналу $y(t)$ будет совпадать с номинальной передаточной функцией $W_0(s)$. Более того, если $Q_0(s)$ выбрана таким образом, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_c(t) = 0, \quad (2.100)$$

где сигнал $\rho_c(t)$ задан выражением (2.99), то обеспечивается (2.91).

Схема замкнутой системы с предложенным законом управления в форме (2.98) и $Q(s) = Y(s)Q_0(s)$ представлена на рисунке 2.42.

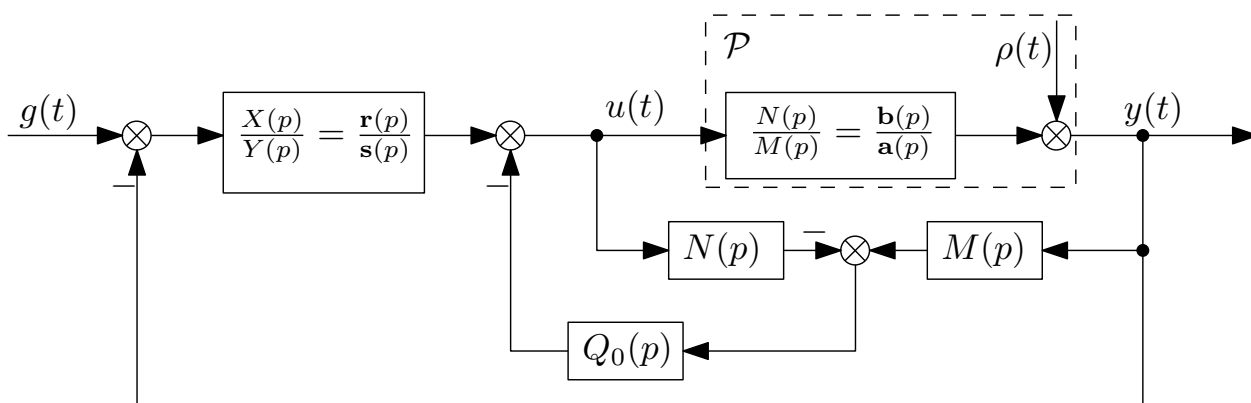


Рисунок 2.42. Реализация замкнутой системы с законом управления в форме (2.98) и $Q(s) = Y(s)Q_0(s)$.

Как следует из Утверждения 2.8, для компенсации возмущения необходимо за счёт выбора $Q_0(s) \in \Omega$ обеспечить $\rho_c(t) \rightarrow 0$. Непрямой адаптивный подход делит эту задачу на два этапа. На первом этапе параметры возмущения считаются известными и строится регулятор, компенсирующий это возмущение. На втором этапе рассматривается задача идентификации неизвестных параметров, а полученные оценки используются для расчёта регулятора в соответствии с результатами первого этапа.

Параметризация возмущения

Дополним результаты, изложенные в подразделе 2.2.1 и повторно рассмотрим способы параметризации возмущения $\rho(t)$.

Будем говорить, что действующее на объект возмущение $\rho(t)$ параметризовано вектором неизвестных параметров $\theta \in \mathbb{R}^N$:

$$\rho(t) = \rho(\theta, t).$$

С точки зрения компенсации возмущения стоит выделить два способа параметризации возмущения. В первом случае вектор неизвестных параметров состоит из значений частот отдельных компонент возмущения:

$$\theta = \left[\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_N \right]^\top. \quad (2.101)$$

Во втором случае возмущение $\rho(t)$ представляется как выходной сигнал некоторого генератора с передаточной функцией $D(s)$:

$$\rho(t) = D(p)\delta(t) = \frac{e(p)}{d(p)}\delta(t), \quad (2.102)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, $n_d = 2N$, коэффициенты полинома $e(s)$ задают амплитуды и фазы отдельных компонент, а характеристический полином $d(s)$ имеет единицу при старшей степени и определяет частоты синусоидальных компонент:

$$d(s) = \prod_{i=1}^N (s^2 + \omega_i^2).$$

В этом случае вектор неизвестных параметров выбирается как вектор коэффициентов полинома $d(s)$:

$$\begin{aligned} d(s) &= s^{2N} + d_{2N-2}s^{2N-2} + \dots + d_2s^2 + d_0, \\ \theta &= \left[d_{2N-2} \ d_{2N-4} \ \dots \ d_0 \right]^\top. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Очевидно, что параметризации (2.101) и (2.103) взаимнооднозначны, как и было указано в замечании 2.1. Однако, рассмотрим далее по отдельности методы

расчёта регулятора для компенсации возмущения при известных параметрах, заданных в форме (2.101) или (2.103).

Компенсация возмущения с известными частотами

Пусть известны оценки² частот возмущения $\hat{\omega}_i$, $i = 1, \dots, N$, заданные вектором $\hat{\theta} = \text{col}\{\hat{\omega}_i\}$. В этом случае расчет передаточной функции $Q_0(s)$, обеспечивающей выполнение (2.100), удобно проводить с использованием частотных характеристик линейных систем. Действительно, в силу (2.99) выполнение условия (2.100) равнозначно

$$N(i\omega_i)Q_0(i\omega_i) = 1 \quad (2.104)$$

для всех ω_i , $i = 1, \dots, N$.

Для обеспечения $Q_0(s) \in \Omega$, выберем $Q_0(s)$ как

$$Q_0(s) = \frac{qn(s)}{qm(s)}, \quad (2.105)$$

где $n_{qn} = n_{qm} = 2N - 1$, и $qm(s)$ – произвольно выбранный Гурвицев полином.

Обозначим

$$T(s) = \frac{b(s)}{f(s)qm(s)},$$

причём $T(s) \in \Omega$ и $T(i\omega_i) \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, N$ в силу Допущения 2.3.

Тогда справедливо равенство

$$N(s)Q_0(s) = T(s) \sum_{i=0}^{2N-1} s^i qn_i,$$

а условие (2.104) примет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & i\omega_i & \dots & (i\omega_i)^{2N-2} & (i\omega_i)^{2N-1} \end{bmatrix} \kappa = T^{-1}(i\omega_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

где $\kappa = \text{col}\{qn_i\}$, $i = 0, \dots, 2N - 1$, – вектор коэффициентов полинома $qn(s)$, при которых достигается выполнение условия (2.100). Запишем (2.104) в матричной

²Далее мы будем предполагать, что эти оценки *точные*, т.е. $\hat{\omega}_i = \omega_i \forall i$, однако для наглядности будем разделять сами параметры и их оценки.

форме:

$$\Psi(\theta)\kappa = \Upsilon(\theta),$$

где

$$\Psi(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & i\omega_1 & \cdots & (i\omega_1)^{2N-1} \\ 1 & i\omega_2 & \cdots & (i\omega_2)^{2N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & i\omega_N & \cdots & (i\omega_N)^{2N-1} \end{bmatrix}, \quad \Upsilon(\theta) = \begin{bmatrix} T^{-1}(i\omega_1) \\ T^{-1}(i\omega_2) \\ \vdots \\ T^{-1}(i\omega_N) \end{bmatrix}.$$

и θ задан как (2.101).

Таким образом, задача расчета передаточной функции $Q_0(s)$ при известных частотах сводится к выбору произвольного Гурвицева полинома $qm(s)$ и решению системы комплексных уравнений

$$\Psi(\hat{\theta})\kappa = \Upsilon(\hat{\theta}) \quad (2.106)$$

и формировании полинома $qn(s) = \sum_{i=0}^{2N-1} \kappa_i s^i$.

Компенсация возмущения с известным характеристическим полиномом

Вновь представим передаточную функцию $Q_0(s)$ в форме (2.105) и выберем произвольный Гурвицев полином $qm(s)$. Тогда при использовании параметризации (2.103) можно записать

$$\rho_c(t) = (1 - N(p)Q_0(p))\rho(t) = \frac{(f(p)qm(p) - b(p)qn(p))e(p)}{f(p)qm(p)d(p)}\delta(t).$$

Пусть выполняется равенство

$$d(s)d^\dagger(s) + b(s)qn(s) = f(s)qm(s),$$

где $d^\dagger(s)$ – некоторый полином степени $n_{d^\dagger} = n_l - 1$. Тогда справедливо

$$\rho_c(t) = \frac{d^\dagger(p)e(p)}{f(p)qm(p)}\delta(t).$$

Поскольку полиномы $f(s)$ и $qm(s)$ Гурвицевы, то $\rho_c(t)$ асимптотически стремится к нулю.

Таким образом, задача расчета передаточной функции $Q_0(s)$ при известных параметрах в форме (2.103) сводится к выбору произвольного Гурвицева полинома $qm(s)$ и решению полиномиального уравнения

$$\hat{d}(s)d^\dagger(s) + b(s)qn(s) = f(s)qm(s) \quad (2.107)$$

относительно неизвестных полиномов $d^\dagger(s)$ и $qn(s)$, где $\hat{d}(s)$ – полином, заданный вектором оценок $\hat{\theta} = \text{col}\{\hat{d}_{2(N-i)}\}$, $i = 1, \dots, N$.

Адаптивная настройка регулятора

Так как сигнал возмущения $\rho(t)$ не измеряется, то для построения алгоритма идентификации требуется сформировать некоторый измеряемый сигнал, ассоциированный с возмущением, *изображение возмущения*, т.е. измеряемый сигнал, представляющий собой сумму синусоидальных компонент с теми же частотами, что и (2.86), но, возможно, с другими амплитудами и фазами. С учетом предложенной структуры регулятора (2.98), в качестве такого сигнала удобно выбрать

$$v(t) = M(p)y(t) - N(p)u(t) = M(p)\rho(t).$$

Так как передаточная функция $M(s) \in \Omega$ и не имеет чисто мнимых нулей, см. Допущение 2.3, то сигнал $v(t)$, пренебрегая экспоненциально затухающими составляющими, имеет вид

$$v(t) = \sum_{i=1}^N \bar{A}_i \sin(\omega_i t + \bar{\phi}_i), \quad (2.108)$$

где $\bar{A}_i = |M(i\omega_i)|A_i$, $\bar{\phi}_i = \phi_i + \angle M(i\omega_i)$. Соответственно, задача идентификации параметров неизмеряемого возмущения $\rho(t)$ сводится к задаче идентификации параметров измеряемого сигнала $v(t)$.

Для построения не прямой адаптивной системы компенсации возмущения в соответствии с предложенным законом управления (2.97) и методами расчёта

передаточной функции $Q_0(s)$, описанными в разделах 2.4.2 и 2.4.2, может быть использован некоторый алгоритм идентификации параметров $\hat{\theta}(t) = \mathcal{ID}\{v(t)\}$ следующего вида

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= f_{\mathcal{ID}}(\xi(t), v(t)), \\ \hat{\theta}(t) &= h_{\mathcal{ID}}(\xi(t), v(t)),\end{aligned}\tag{2.109}$$

где $\xi(t)$ – вектор внутренних состояний алгоритма, а $f_{\mathcal{ID}}(\cdot, \cdot)$ и $h_{\mathcal{ID}}(\cdot, \cdot)$ – некоторые функции, определяемые выбором конкретного алгоритма идентификации. Пусть для алгоритма идентификации выполняются следующие допущения.

Допущение 2.5. *Если входной сигнал $v(t)$ ограничен, то сигналы $\xi(t)$ и $\hat{\theta}(t)$ в алгоритме (2.109) также ограничены.*

Допущение 2.6. *Если входной сигнал $v(t)$ имеет форму (2.108), то оценки параметров $\hat{\theta}(t)$ в алгоритме (2.109) асимптотически стремятся к истинным значениям, определяемым параметризацией (2.101) или (2.103).*

Утверждение 2.9. *Рассмотрим объект (2.85) с законом управления (2.97), $Q(s) = Y(s)Q_0(s)$, $Q_0(s) \in \Omega$, и алгоритм идентификации (2.109). Пусть расчет передаточной функции $Q_0(s)$ выполняется в соответствии с (2.106) или (2.107), в зависимости от используемой параметризации. Если для алгоритма идентификации выполняется Допущение 2.5, то все сигналы в замкнутой системе ограничены. Если при этом также выполняется Допущение 2.6, то обеспечивается (2.91).*

Доказательство. Рассмотрим приведенный на рисунке 2.43 разомкнутый контур, эквивалентный рассматриваемому в Утверждении 2.9 замкнутому контуру. Из рисунка видно, что в эквивалентном контуре отсутствуют обратные связи, и, как следствие, ограниченность сигналов следует из устойчивости передаточных функций $N(s)$, $M(s)$, $X(s)$, $Q_0(s)$ и Допущения 2.5.

Далее, если выполняется Допущение 2.6, и передаточная функция $Q_0(s)$ рассчитана в соответствии с (2.106) или (2.107), то для сигнала $\rho_c(t)$ (2.99) выполняется (2.100), что обеспечивает (2.91). \square

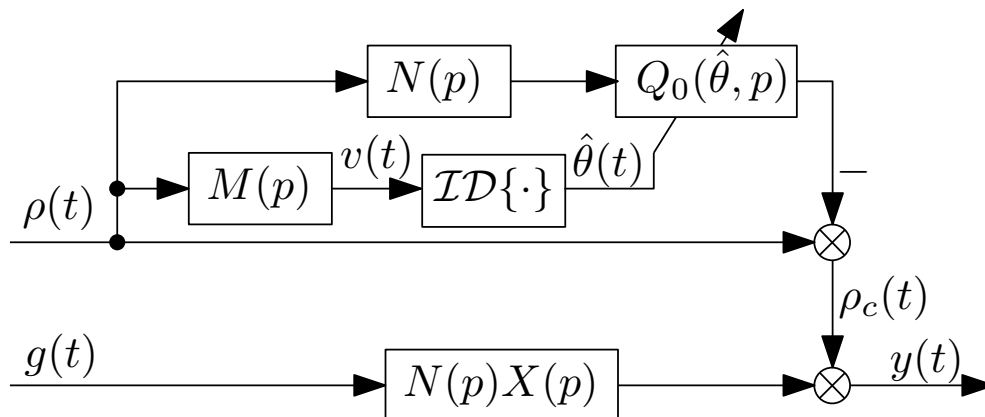


Рисунок 2.43. Разомкнутый контур, эквивалентный замкнутой системе с объектом (2.85), законом управления (2.97), и алгоритмом идентификации (2.109)..

Замечание 2.8. Очевидно, что алгоритмы идентификации (2.20), (2.32), (2.41) или (2.55), предложенные в разделе 2.2, могут быть записаны в виде (2.109) и удовлетворяют Допущениям 2.5 и 2.6. Соответственно, эти алгоритмы могут использоваться для построения непрямого адаптивного регулятора, описанного в Утверждении 2.9 и обеспечивающего достижение цели (2.91).

2.5 Методы повышения точности оценивания параметров синусоидальных сигналов

Как было показано в предыдущих разделах настоящей главы, методы компенсации синусоидальных возмущений могут быть построены на основе адаптивных наблюдателей этих возмущений, основанные, в свою очередь, на идентификационных методах. Соответственно, существенную роль в качестве функционирования системы компенсации возмущения играет качество

идентификации параметров этого возмущения, а именно частот синусоидальных сигналов. Основные методы оценивания частот были рассмотрены в разделе 2.2. Эти методы направлены на оценивания постоянной частоты синусоидального сигнала, и при наличии ограниченного возмущения (ошибок измерения) обеспечивают ограниченность оценок. В настоящем разделе будут рассмотрены два подхода к повышению точности оценивания, а именно в разделе 2.5.1 рассмотрен метод оценивания линейно меняющейся частоты, а в разделе 2.5.2 предложена схема адаптивной каскадной фильтрации, позволяющая существенно повысить точность оценивания параметров.

Представленные в данном разделе результаты развивают и обобщают результаты, ранее изложенные в работах [32, 35, 51–53, 55, 60].

2.5.1 Оценивание линейно меняющихся параметров

Традиционно в задачах идентификации частоты синусоидального сигнала предполагается, что частота постоянна, или меняется медленно (по сравнению со схемой оценивания параметров). Однако, проблема идентификации линейно меняющейся частоты синусоидального имеет реальное прикладное значение и может возникать, например, в задачах компенсации возмущений. Например, в прикладной проблеме компенсации возмущений при управлении телескопом. Широкое распространение в телескопостроении получили вентильные двигатели [95]. Такие машины имеют много достоинств, но, к сожалению, не лишены недостатков. Так, одним из недостатков является наличие пульсирующего зубцового момента, который для трёхфазных машин может быть описан как

$$M_p(\alpha) = M_a \sin\left(pn \frac{6}{2\pi} \alpha + \phi_p\right), \quad (2.110)$$

где α – угол поворота двигателя, $M_p(\alpha)$ – значение зубцового момента в угле α , M_a – амплитуда пульсаций момента, pn – число пар полюсов, ϕ_p – фаза зубцового момента. Очевидно, что если ось телескопа вращается с постоянной

скоростью $\dot{\alpha}(t) = const$, то во временной области зубцовый момент описывается гармонической функцией с постоянной частотой.

Более сложная задача возникает, если предположить, что траектория движения оси телескопа состоит из участков движения с постоянной скоростью (сопровождение медленных объектов) и участков равноускоренного движения (переход между различными объектами, сопровождение быстродвижущихся объектов, проекция траекторий которых на азимутальную ось описывается параболой). В этом случае развитие зубцового момента (2.110) во времени будет описываться гармонической функцией с линейно меняющейся частотой и для компенсации такого возмущения потребуются решить задачу идентификации линейно меняющейся частоты. При этом методы оценивания частоты, описанные в разделах 2.1 и 2.2, не способны оценить линейно меняющуюся частоту сигнала, а типовой график использования этих методов представлен на рисунке 2.44.

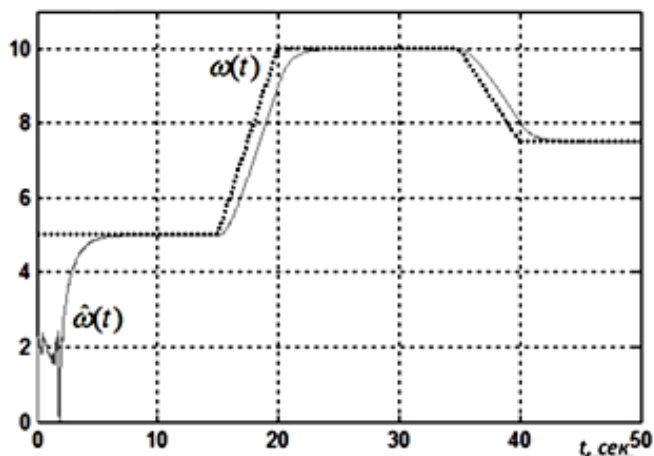


Рисунок 2.44. Пример оценки переменной частоты $\omega(t)$ при использовании методов оценки, основанных на предположении $\omega(t) = const..$

Постановка задачи

Рассмотрим синусоидальный сигнал вида

$$y(t) = A \sin(\omega t^2/2 + \varphi) \quad (2.111)$$

где A , ω и φ – неизвестные параметры. Ставится задача оценивания неизвестного параметра ω , то есть формирование такой оценки $\hat{\omega}(t)$, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{\omega}(t) - \omega| = 0. \quad (2.112)$$

Построение оценки $\hat{\omega}(t)$

Продифференцируем уравнение (2.111) трижды

$$\ddot{y} = \theta(3ty + t^2\dot{y})$$

или

$$p^3y = \theta(3ty + t^2py) \quad (2.113)$$

где p – оператор дифференцирования, $\theta = -\omega^2$ – неизвестный параметр.

Для оценки неизвестного параметра θ произведем параметризацию модели (2.113) следующим образом

$$p(p+1)^2y = (2p^2 + p)y + \theta(3ty + t^2py),$$

причем $t^2py = pt^2y - 2ty$. Запишем:

$$py = \frac{2p^2 + p}{(p+1)^2}y + \theta \frac{3}{(p+1)^2}ty + \theta \frac{p}{(p+1)^2}t^2y - \theta \frac{2}{(p+1)^2}ty \quad (2.114)$$

Введем следующие обозначения

$$\xi_1 = \frac{1}{(p+1)^2}y, \xi_2 = \frac{1}{(p+1)^2}ty, \xi_3 = \frac{1}{(p+1)^2}t^2y,$$

при подстановке которых выражение (2.114) примет вид

$$py = (2p^2 + p)\xi_1 + \theta\xi_2 + \theta\xi_3.$$

Тогда можно записать параметризованную модель вида

$$\dot{y} = 2\ddot{\xi}_1 + \dot{\xi}_1 + \theta\xi_2 + \theta\dot{\xi}_3 = 2\ddot{\xi}_1 + \dot{\xi}_1 + \theta(\xi_2 + \dot{\xi}_3) = \varsigma_1 + \theta\varsigma_2, \quad (2.115)$$

где $\varsigma_1 = 2\ddot{\xi}_1 + \dot{\xi}_1$ и $\varsigma_2 = \xi_2 + \dot{\xi}_3$ – измеряемые сигналы.

Теперь построим алгоритм идентификации параметра θ . Временно предположим, что параметр θ известен. Запишем алгоритм идентификации следующим образом

$$\dot{\hat{\theta}} = -k\zeta_2^2\hat{\theta} + k\zeta_2^2\theta, \quad (2.116)$$

где коэффициент $k > 0$.

Для доказательства работоспособности алгоритма (2.116) рассмотрим ошибку $\tilde{\theta} := \theta - \hat{\theta}$. Дифференцируя $\tilde{\theta}$, получаем

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}} = -k\zeta_2^2\tilde{\theta}.$$

Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V = \tilde{\theta}^2/2 \quad (2.117)$$

Дифференцируя (2.117), получаем

$$\dot{V} = -k\zeta_2^2\tilde{\theta}^2 = -k\zeta_2^2V \leq 0. \quad (2.118)$$

Из (2.118) следует устойчивость положения равновесия $\tilde{\theta} = 0$. Интегрируя (2.118), получаем

$$V(t) = V(t_0)e^{-k\alpha(t)},$$

где t_0 – начальный момент времени, $\alpha(t) = \int_{t_0}^t \zeta_2^2 d\tau$.

Легко видеть, что $\alpha(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, а, следовательно, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) = 0$.

Таким образом, алгоритм идентификации (2.116) обеспечивает сходимость настраиваемого параметра $\hat{\theta}(t)$ к θ . Теперь построим реализуемый алгоритм, в котором параметр θ не измеряется. Из уравнения (2.115) находим

$$\dot{y} - \varsigma_1 = \theta\varsigma_2. \quad (2.119)$$

Подставляя (2.119) в (2.116), имеем

$$\dot{\hat{\theta}} = -k\zeta_2^2\hat{\theta} + k\zeta_2\dot{y} - k\zeta_2\varsigma_1. \quad (2.120)$$

Поскольку переменная \dot{y} неизвестна, то введем рассмотрение новую переменную

$$\chi = \hat{\theta} - k_{\zeta_2} y \quad (2.121)$$

Дифференцируя (2.121), получаем реализацию алгоритма идентификации вида

$$\dot{\chi} = -k_{\zeta_2} \hat{\theta} - k_{\zeta_2} \dot{y} - k_{\zeta_2} \zeta_1, \quad (2.122)$$

$$\hat{\theta} = \chi + k_{\zeta_2} y. \quad (2.123)$$

Алгоритм идентификации (2.122), (2.123) обеспечивает сходимость $\hat{\theta}(t)$ к θ . Для поиска параметра ω достаточно провести следующую несложную процедуру $\hat{\omega} = \sqrt{|\hat{\theta}(t)|}$, где $\hat{\omega}$ – оценка частоты ω .

Иллюстративный пример

Рассмотрим сигнал вида (2.111) с параметрами $\omega = 0.5$, $A = 2$, $\varphi = 1$. На рисунке 2.45 представлена временная диаграмма сигнала $y(t)$.

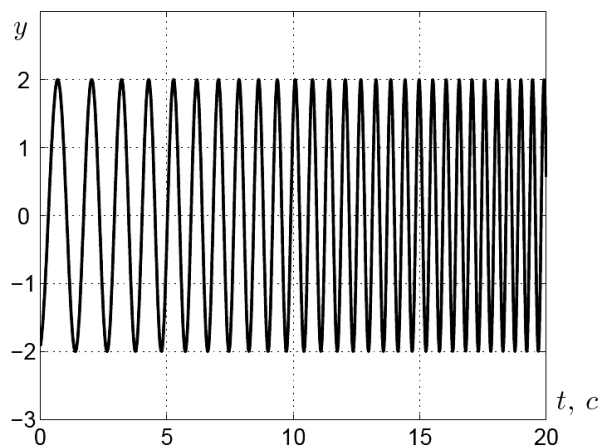


Рисунок 2.45. Временная диаграмма сигнала $y(t)$. По горизонтали: t , с, по вертикали: безразмерный сигнал $y(t)$.

На рисунках 2.46 и 2.47 представлены результаты моделирования алгоритма идентификации параметра ω с коэффициентами $k = 1$ и $k = 0.01$. На рисунках 2.48 и 2.49 представлены графики переходных процессов оценки $\hat{\omega}$ при коэффициентах алгоритма идентификации $k = 0.001$ и $k = 0.2$ для сигнала

$y(t)$ с параметрами $\omega = 2$, $A = 5$, $\varphi = -2$. Результаты численного моделирования иллюстрируют применимость предложенного алгоритма оценивания.

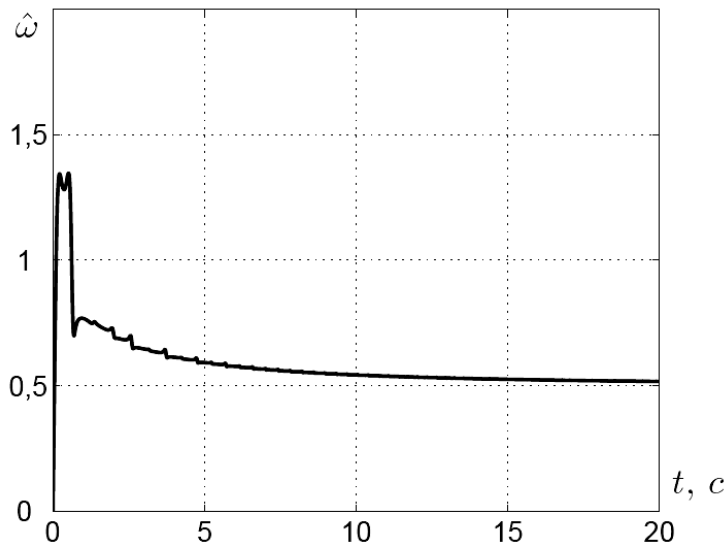


Рисунок 2.46. Переходные процессы для переменной $\hat{\omega}(t)$ при $\omega = 0.5$, $k = 1$.

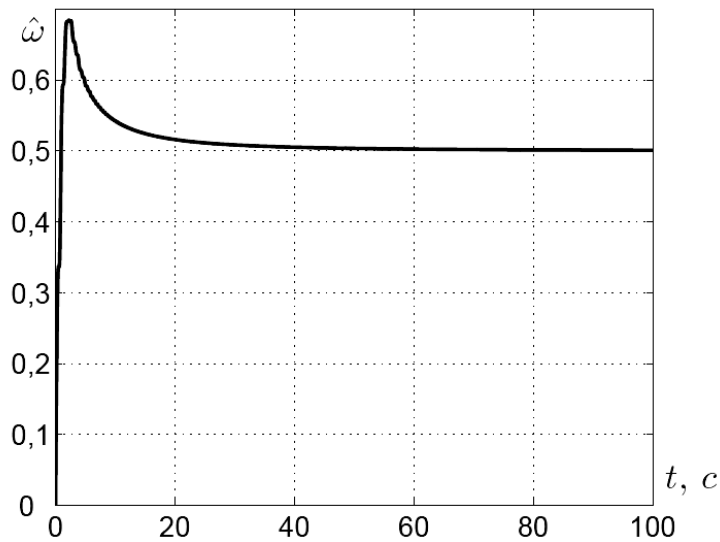


Рисунок 2.47. Переходные процессы для переменной $\hat{\omega}(t)$ при $\omega = 0.5$, $k = 0.01$.

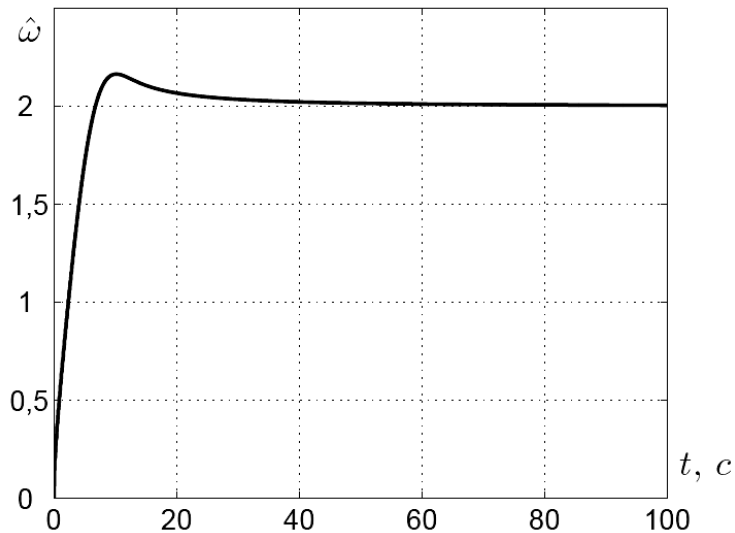


Рисунок 2.48. Переходные процессы для переменной $\hat{\omega}(t)$ при $\omega = 2, k = 0.001$.

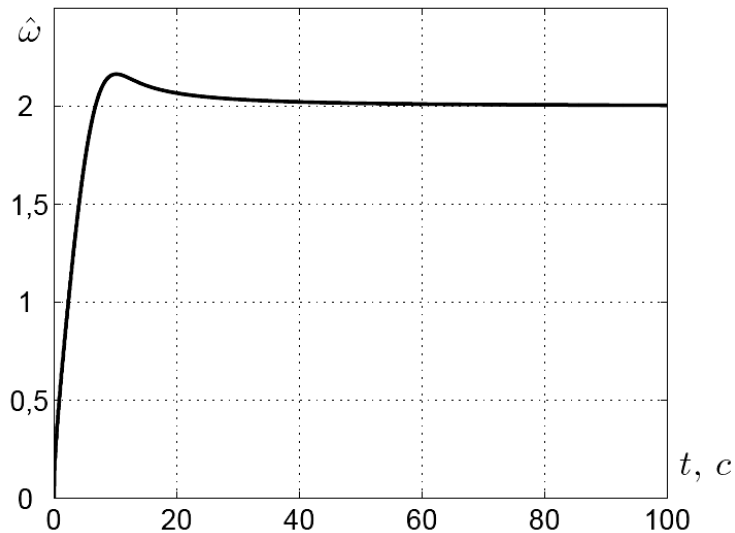


Рисунок 2.49. Переходные процессы для переменной $\hat{\omega}(t)$ при $\omega = 2, k = 0.2$.

2.5.2 Использование адаптивной каскадной фильтрации для повышения точности оценивания

Как было показано в разделе 2.2.4, при наличии в измерениях синусоидального сигнала ограниченных возмущений, оценка частоты так же будет ограничена. Однако, не смотря на ограниченность, в сигнале оценки могут возникнуть существенные колебания, что снизит точность идентификации. Для уменьшения влияния шумов и помех разработчику приходится варьировать настраиваемые коэффициенты алгоритмов, что, в свою очередь, так же ухудшает

точность или снижает быстродействие. Для устранения указанного недостатка предлагается каскадная схема идентификации с настраиваемыми полосно-пропускающими фильтрами для последовательного уточнения оценки частоты идентифицируемого сигнала. Отметим, что предложенная схема может быть использована для широкого класса алгоритмов оценивания.

Постановка задачи

Рассмотрим моносинусоидальный сигнал

$$y_0(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi),$$

где ω_0 , A и ϕ – неизвестные параметры, а именно частота, амплитуда и фаза. Также рассмотрим измеряемый сигнал

$$y(t) = y_0(t) + \delta(t), \quad (2.124)$$

где $\delta(t)$ – аддитивное возмущение, искажающее основной сигнал $y_0(t)$. Предполагается, что $\delta(t)$ ограничено и имеет широкий спектр, в отличие от сигнала $y_0(t)$. Далее, предположим, что известен (выбран) некоторый алгоритм идентификации $\hat{\omega}(t) = \mathcal{ID}[y(t)]$, заданный как

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= f(\xi(t), y(t)), \\ \hat{\omega}(t) &= g(\xi(t), y(t)), \end{aligned} \quad (2.125)$$

и предполагается, что этот алгоритм удовлетворяет следующим допущениям:

Д1 Система (2.125) устойчива и при ограниченном входном сигнале $y(t)$ вектор состояния $\xi(t)$ и выходной сигнал $\hat{\omega}(t)$ также ограничены.

Д2 Для неискажённого моносинусоидального сигнала оценка частоты асимптотически сходится к истинному значению, то есть для $\hat{\omega}(t) = \mathcal{ID}[y_0(t)]$ выполняется $\hat{\omega}(t) \rightarrow \omega_0$ при $t \rightarrow \infty$.

Д3 Для искажённого сигнала с ограниченным возмущением оценка частоты сходится в некоторую область $\Delta\omega$ истинного значения, то есть если $\hat{\omega}(t) = \mathcal{ID}[y(t)]$, то для любого $T > 0$ существует константа $\Delta\omega_T > 0$, такая что

$$|\hat{\omega}(t) - \omega_0| < \Delta\omega_T \quad \forall t > T,$$

и $\Delta\omega = \inf \Delta\omega_T$. Более того, предполагается, что меньшее в смысле сигнал-шум соотношения возмущение $\delta(t)$ приводит к меньшей области $\Delta\omega$.

Тогда целью настоящего подраздела является построение подхода, позволяющего уменьшить область $\Delta\omega$ для заданного измеряемого сигнала $y(t)$ и выбранного алгоритма идентификации (оценивания) \mathcal{ID} . Другими словами, требуется получить более точную оценку частоты $\hat{\omega}(t)$ чем непосредственное использование алгоритма $\mathcal{ID}[y(t)]$.

Каскад адаптивных фильтров

Основной идеей предложенного подхода является фильтрация измеряемого сигнала адаптивными полосовыми фильтрами, где каждый следующий фильтр настраивается по результатам оценки частоты выходного сигнала предыдущего фильтра с использованием алгоритма \mathcal{ID} . Реализация этой идеи приводит к построению каскада адаптивных фильтров.

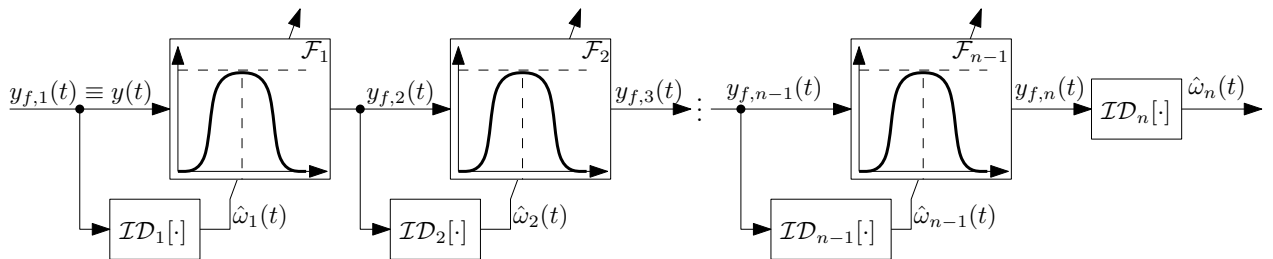


Рисунок 2.50. Каскад настраиваемых полосовых фильтров $\mathcal{F}_{1,\dots,n-1}$ и алгоритмов идентификации частоты $\mathcal{ID}_{1,\dots,n}$.

Структура предложенного каскада представлена на рисунке 2.50. Здесь блоки идентификации $\mathcal{ID}_{1,\dots,n}$ представляют собой реализации алгоритма

идентификации (2.125). В частности, если алгоритм идентификации \mathcal{ID} параметризован вектором настроечных коэффициентов κ , то i -ая реализация алгоритма \mathcal{ID} является реализацией с i -ым набором настроечных параметров, $\mathcal{ID}_i[y(t)] = \mathcal{ID}(\kappa_i)[y(t)]$. Блоки фильтрации $\mathcal{F}_{1,\dots,n-1}$ являются реализациями линейных настраиваемых полосовых фильтров, пример амплитудно-частотной характеристики таких фильтров представлен на рисунке 2.51. При этом i -ый фильтр имеет фиксированную полосу пропускания bw_i , но может быть сдвинут вдоль частотной оси, то есть средняя частота $\omega_{mid,i}$ является настроечным параметром, $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i(\omega_{mid,i})$. Для постоянного значения $\omega_{mid,i}$ фильтр \mathcal{F}_i представляет собой линейный стационарный полосовой фильтр, пропускающий синусоидальный сигнал с частотами, лежащими в диапазоне $[\omega_{l,i}, \omega_{r,i}]$, где

$$bw_i = \omega_{r,i} - \omega_{l,i}, \quad \omega_{mid,i} = \frac{\omega_{r,i} + \omega_{l,i}}{2},$$

и ослабляющий с частотами за пределами указанного диапазона. Тогда предложенный каскад может быть описан следующим образом:

$$\begin{aligned} y_{f,1}(t) &\equiv y(t), \\ \hat{\omega}_i(t) &= \mathcal{ID}_i[y_{f,i}(t)], \\ y_{f,i+1} &= \mathcal{F}_i[y_{f,i}(t)], \\ i &= 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{2.126}$$

где $\mathcal{F}_i[y(t)]$ обозначает выход фильтра \mathcal{F}_i , на вход которого подан сигнал $y(t)$.

Логика работы предложенного каскада такова. В начале, измеряемый сигнал $y(t)$ подаётся на вход блока идентификации \mathcal{ID}_1 , который формирует оценку $\hat{\omega}_1(t)$ лежащую в $\Delta\omega_1$ окрестности истинного значения ω_0 . Оценка частоты $\hat{\omega}_1(t)$ далее используется для настройки полосового фильтра \mathcal{F}_1 , на вход которого подаётся сигнал $y(t)$. Так как предполагается, что полоса пропускания bw_1 достаточно широка, то есть, например $2\Delta\omega_1$, то моносинусоидальный сигнал $y_0(t)$ проходит через фильтр \mathcal{F}_1 и выходной сигнал $y_{f,2}(t)$ имеет лучшее соотношение сигнал-шум, чем $y(t)$. Следовательно, при допущении ДЗ,

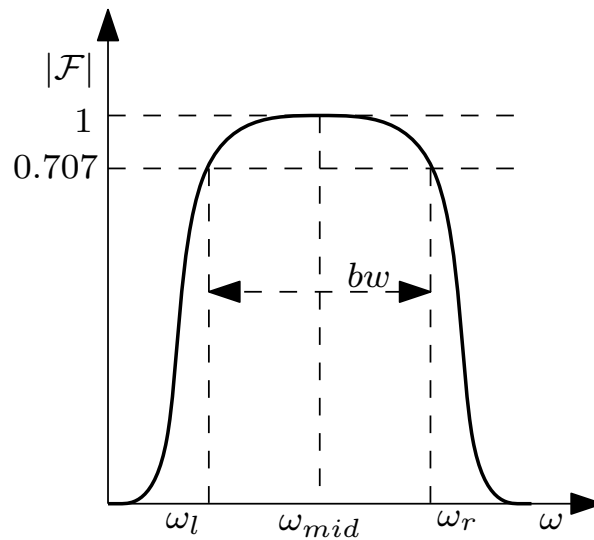


Рисунок 2.51. Амплитудно-частотная характеристика фильтра \mathcal{F} .

оценка частоты $\hat{\omega}_2(t)$ лежит в более узком диапазоне (в меньшей окрестности) истинного значения ω_0 , $\Delta\omega_2 < \Delta\omega_1$. Полоса пропускания bw_2 может быть выбрана меньше полосы пропускания bw_1 , и сигнал $y_{f,3}(t)$ будет иметь лучшее соотношение сигнал-шум, чем $y_{f,2}(t)$. Последовательно применяя эти аргументы, получим $\Delta\omega_{i+1} < \Delta\omega_i$, то есть каждая следующая оценка частоты будет более точной, нежели предыдущая.

Построение фильтров и устойчивость каскада

При допущении Д1 устойчивость предложенного каскада основывается на устойчивости отдельных фильтров \mathcal{F} . Точнее, так как входной сигнал $y(t)$ ограничен, и все блоки идентификации \mathcal{ID}_i устойчивы, то для устойчивости предложенного каскада достаточно обеспечить, чтобы все линейные нестационарные фильтры были устойчивы, а их выходные сигналы были ограничены. Ниже рассмотрим одну из возможных реализаций полосового фильтра \mathcal{F} и проанализируем устойчивость предложенной реализации.

Одним из возможных способов реализации настраиваемого фильтра \mathcal{F} размерности $2m$ является использование модели низкочастотного фильтра размерности m , например фильтра Баттерворта. Пусть устойчивый линейный

стационарный фильтр низких частот размерности m с полосой пропускания bw задан как

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= A_0 x_1(t) + B_0 u(t), \\ h_0(t) &= C_0^\top x_1(t),\end{aligned}$$

где $x_1(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор состояний, $u(t) \in \mathbb{R}$ – входной сигнал, $h_0(t) \in \mathbb{R}$ – выходной (фильтрованный) сигнал, $A_0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B_0 \in \mathbb{R}^m$ и $C_0 \in \mathbb{R}^m$ – известные постоянные матрицы, причём A_0 – Гурвицева. Тогда линейный нестационарный полосовой фильтр размерности $2m$ с полосой пропускания bw и с настраиваемой средней частотой $\omega_{mid}(t)$ может быть получен как

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + Bu(t), \\ h(t) &= C^\top x(t),\end{aligned}\tag{2.127}$$

где $x(t) = [x_1^\top(t), x_2^\top(t)]^\top$, $x(t) \in \mathbb{R}^{2m}$ – вектор состояний, $h(t) \in \mathbb{R}$ – выходной (фильтрованный) сигнал, и матрицы $A(t)$, B и C заданы как

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_0 & \mathcal{I} \omega_c(t) \\ -\mathcal{I} \omega_c(t) & 0_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_0 \\ 0_m \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_0 \\ 0_m \end{bmatrix},\tag{2.128}$$

где \mathcal{I} – единичная матрица, $\omega_c(t) \in \mathbb{R}$ – настроечный сигнал, а именно центральная частота, заданная как

$$\omega_c(t) = \sqrt{\omega_l(t)\omega_r(t)} = \frac{\sqrt{4\omega_{mid}^2(t) - bw^2}}{2}.\tag{2.129}$$

Отметим, что для того, чтобы система (2.127) действительно представляла собой полосовой фильтр, требуется обеспечить $\omega_c(t) > 0$, то есть $\omega_{mid}(t) > \frac{bw}{2}$. В дальнейшем будем полагать, что $\omega_c(t) \geq \omega_{c,min} > 0$, где $\omega_{c,min}$ может быть выбрана сколь угодно малой. Устойчивость предложенного линейного нестационарного фильтра сформулирована в следующем утверждении.

Утверждение 2.10. Пусть сигнал

$$0 < \omega_{c,min} \leq \omega_c(t)\tag{2.130}$$

ограничен. Тогда система (2.127) экспоненциально устойчива и для любого ограниченного входного сигнала $u(t)$ выходной сигнал $h(t)$ также ограничен.

Доказательство. Система (2.127) является линейной нестационарной системой с постоянными матрицами входа B и выхода C . Тогда, в соответствии с фундаментальным решением для линейных систем ([9]), устойчивость вход-выход непосредственно следует из экспоненциальной устойчивости соответствующей автономной системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \quad (2.131)$$

Покажем, что автономная система (2.131) экспоненциально устойчива.

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(x) = x^\top P x$$

и выберем

$$P = \begin{bmatrix} P_0 & -\alpha \mathcal{I} \\ -\alpha \mathcal{I} & P_0 \end{bmatrix}, \quad (2.132)$$

где матрица $P_0 > 0$ такова, что $A_0^\top P_0 + P_0 A_0 =: -Q < 0$ и $\alpha > 0$ – константа, которая будет определена далее. Отметим, что матрица P положительно определена для всех положительных α , таких что

$$\alpha < \alpha_1 := \min_i \lambda_i \{P_0\},$$

где $\lambda_i \{P_0\}$ – i -ое собственное число матрицы P_0 .

Производная по времени функции $V(x)$ с учётом (2.131) может быть найдена как

$$\dot{V}(t) = -x^\top(t)R(t)x(t),$$

где

$$R(t) := -(A^\top(t)P + PA(t)).$$

Тогда для доказательства экспоненциальной устойчивости будет достаточно показать, что $R(t) > 0$ для всех t . Действительно, из положительной

определённости $R(t)$ следует, что $R(t) \geq \rho_0 \mathcal{I}$ для некоторой константы $\rho_0 > 0$. Тогда существует некоторая константа $\gamma_0 > 0$ зависящая от α и ρ_0 , такая что $\dot{V}(t) \leq -\gamma_0 V(t)$, откуда и следует экспоненциальная устойчивость автономной системы (2.131).

Из (2.128) и (2.132) получим

$$R(t) = \begin{bmatrix} Q - 2\alpha\omega_c(t)\mathcal{I} & \alpha A_0^\top \\ \alpha A_0 & 2\alpha\omega_c(t)\mathcal{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1(t) & R_2 \\ R_2^\top & R_3(t) \end{bmatrix}. \quad (2.133)$$

Так как $R_3(t) > 0$, то матрица $R(t)$ будет положительно определённой тогда и только тогда, когда дополнение Шура для $R_3(t)$, заданное как

$$S_R(t) := R_1(t) - R_2 R_3^{-1}(t) R_2^\top,$$

будет положительно определено [96]. Из выражения (2.133) запишем

$$S_R = Q - \alpha \left(2\omega_c(t)\mathcal{I} + \frac{1}{2\omega_c(t)} A_0 A_0^\top \right).$$

Обозначим минимальное собственное число матрицы Q как λ_1 , а максимальное собственное число матрицы $A_0 A_0^\top$ как λ_2 . Тогда $S_R > 0$ если

$$\alpha f(\omega_c) < \lambda_1, \quad f(\omega_c) := 2\omega_c(t) + \frac{\lambda_2}{2\omega_c(t)}.$$

Так как $\omega_c(t)$ больше нуля и ограничена, то функция $f(\omega_c)$ также положительна и ограничена. Обозначим $\alpha_2 := \lambda_1 / f_{max}$. Тогда для всех ограниченных $\omega_c(t)$, удовлетворяющих неравенству (2.130), существует $\alpha < \min(\alpha_1, \alpha_2)$, такое что $V(x)$ будет положительно определённой функцией, и $R(t)$ заданная как (2.133) также будет положительно определена. Следовательно, используя стандартные аргументы анализа с помощью функций Ляпунова, система (2.131) экспоненциально устойчива. \square

Из Утверждения 2.10 следует устойчивость каскада (2.126), состоящего из фильтров (2.127)-(2.129) алгоритмов идентификации, удовлетворяющих допущениям Д1, Д3. Отметим, что алгоритмы оценивания (2.20), (2.32),

(2.41) или (2.55), предложенные в разделе 2.2, очевидно удовлетворяют всем допущениям Д1, Д2, Д3.

Численное моделирование

В качестве примера рассматривается проблема идентификации частоты сигнала

$$y(t) = \sin(20\pi t + \frac{\pi}{3}) + \delta(t),$$

где $\delta(t)$ – случайный равномерно распределенный ограниченный сигнал с нулевым средним значением. Каскад состоит из трёх идентификаторов \mathcal{ID}_i , $i = 1, 2, 3$, и двух полосовых фильтров. В качестве фильтров выбраны фильтры Баттерворта 6-го порядка.

Для наглядности, исследуем работоспособность предложенного каскада с использованием в качестве идентификационных блоков реализации трёх алгоритмов идентификации, а именно алгоритма (2.41) и алгоритмов, описанных в работах [71,97]. При этом были выбраны следующие значения параметров: для адаптивного алгоритма (2.41) $\alpha = 10$, $k = 10^4$ и нулевые начальные условия на интеграторах; для алгоритма [97] $K_s = 1$, $\lambda = 1$, $Q_0 = (1/\lambda)I$, $\hat{\theta}_0 = \begin{bmatrix} 64 & 64 \end{bmatrix}^T$; для алгоритма идентификации [71] $(x_1, x_2, \theta) = (1, 1, 11)$, $\zeta = 0.25$, $\gamma = 0.01$. Для численного моделирования были использованы следующие значения параметров адаптивных фильтров: $b_{\omega,1} = 6 \cdot 2\pi$, $b_{\omega,2} = 1 \cdot 2\pi$. Результаты численного моделирования, а именно ω – действительное значение частоты, $\hat{\omega}_1(t)$, $\hat{\omega}_2(t)$ и $\hat{\omega}_3(t)$ – оценки частот полученные на выходе блоков \mathcal{ID}_1 , \mathcal{ID}_2 , \mathcal{ID}_3 соответственно, представлены на рисунке 2.52 для алгоритма (2.41), на рисунке 2.53 для алгоритма [97], и на рисунке 2.54 для алгоритма [71].

Отдельные количественные оценки этих результатов приведены в Таблице 2.1. Для ошибок идентификации $\tilde{\omega}_{1,2,3}(t)$ и каждого из рассматриваемых алгоритмов идентификации оцениваются две количественные характеристики: математическое ожидание E и дисперсия V , при этом желаемое значение

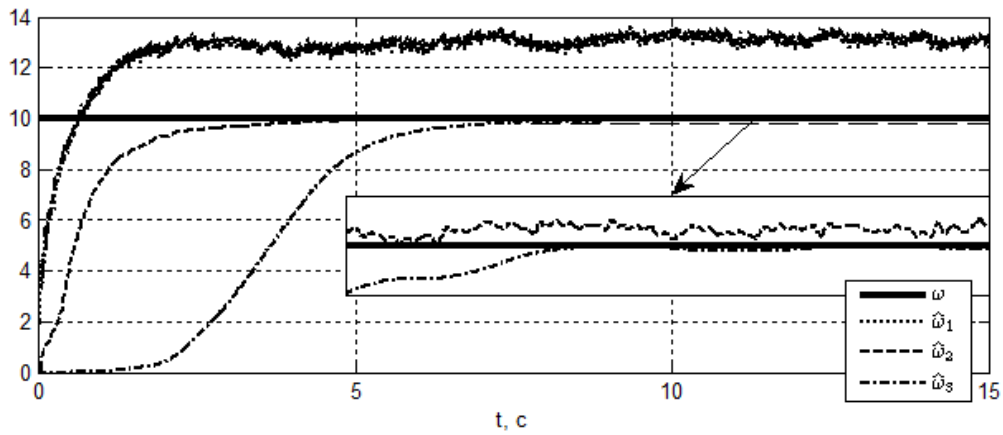


Рисунок 2.52. Результаты численного моделирования алгоритма оценивания (2.41).

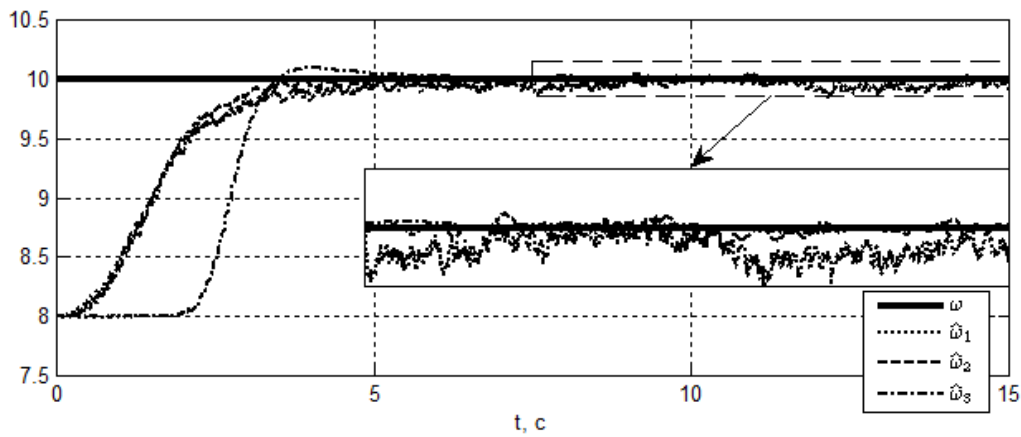


Рисунок 2.53. Результаты численного моделирования алгоритма оценивания [97].

математического ожидания ошибки идентификации $E = 0$. Полученные результаты показывают, что в случае зашумлённого входного сигнала каскад адаптивных фильтров может значительно улучшить качество идентификации, уменьшить отклонение и дисперсию установившейся ошибки.

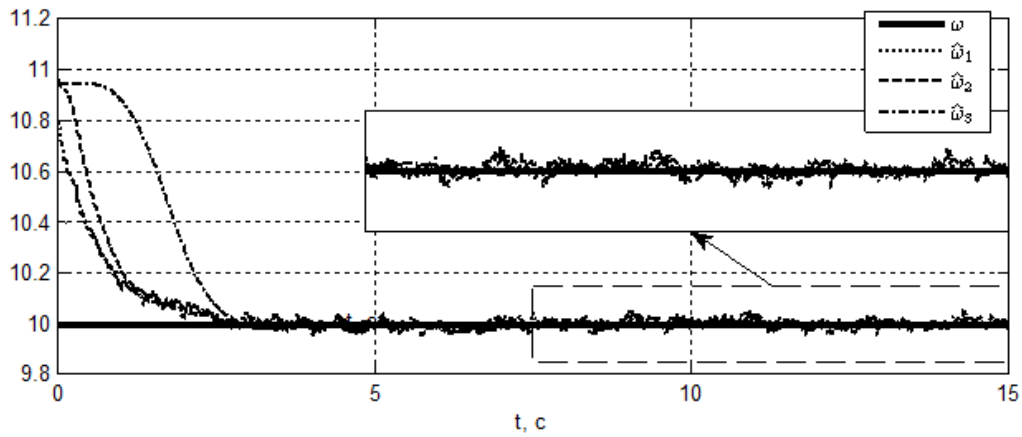


Рисунок 2.54. Результаты численного моделирования алгоритма оценивания [71].

		$\tilde{\omega}_1(t)$	$\tilde{\omega}_2(t)$	$\tilde{\omega}_3(t)$
Алгоритм (2.41)	$E, \text{Гц}$	3,11	0,05	0,03
	$V, \text{Гц}^2$	0,02	0,01	0,01
Алгоритм [97]	$E, \text{Гц}$	0,53	0,04	0,02
	$V, \text{Гц}^2$	1,04	0,14	0,05
Алгоритм [71]	$E, \text{Гц}$	0,04	0,01	0,01
	$V, \text{Гц}^2$	2,38	1,35	0,48

Таблица 2.1: Влияние адаптивной каскадной фильтрации на качество оценивания

2.6 Выводы по главе

В настоящей главе было рассмотрено решение Задачи 1, сформулированной в разделе 1.2. Показано, что с учётом сформулированных в главе 1 допущений, поставленная задача может быть представлена как задача оценивания состояний генератора мультисинусоидального возмущения вида (2.6), действующих на объект вида (2.1). Для решения Задачи 1 были предложены адаптивные

наблюдатели неизмеряемых сигналов, основанные на идентификационных подходах. Соответственно, решение задачи было разбито на несколько этапов.

На первом этапе предполагалось, что сигнал возмущения доступен прямому измерению, и были предложены методы определения параметров генератора возмущения, а именно частот мультисинусоидального сигнала, или же ассоциированного с частотами вектора параметров θ , смотри Замечание 2.1. В разделе 2.2 последовательно изложены методы оценивания параметров, начиная от случая моносинусоидального несмещенного сигнала (подраздел 2.2.2), и вплоть до обобщённого случая смещённого мультисинусоидального сигнала (подраздел 2.2.5 с учётом замечания 2.6). Так же в подразделе 2.2.4 рассмотрен вопрос чувствительности предложенных алгоритмов при наличии ограниченного возмущения (шума измерений). Показано, что в этом случае предложенные алгоритмы обеспечивают ограниченность оценок параметров.

На втором этапе на основе полученных методов идентификации параметров были построены адаптивные наблюдатели, позволяющие оценивать вектор состояний генератора неизмеряемых мультисинусоидальных воздействий. Были предложены адаптивные наблюдатели для двух случаев: нелинейный объект с измеряемым вектором состояний, и линейный объект при измерении только выходного сигнала, но не всего вектора состояний. Этот результат так же расширен на случай гладкой нелинейной обратной связи по выходу, смотри Замечание 2.7. Предложенные адаптивные наблюдатели обеспечивают асимптотическую сходимость ошибок оценивания к нулю.

В разделе 2.4 на основе полученных адаптивных наблюдателей были построены алгоритмы компенсации синусоидальных воздействий. По аналогии с разделом 2.3 были рассмотрены два случая нелинейный объект с измеряемым вектором состояний, и линейный объект при измерении только выходного сигнала. Для случая нелинейного объекта рассматривалась задача компенсации возмущения, приложенного аддитивно ко входу объекта. Для линейного объекта была предложена обобщённая схема компенсации возмущения, основанная на

параметризации Юлы-Кучеры. Предложенная схема позволяет компенсировать мультисинусоидальное возмущение и обеспечить при этом неизменность номинальной передаточной функции от задания к выходу объекта. Так же для линейного объекта рассмотрены алгоритмы расчёта параметров компенсатора при различных способах параметризации возмущения.

В разделе 2.5 предложены методы повышения точности оценивания параметров синусоидальных сигналов. В подразделе 2.5.1 рассмотрен случай линейно меняющейся частоты, а в подразделе 2.5.2 предложена схема адаптивной каскадной фильтрации, позволяющая существенно повысить точность оценивания при наличии шумов измерений. Показано, что такая схема может быть использована для улучшения оценок не только для предложенных в работе алгоритмов оценивания, но и для ряда аналогов.

Таким образом, в главе было предложено решение Задачи 1, а так же была показана применимость полученных результатов для компенсации мультисинусоидальных воздействий.

Глава 3

КОМПЕНСАЦИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ПОДАВЛЕНИЯ ВИБРАЦИЙ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В Главе 2 было рассмотрено решение Задачи 1, а также было показано, что эта задача может быть представлена как проблема оценивания неизмеряемого мультисинусоидального возмущения, действующего на некоторый объект. Соответственно, на основе предложенных методов оценивания могут быть построены алгоритмы компенсации таких возмущений, представленные в разделе 2.4. Изложенные в Главе 2 результаты послужили основой и были расширены для решения задачи компенсации детерминированных возмущений в электромеханических системах.

Задача подавления синусоидальных возмущений находит широкое применение в различных областях промышленности. Для иллюстрации этого тезиса достаточно обратиться к обзорной статье [98], в которой, среди прочего, указаны: управление химическим реактором, системы виброзащиты, приводы оптических дисков, подавление шумов в акустических трактах. Рассматриваемая задача привлекает внимание и научного сообщества, разрабатываются и совершенствуются методы подавления синусоидальных возмущений, организуются специальные секции международных конференций, посвященные указанной проблематике.

Как правило, возмущения разделяют на широкополосные и узкополосные. Под узкополосными возмущениями понимаются возмущения, в частотном спектре которых можно выделить несколько ярко выраженных доминирующих пиков, такие возмущения можно с высокой точностью представить как сумму конечного числа синусоидальных компонент с постоянными, но неизвестными частотами. Для широкополосного же возмущения характерен

протяженный спектр сигнала, без ярко выраженных доминант, такие сигналы нельзя с приемлемой точностью представить как сумму конечного числа синусоид. Различаются, соответственно, и подходы к компенсации возмущений. Для подавления широкополосных возмущений часто используются методы робастного управления и H_∞ -синтеза, — за счет выбора регулятора формируется функция чувствительности замкнутой системы, ослабляющая действие возмущения в заданном диапазоне частот [99, 100]. Такой подход обычно приводит к линейным регуляторам высокой размерности.

Для подавления узкополосного возмущения применяют адаптивные методы [11, 101], параметры регулятора в процессе функционирования системы подстраиваются под модель возмущения (суммы синусоидальных компонент), обеспечивая его подавление за счет принципа внутренней модели [64, 102]. Очевидно, что методы, предложенные в Главе 2, относятся именно к этому классу.

Адаптивные методы, в свою очередь, могут быть разделены на прямые и непрямые. Непрямые методы основаны на идентификации параметров возмущения и их использовании для расчета параметров регулятора. На основе доступных для измерения сигналов формируется алгоритм идентификации, оценивающий параметры возмущения, в качестве таких параметров могут выступать либо непосредственно частоты синусоидальных компонент, либо параметры линейной детерминированной системы, генерирующей возмущение. Далее предполагается, что если параметры возмущения известны (идентифицированы), то можно построить фиксированный регулятор, обеспечивающий компенсацию возмущения.

При прямой адаптации идентификация возмущения в явном виде не производится, вместо этого регулятор фиксированной структуры параметризуется некоторым набором неизвестных параметров. Далее на основе доступных измерению сигналов формируется критерий качества, например,

величина остаточных колебаний, и параметры регулятора подстраиваются так, чтобы уменьшить выбранный критерий.

Представленные в разделе 2.4 методы компенсации включают в себя явное оценивание параметров возмущения (частот), и с этой точки зрения они относятся к непрямым адаптивным методам. Полученный в результате развития этих методов и представленный в настоящей главе метод компенсации детерминированных возмущений не включает в себя явное оценивание параметров возмущения (частот), но вместо этого оценивает непосредственно параметры регулятора. С этой точки зрения предложенный метод является прямым адаптивным методом компенсации. Отметим, однако, что как и методы, представленные в главе 2, рассматриваемый в настоящей главе подход основан на методах идентификации и построения устройства оценки (наблюдателя). А именно, в рамках предложенного подхода строится оценка возмущения как линейной комбинации искусственно сформированных (инструментальных) сигналов, причём параметры такого линейного разложения, они же параметры наблюдателя (и они же параметры регулятора, обеспечивающего компенсацию), находятся как решение задачи идентификации.

Представленный в настоящей главе метод был успешно применён в ходе международных стендовых испытаний по компенсации вибраций, описанных в работе [103] и организованных в лаборатории GIPSA Lab, г. Гренобль, Франция, под руководством проф. И. Д. Ландо. Полученные результаты были опубликованы в работах [30, 56, 57].

Изложенные в Главе 2 подходы сформулированы в непрерывном времени. Однако, для построения аппаратной реализации алгоритмов компенсации и проведения экспериментов часто приходится представлять разработанные алгоритмы в дискретном времени. Так как представленные в настоящей главе результаты были получены и использованы для участия в стендовых испытаниях, то они изложены именно в форме дискретных систем.

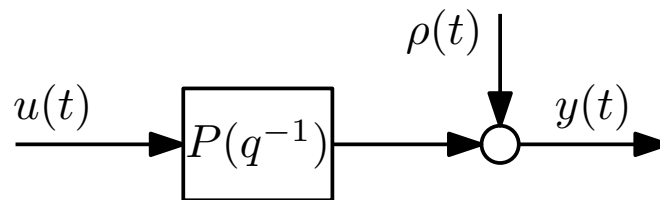


Рисунок 3.1. Структурная схема рассматриваемого объекта управления (3.1) .

Настоящая глава состоит из пяти разделов. В разделе 3.1 приводится формулировка задачи, в разделе 3.2 строится номинальный закон управления, а в разделе 3.3 предложен алгоритм адаптации и проанализирована устойчивость замкнутой системы. Результаты численного моделирования и экспериментальных стендовых испытаний приведены в разделе 3.4, а выводы по главе – в разделе 3.5.

3.1 Постановка задачи

Будем рассматривать линейный устойчивый объект управления, заданный в дискретном времени

$$y(t) = P(q^{-1})u(t) + \rho(t), \quad (3.1)$$

где $y(t)$ – измеряемый выходной сигнал системы; $u(t)$ – входной (управляющий) сигнал; $\rho(t)$ – неизмеряемое возмущение, приложенное к выходу объекта; $P(z) = B(z)/A(z)$ – передаточная функция объекта управления с известными полиномами $B(z)$ и $A(z)$; z – комплексная переменная; q^{-1} – оператор сдвига [104]: $q^{-1}y(t) = y(t-1)$, где $y(t-1) = y(T(m-1))$; $t = T \cdot m$ – дискретные моменты времени; T – интервал дискретизации; m – целое неотрицательное число. Структурная схема объекта управления (3.1) представлена на рисунке 3.1.

Допущение 3.1. *Передаточная функция $P(z)$ является дробно-рациональной, устойчивой, и имеет положительную относительную степень.*

При этом допускается, что полином числителя $B(z)$ может неустойчивые иметь корни. Полиномы $B(z)$, $A(z)$ являются взаимно-простыми.

Допущение 3.2. Возмущение $\rho(t)$ представляет собой сумму конечного числа синусоидальных функций различных частот

$$\rho(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (3.2)$$

где A_i , ω_i , φ_i — неизвестные амплитуда, частота и фаза соответственно i -ой компоненты сигнала; точное число синусоидальных компонент N , образующих возмущение, неизвестно, но установлена верхняя оценка их количества $N \leq N_{max}$; частоты гармоник ограничены $\omega_{min} \leq \omega_i \leq \omega_{max}$.

Ставится задача формирования такого закона управления $u(t) = U(y(t))$, который обеспечивает асимптотическую компенсацию возмущения $\rho(t)$, то есть выполняется $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

3.2 Номинальный закон управления

3.2.1 Формирование оценки возмущения

Замечание 3.1. Так как объект $P(z)$ полагается известным, то модель объекта $\hat{P}(z)$ известна и выполняется $\hat{P}(z) \equiv P(z)$. Тем не менее, далее мы будем разделять сам объект $P(z)$ и его модель $\hat{P}(z)$, являющуюся частью регулятора.

В соответствии с Замечанием 3.1 оценка возмущения $\hat{\rho}(t)$ может быть сформирована в соответствии со схемой, представленной на рисунке 3.2

$$\hat{\rho}(t) = y(t) - \hat{P}(q^{-1})u(t) = \rho(t) + \varepsilon_\rho(t), \quad (3.3)$$

где $\varepsilon_\rho(t)$ — экспоненциально затухающий член, вызванный рассогласованием начальных условий сигналов $\rho(0)$ и $\hat{\rho}(0)$. Так как объект управления $P(z)$

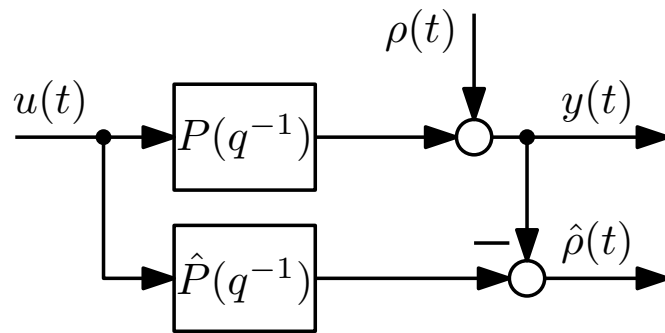


Рисунок 3.2. Наблюдатель возмущения (3.3) .

и его модель $\hat{P}(z)$ устойчивы, то все связанные с начальными условиями составляющие асимптотически затухают. Тогда в установившемся режиме членом $\varepsilon_\rho(t)$ можно пренебречь, $\hat{\rho}(t) \rightarrow \rho(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Выражение (3.3) переписать в виде

$$\hat{\rho}(t) = \rho(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i). \quad (3.4)$$

3.2.2 Формирование номинального закона управления

Выход системы $y(t)$ и выход модели $\hat{P}(q^{-1})u(t)$ являются измеряемыми сигналами, поэтому оценка возмущения (3.4) также является измеряемой. В соответствии с целью управления необходимо обеспечить $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Очевидным решением задачи компенсации будет закон управления $u_i(t)$, полученный из (3.3):

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) + \hat{P}(q^{-1})u(t) &= 0, \\ u_i(t) &= -\left(\hat{P}(q^{-1})\right)^{-1}\hat{\rho}(t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Структурная схема замкнутой системы управления, включающей в себя объект управления (3.1) и закон управления (3.5), представлена на рисунке 3.3.

Идеальный закон управления (3.5) построен на инверсии передаточной функции $P(z)$, которую нельзя в явном виде реализовать на практике по следующим причинам:

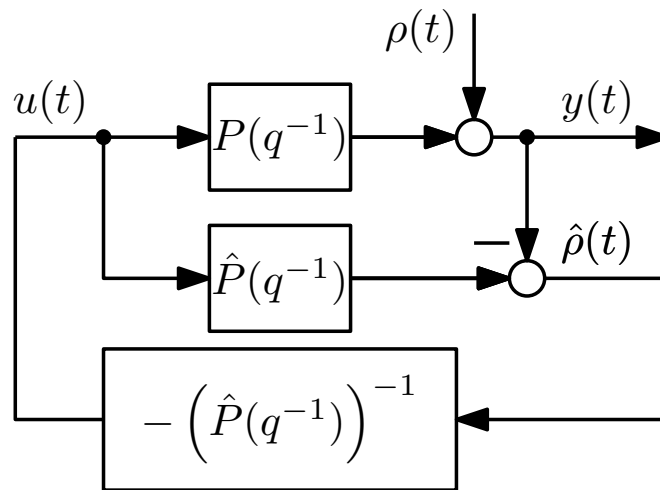


Рисунок 3.3. Структурная схема реализации идеального закона управления (3.5)

- в соответствии с поставленной задачей передаточная функция $P(z)$ может содержать неустойчивые нули;
- в Допущении 3.1 отмечено, что относительная степень передаточной функции $P(z)$ положительная, то есть старшая степень полинома знаменателя $A(z)$ больше, чем старшая степень полинома числителя $B(z)$. Соответственно, обратная передаточная функция является физической нереализуемой.

Для построения закона управления, компенсирующего возмущение и не требующего явного обращения передаточной функции объекта, будет использована идея о декомпозиции мультисинусоидального возмущения (3.2)¹, которая заключается в следующем:

- доступны (сформированы) опорные сигналы $\bar{x}(t)$, представляющие собой суммы синусоидальных компонент тех же частот, что и возмущение $\rho(t)$;

¹Здесь и далее по тексту везде, где идет речь о декомпозиции возмущения, учитывая (3.4), в формулы будет подставляться оценка возмущения $\hat{\rho}(t)$, являющаяся измеряемым сигналом, в отличие от $\rho(t)$.

- возмущение записывается в виде линейной комбинации сигналов $\mathbf{x}(t)$, представляющих собой пропущенные через модель объекта $\hat{P}(z)$ опорные сигналы $\bar{\mathbf{x}}(t)$;
- номинальный закон управления $u_0(t)$ формируется в виде линейной комбинации опорных сигналов $\bar{\mathbf{x}}(t)$.

Декомпозиция возмущения

Лемма 3.1. Пусть в системе имеется набор из $2N_{max}$ измеряемых синусоидальных сигналов $\bar{\mathbf{x}}(t) = \{\bar{x}_j(t)\}$, $j = 1, \dots, 2N_{max}$ тех же частот, что и возмущение $\rho(t)$

$$\bar{x}_j(t) = \sum_{i=1}^N B_{i,j} \sin(\omega_i t + \psi_{i,j}) = \sum_{i=1}^N B_{i,j}^s \sin(\omega_i t) + B_{i,j}^c \cos(\omega_i t), \quad (3.6)$$

где $B_{i,j}^s = B_{i,j} \cos(\psi_{i,j})$ и $B_{i,j}^c = B_{i,j} \sin(\psi_{i,j})$ – постоянные коэффициенты, полученные в результате тригонометрических преобразований. Пусть параметры $B_{i,j}^s$ и $B_{i,j}^c$ таковы, что $2N \times 2N_{max}$ матрица

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} B_{1,1}^s & B_{1,2}^s & \cdots & B_{1,2N_{max}}^s \\ B_{1,1}^c & B_{1,2}^c & \cdots & B_{1,2N_{max}}^c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N,1}^c & B_{N,2}^c & \cdots & B_{N,2N_{max}}^c \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

имеет полный ранг. Тогда существует вектор коэффициентов $\bar{\mathbf{k}}$ такой, что для сигналов (3.4) и (3.6) существует линейная комбинация вида

$$\hat{\rho}(t) = \bar{\mathbf{k}}^T \cdot \bar{\mathbf{x}}(t) = \sum_{j=1}^{2N_{max}} \bar{k}_j \bar{x}_j(t). \quad (3.8)$$

Если же $N = N_{max}$, то этот вектор единственный.

Доказательство. Возмущение (3.4), представленное конечной суммой синусоидальных сигналов, может быть приведено к виду

$$\hat{\rho}(t) = \rho(t) = \sum_{i=1}^N A_i^s \sin(\omega_i t) + A_i^c \cos(\omega_i t),$$

где $A_i^s = A_i \cos(\varphi_i)$ и $A_i^c = A_i \sin(\varphi_i)$. Тогда выражение (3.8) представимо в векторно-матричной форме

$$\begin{aligned}\Upsilon &= \mathbf{X}\mathbf{K}, \\ \Upsilon &= \begin{bmatrix} A_1^s & A_1^c & A_2^s & A_2^c & \cdots & A_N^s & A_N^c \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & \bar{k}_2 & \cdots & \bar{k}_{2N_{max}} \end{bmatrix}^T.\end{aligned}$$

Размерность вектора Υ равна $2N \times 1$, а вектора $\mathbf{K} - 2N_{max} \times 1$. Учитывая, что ранг матрицы (3.7) равен $2N$, окажется, что $\text{rank}([\mathbf{X} \ \Upsilon]) = 2N$. Тогда лемма 3.1 является следствием из теоремы Кронекера–Капелли [105]. \square

Сформируем $2N_{max}$ сигналов $\mathbf{x}(t) = \{x_j(t)\}$, $j = 1, \dots, 2N_{max}$, вида

$$x_j(t) = \hat{P}(q^{-1}) \bar{x}_j(t). \quad (3.9)$$

Лемма 3.2. Если сигналы $\bar{\mathbf{x}}(t)$ таковы, что выполняются условия Леммы 3.1, и амплитудно-частотная характеристика $L(\omega_i)$ модели объекта $\hat{P}(z)$ на всех частотах ω_i , $i = 1, \dots, N$ удовлетворяет неравенству

$$0 < L(\omega_i) < \infty, \quad (3.10)$$

то для сигналов $x_j(t)$, определяемых выражением (3.9), существует такой вектор \mathbf{k} , что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\hat{\rho}(t) - \sum_{j=1}^{2N_{max}} k_j x_j(t) \right) = 0, \quad (3.11)$$

или, иными словами, возмущение представимо в виде линейной комбинации

$$\hat{\rho}(t) = \mathbf{k}^T \cdot \mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^{2N_{max}} k_j x_j(t). \quad (3.12)$$

Доказательство. Обозначим матрицу (3.7), полученную для сигналов $\bar{\mathbf{x}}(t)$, как \mathbf{X}_1 . Сформируем аналогичную матрицу для сигналов $\mathbf{x}(t)$ и обозначим ее как \mathbf{X}_2 . Для конкретной частоты ω_i величина $L(\omega_i)$ представляет собой модуль частотной передаточной функции (дискретной) $|\hat{P}(e^{i\omega_i T})|$,

равный, в соответствии с (3.9), отношению амплитуды выходного сигнала $x(t)$ к амплитуде входного сигнала $\bar{x}(t)$. Тогда, если выполняется неравенство (3.10), то матрицы X_1 и X_2 оказываются подобными и, как следствие, $\text{rank}(X_2) = \text{rank}(X_1)$ и декомпозиция (3.12) удовлетворяет Лемме 3.1. \square

Синтез номинального закона управления

Получим номинальный закон управления, основываясь на идеальном законе управления (3.5), декомпозиции возмущения (3.12) и сигналах (3.9):

$$\begin{aligned} u_0(t) &= - \left(\hat{P}(q^{-1}) \right)^{-1} \hat{\rho}(t) = \\ &= - \left(\hat{P}(q^{-1}) \right)^{-1} \sum_{j=1}^{2N_{max}} k_j x_j(t) = \\ &= - \left(\hat{P}(q^{-1}) \right)^{-1} \sum_{j=1}^{2N_{max}} k_j \left(\hat{P}(q^{-1}) \bar{x}_j(t) \right). \end{aligned}$$

Тогда номинальный закон управления примет вид

$$u_0(t) = -\mathbf{k}^T \cdot \bar{\mathbf{x}}(t) = - \sum_{j=1}^{2N_{max}} k_j \bar{x}_j(t). \quad (3.13)$$

Закон управления (3.13) обеспечивает компенсацию возмущения. Действительно, подстановкой выражений (3.12) и (3.13) в (3.1) при $\hat{P}(z) \equiv P(z)$ и (3.4) легко проверить, что

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= P(q^{-1}) u_0(t) + \rho(t) = \\ &= -\hat{P}(q^{-1}) \sum_{j=1}^{2N_{max}} k_j \bar{x}_j(t) + \sum_{j=1}^{2N_{max}} k_j x_j(t) = \\ &= - \sum_{j=1}^{2N_{max}} k_j x_j(t) + \sum_{j=1}^{2N_{max}} k_j x_j(t) = 0. \end{aligned}$$

Однако номинальный закон управления $u_0(t)$ не может быть реализован, так как вектор \mathbf{k} неизвестен. Введём в рассмотрение вектор оценок $\hat{\mathbf{k}}(t)$,

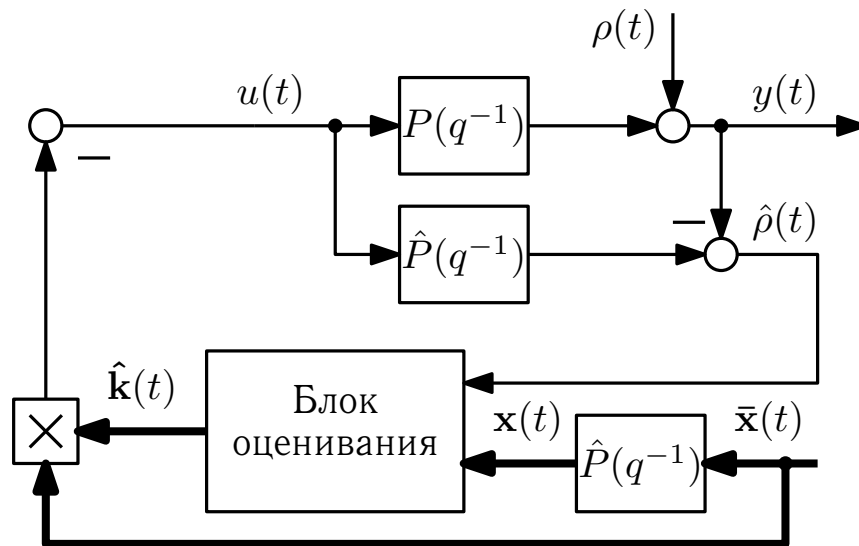


Рисунок 3.4. Схема системы, включающей в себя реализуемый закон управления (3.14).

такой что $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{k}$, генерируемый блоком оценивания, который будет рассмотрен ниже. Подстановка вектора $\hat{\mathbf{k}}(t)$ в номинальный закон управления (3.13) вместо неизвестного вектора $\mathbf{k}(t)$ позволяет получить реализуемый закон управления

$$u(t) = -\hat{\mathbf{k}}^T(t) \cdot \bar{\mathbf{x}}(t) = -\sum_{j=1}^{2N_{max}} \hat{k}_j(t) \bar{x}_j(t). \quad (3.14)$$

Схема системы, включающей в себя закон управления (3.14) и блок оценивания, представлена на рисунке 3.4. Так как $\hat{\mathbf{k}}(t) \rightarrow \mathbf{k}$, то $u(t) \rightarrow u_0(t)$ и $y(t) \rightarrow 0$. Для построения замкнутой системы остаётся определить процедуру оценки вектора $\hat{\mathbf{k}}$ и задать метод формирования опорных сигналов $\bar{\mathbf{x}}(t)$.

3.2.3 Банк фильтров

Для построения замкнутой системы управления, включающую в себя закон управления (3.14) (схема представлена на рисунке 3.4) необходимо задать вектор опорных сигналов (3.6), для которого выполняются условия Леммы 3.1: сигналы $\bar{x}_j(t)$, $j = 1, \dots, 2N_{max}$ должны быть синусоидальными сигналами тех же частот, что и компоненты возмущения (3.4). Для формирования

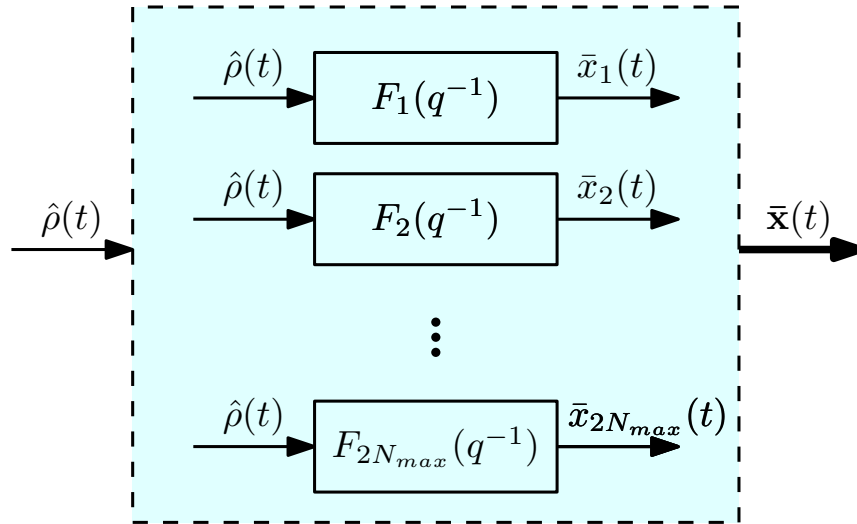


Рисунок 3.5. Общий принцип формирования опорных сигналов $x_j(t)$ путем фильтрации оценки возмущения по закону (3.15) .

опорных сигналов предлагается пропустить оценку возмущения $\hat{\rho}(t)$ через набор линейных устойчивых фильтров $F_j(z)$, как это показано на рисунке 3.5

$$\bar{x}_j(t) = F_j(q^{-1}) \hat{\rho}(t), \quad j = 1, \dots, 2N_{max}. \quad (3.15)$$

Если фильтры $F_j(z)$ имеют ненулевую амплитудную характеристику $L_F(\omega_i)$ на всех частотах $\omega_i = 1, \dots, N$, то сигналы $\bar{x}_j(t)$ окажутся суммой синусоидальных компонент тех же частот, что и возмущение (3.4).

Банк фильтров $F_j(z)$ может быть сформирован различными способами, однако не для каждого способа сигналы (3.15) будут удовлетворять условиям Леммы 3.1. Рассмотрим один из способов формирования банка фильтров, который удовлетворит всем предъявляемым требованиям

$$\begin{aligned} F_1(q^{-1}) &= F_0(q^{-1}), \\ F_j(q^{-1}) &= q^{-1} F_{j-1}(q^{-1}), \quad j = 2, \dots, 2N_{max}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Банк фильтров (3.16) состоит из

- базового фильтра $F_0(q^{-1})$, представляющего собой устойчивую линейную передаточную функцию. Базовый фильтр позволяет ограничить частоты

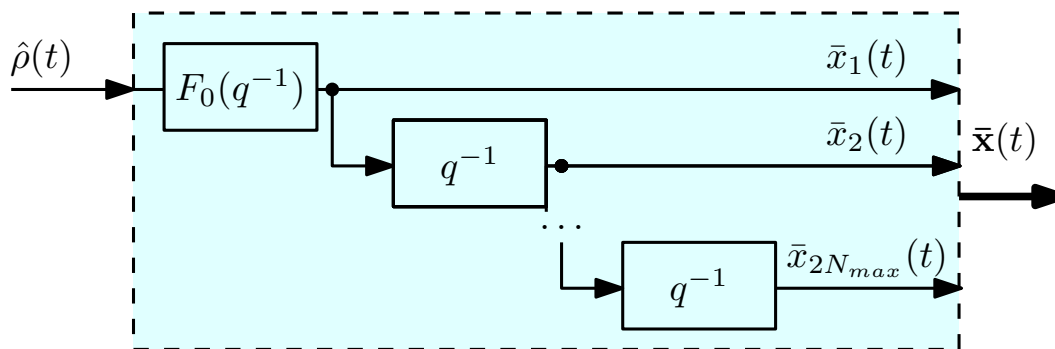


Рисунок 3.6. Структурная схема банка фильтров (3.16) .

образующих возмущение гармоник $\omega_{min} \leq \omega_i \leq \omega_{max}$ (в соответствии с Допущением 3.2), и в качестве базового может быть выбран полосовой фильтр с полосой пропускания, соответствующей установленным границам частот. Такое решение позволяет уменьшить зашумленность сигналов $x_j(t)$ и улучшить качество компенсации возмущения;

- остальных фильтров $F_{2, \dots, 2N_{max}}(q^{-1})$, образованных последовательным сдвигом выхода предыдущего фильтра на 1 такт.

Схема банка фильтров (3.16) представлена на рисунке 3.6.

Применим банк фильтров (3.16) в выражении (3.15) для окончательного формирования вектора опорных сигналов $\bar{x}(t)$

$$\bar{x}_j(t) = q^{-(1+j)} (F_0(q^{-1}) \hat{\rho}(t)), \quad j = 1, \dots, 2N_{max}. \quad (3.17)$$

Таким образом, банк фильтров в выражении (3.17) представляет собой базовый фильтр $F_0(z)$ и последующий сдвиг выхода базового фильтра на $2N_{max} - 1$ тактов. Иначе выражение (3.17) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(t) &= F_0(q^{-1}) \hat{\rho}(t), \\ \bar{x}_j(t) &= q^{-1} \bar{x}_{j-1}(t) = \bar{x}_{j-1}(t-1), \quad j = 2, \dots, 2N_{max}. \end{aligned}$$

Тогда, с учётом (3.9) и Леммы 3.2, сигналы $x_j(t)$ будут представимы в виде

$$\begin{aligned} x_1(t) &= F_0(q^{-1})\hat{\rho}(t)\hat{P}(q^{-1}) = \sum_{i=1}^N D_i \sin(\omega_i t + \eta_i), \\ x_j(t) &= x_{j-1}(t-1), \quad j = 2, \dots, 2N_{max}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $D_i > 0$ — амплитуды сигналов, полученных пропусканием $\hat{\rho}(t)$ через линейный устойчивый фильтр $F_0(q^{-1})$ и модель объекта $\hat{P}(q^{-1})$; η_i — фазовые сдвиги после аналогичных действий.

Замечание 3.2. Амплитуды D_i будут ненулевыми в том случае, если модель объекта $\hat{P}(z)$ и базовый фильтр $F_0(z)$ не подавляют компоненты сигнала $\rho(t)$.

Корректность применения опорных сигналов $\bar{x}_j(t)$, являющихся выходом банка фильтров (3.17), и сигналов $x_j(t)$, формируемых в соответствии с выражением (3.9), для декомпозиции возмущения (3.12) рассматривается в следующей теореме 3.1.

Теорема 3.1. Рассмотрим сигнал $\rho(t)$, представляющий собой конечную сумму (3.2), и набор из $2N_{max}$ сигналов $x_j(t)$ вида (3.18). Тогда существует вектор $\mathbf{k} = \{k_j\}$, такой что справедлива декомпозиция (3.12), причём при $N = N_{max}$ этот вектор единственный.

Доказательство. Покажем, что сигнал $\rho(t)$ может быть представим через первые $2N$ сигналов из набора $2N_{max}$ сигналов $x_j(t)$ и эта декомпозиция единственна. Очевидно, что из этого утверждения следует и основной результат.

Перепишем выражение (3.2) в виде

$$\rho(t) = \text{Im} \left(\sum_{i=1}^N A_i e^{i(\omega_i t + \varphi_i)} \right),$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, а функция $\text{Im}(\cdot)$ обозначает мнимую часть аргумента. Аналогично перепишем сигналы (3.18)

$$x_j(t) = \text{Im} \left(\sum_{i=1}^N D_i e^{i(\omega_i t + \psi_i + (j-1)\zeta_i)} \right),$$

где ζ_i — фазовый сдвиг, вызванный задержкой на один такт оператором q^{-1} на частоте ω_i . Тогда равенство (3.12) истинно в случае, когда для $i = 1, \dots, N$ справедливо

$$A_i e^{i\varphi_i} = \sum_{j=1}^N k_j D_i e^{i\psi_i} e^{i(j-1)\zeta_i}. \quad (3.19)$$

Модуль $|e^{i\psi_i}| = 1$, а $D_i > 0$, тогда равенство (3.19) запишем как

$$c_i = \sum_{j=1}^N k_j e^{i(j-1)\zeta_i}, \quad (3.20)$$

где $c_i = (A_i e^{i\varphi_i}) / (D_i e^{i\psi_i})$. Перепишем (3.20) в векторно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e^{i\zeta_1} & e^{i2\zeta_1} & \dots & e^{i(2N-1)\zeta_1} \\ 1 & e^{i\zeta_2} & e^{i2\zeta_2} & \dots & e^{i(2N-1)\zeta_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{i\zeta_N} & e^{i2\zeta_N} & \dots & e^{i(2N-1)\zeta_N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{2N} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{E}(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \mathbf{k},$$

где $\mathbf{E}(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ — матрица размерности $N \times 2N$. Система линейных уравнений (3.21) содержит N уравнений с $2N$ неизвестными и, как следствие, имеет бесконечное множество комплексных решений $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^{2N}$. Введем в рассмотрение расширенную систему

$$\mathbf{V}(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \mathbf{k} = \begin{bmatrix} E(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \\ \bar{E}(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \end{bmatrix} \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

где $\overline{(\cdot)}$ — операция комплексного сопряжения аргумента (\cdot) . Если квадратная $2N \times 2N$ матрица $\mathbf{V}(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ невырожденная, то тогда система линейных уравнений (3.22) имеет единственное решение $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^{2N}$, которое также является решением системы (3.21). Однако

$$\begin{bmatrix} E(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \\ \bar{E}(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \end{bmatrix} \bar{\mathbf{k}} = \overline{\left(\begin{bmatrix} \bar{E}(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \\ E(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \end{bmatrix} \mathbf{k} \right)} = \overline{\left(\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{c}} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} \right)} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{bmatrix},$$

и $\bar{\mathbf{k}}$ также окажется решением системы (3.22). Как было показано выше, система (3.22) имеет единственное решение \mathbf{k} , следовательно $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}$. Следовательно, \mathbf{k} является вещественным, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{2N}$. Покажем, что система (3.21) имеет единственное вещественное решение $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{2N}$. Пусть существует некое другое вещественное решение системы линейных уравнений (3.21) $\mathbf{k}_{\text{др}} \neq \mathbf{k} \in \mathbb{R}^{2N}$, тогда $\mathbf{k}_{\text{др}}$ также окажется и решением системы (3.22). Выше было показано, что система (3.22) из $2N$ линейных уравнений с $2N$ неизвестными имеет только одно решение, следовательно $\mathbf{k}_{\text{др}} = \mathbf{k}$. Таким образом, если матрица $\mathbf{V}(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ является невырожденной, то система линейных уравнений (3.21) имеет единственное решение $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{2N}$.

Матрица

$$\mathbf{V}(\zeta_1, \dots, \zeta_N) = \begin{bmatrix} E(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \\ \bar{E}(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e^{i\zeta_1} & e^{i2\zeta_1} & \dots & e^{i(2N-1)\zeta_1} \\ 1 & e^{i\zeta_2} & e^{i2\zeta_2} & \dots & e^{i(2N-1)\zeta_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{i\zeta_N} & e^{i2\zeta_N} & \dots & e^{i(2N-1)\zeta_N} \\ 1 & e^{-i\zeta_1} & e^{-i2\zeta_1} & \dots & e^{-i(2N-1)\zeta_1} \\ 1 & e^{-i\zeta_2} & e^{-i2\zeta_2} & \dots & e^{-i(2N-1)\zeta_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-i\zeta_N} & e^{-i2\zeta_N} & \dots & e^{-i(2N-1)\zeta_N} \end{bmatrix}$$

представляет собой комплексное обобщение матрицы Вандермонда [106]. Определитель $\mathbf{V}(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ будет ненулевым в случае, если $\zeta_i \neq 0$ и $e^{i\zeta_i} \neq e^{\pm i\zeta_j}$ для $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N, i \neq j$, что выполняется при

1. $0 < \zeta_i < \pi$;
2. $\zeta_i \neq \zeta_j, i \neq j$.

Как отмечалось ранее, ζ_i — это фазовый сдвиг, вызванный задержкой на один такт оператором q^{-1} на частоте ω_i . Тогда для всех частот вплоть до половины

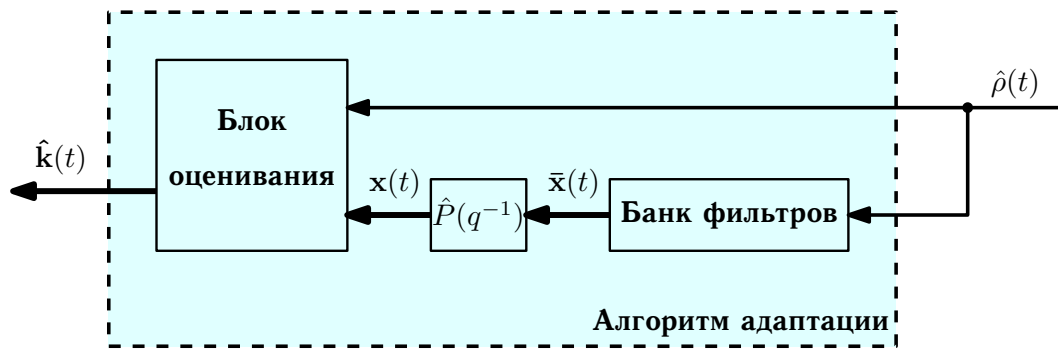


Рисунок 3.7. Структурная схема алгоритма адаптации, генерирующего вектор оценок $\hat{\mathbf{k}}(t)$.

частоты дискретизации будет выполняться неравенство $0 < \zeta_i < \pi$ и $\zeta_i \neq \zeta_j$ для всех частот $\omega_i \neq \omega_j$. \square

3.3 Алгоритм адаптации и анализ устойчивости замкнутой системы

3.3.1 Формирование оценка вектора параметров

Реализуемый в системе закон управления (3.14) требует вычисления вектора оценок $\hat{\mathbf{k}}(t)$ такого, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{k}$. В соответствии со схемой, которая была представлена на рисунке 3.4, вычисление оценок требует наличие в системе вектора опорных сигналов $\bar{\mathbf{x}}(t)$, который генерируется банком фильтров (3.17), и блока оценивания, который, в свою очередь, вычисляет оценки $k_j(t)$. Схема алгоритма адаптации представлена на рисунке 3.7. Принцип формирования сигналов $x_j(t)$ и $\bar{x}_j(t)$ изложен в разделе 3.2.3; блок оценивания описывается ниже.

Введём в рассмотрение критерий качества $J(t)$, представляющий собой квадрат невязки между оценкой возмущения $\hat{\rho}(t)$, измеряемой по формуле (3.3), и той оценкой, которая определяется линейной комбинацией (3.12)

$$J(\hat{\mathbf{k}}) = \sum_t \left(\hat{\rho}(t) - \sum_{j=1}^{2N_{max}} \hat{k}_j(t) x_j(t) \right)^2. \quad (3.23)$$

Тогда искомый вектор оценок $\hat{\mathbf{k}}(t)$ может быть найден путём минимизации критерия (3.23)

$$\hat{\mathbf{k}} = \underset{\hat{\mathbf{k}}}{\operatorname{argmin}} \sum_t \left(\hat{\rho}(t) - \sum_{j=1}^{2N_{max}} \hat{k}_j x_j(t) \right)^2. \quad (3.24)$$

Задача минимизации (3.24) может быть решена с использованием методов теории идентификации, например, с использованием метода наименьших квадратов (МНК) [107, 108]. Далее в работе выбран МНК со списыванием [109]

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{k}}(t) &= \hat{\mathbf{k}}(t-1) + \mathbf{G}(t) \varepsilon(t), \\ \varepsilon(t) &= \hat{\rho}(t) - \mathbf{x}^T(t) \hat{\mathbf{k}}(t-1), \\ \mathbf{G}(t) &= \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) = \frac{\mathbf{P}(t-1) \mathbf{x}(t)}{\lambda + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}(t-1) \mathbf{x}(t)}, \\ \mathbf{P}(t) &= \frac{1}{\lambda} (\mathbf{P}(t-1) - \mathbf{G}(t) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}(t-1)), \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $0 < \lambda < 1$ — коэффициент списывания.

Так как сигналы $x_j(t)$ являются синусоидальными, вектор $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет условию неисчезающего возбуждения [110] и $\hat{\mathbf{k}}(t) \rightarrow \mathbf{k}$ при $t \rightarrow \infty$. Иначе вектор оценок можно переписать в виде

$$\hat{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{k} + \tilde{\mathbf{k}}(t), \quad (3.26)$$

где $\tilde{\mathbf{k}}(t)$ — ограниченный и асимптотически затухающий член при $t \rightarrow \infty$.

Замечание 3.3. Если $N = N_{max}$, то вектор \mathbf{k} единственный, и, соответственно, оценка $\hat{\mathbf{k}}(t)$ сходится к константе. Если же $N < N_{max}$, то существует множество векторов \mathbf{k} , минимизирующих критерий (3.23) и, соответственно, оценка $\hat{\mathbf{k}}(t)$ сходится к этому множеству. В этом случае для избежания явления, известного как неограниченный дрейф параметров, могут быть применены различные техники закругления или проекции [9].

3.3.2 Анализ устойчивости

Итоговая схема замкнутой системы представлена на рисунке 3.8 и включает в себя объект управления (3.1); модель объекта $\hat{P}(q^{-1})$; наблюдатель

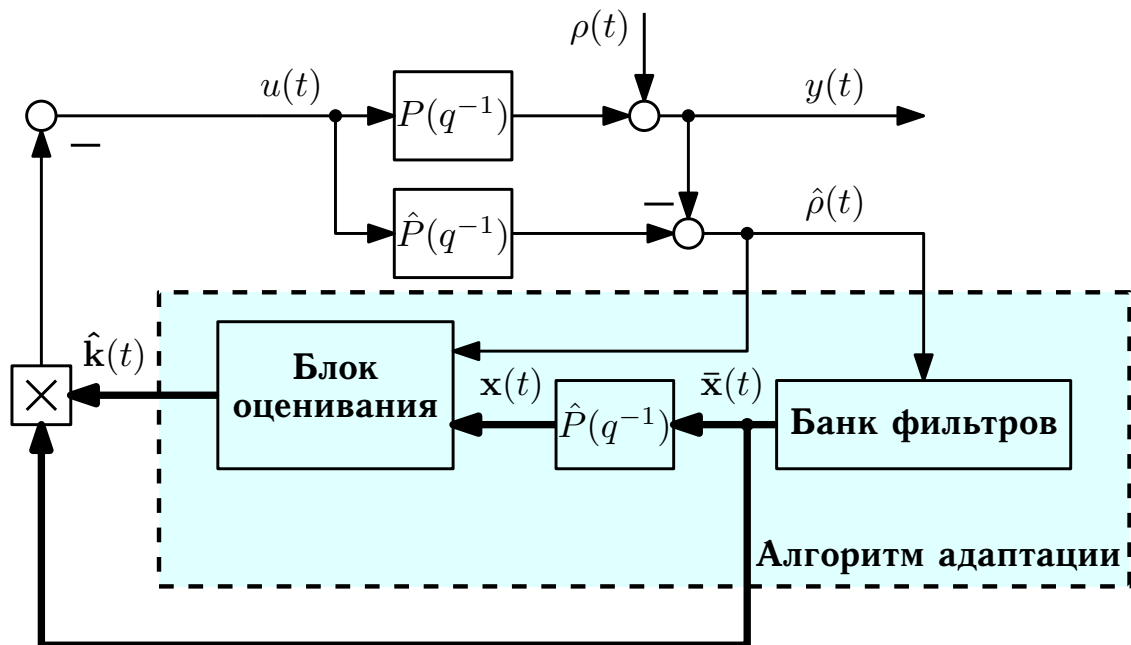


Рисунок 3.8. Схема замкнутой системы, включающей в себя объект управления (3.1), модель объекта $\hat{P}(q^{-1})$, наблюдатель возмущения (3.3), банк фильтров (3.17), блок оценивания (3.25), реализуемый закон управления (3.14).

возмущения (3.3); алгоритм адаптации (3.17), (3.18), (3.25) и реализуемый закон управления (3.14). В соответствии с Замечанием 3.1 справедливо тождество $\hat{P}(z) \equiv P(z)$ и оценка возмущения $\hat{\rho}(t) \rightarrow \rho(t)$ в соответствии с выражением (3.3).

Утверждение 3.1. *Сигнал $\hat{\rho}(t)$, поступающий на вход алгоритма адаптации, не зависит от управляющего сигнала $u(t)$ и выхода объекта $y(t)$, следовательно, вектор оценок $\hat{\mathbf{k}}(t)$ также не зависит от них.*

Как следует из Утверждения 3.1, представленная на рисунке 3.8 схема может быть преобразована к эквивалентной разомкнутой схеме, представленной на рисунке 3.9, более удобной для анализа устойчивости системы. Последовательно проанализируем сигналы и звенья, представленные на рисунке 3.9:

- возмущение $\rho(t)$ представляет собой конечную сумму ограниченных в пределах $\pm A_i$ синусоидальных сигналов (3.2);

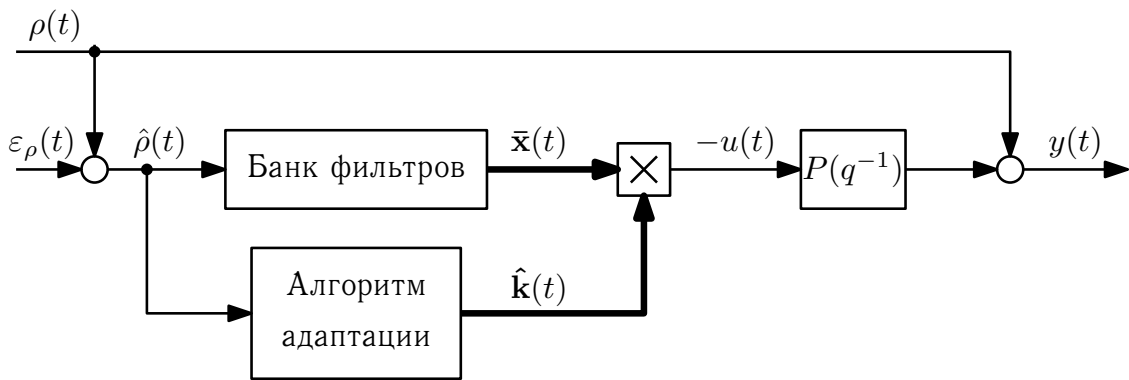


Рисунок 3.9. Эквивалентная разомкнутая схема системы, включающей в себя объект управления (3.1), модель объекта $\hat{P}(q^{-1})$, наблюдатель возмущения (3.3), банк фильтров (3.17), блок оценивания (3.25), реализуемый закон управления (3.14).

- сигнал $\varepsilon_\rho(t)$ экспоненциально затухает к нулю в соответствии с Замечанием 3.1 и выражением (3.3);
- банк фильтров (3.16) включает в себя устойчивый линейный базовый фильтр $F_0(z)$ и последовательность фильтров $F_{2, \dots, 2N_{max}}(z)$, образованных последовательным сдвигом выхода $F_0(z)$ на 1 такт;
- вектор опорных сигналов $\bar{x}(t)$ является выходом устойчивого банка фильтров и, в соответствии с (3.6), представляет собой конечную сумму ограниченных в пределах $\pm B_{i,j}$ синусоидальных сигналов;
- алгоритм адаптации (3.17), (3.18), (3.25) включает в себя устойчивый линейный банк фильтров, ограниченные опорные сигналы $\bar{x}_j(t)$, которые, при пропускании через устойчивую линейную модель объекта $\hat{P}(z)$, порождают аналогичные сигналы $x_j(t)$. Метод решения задачи минимизации (3.24) выбран таким образом, что оценки сходятся к истинным значениям по закону (3.26);

– с учетом условия (3.26) реализуемый закон управления (3.14) принимает вид

$$u(t) = -\hat{\mathbf{k}}^T(t) \bar{\mathbf{x}}(t) = u_0(t) + \tilde{u}(t) = -\mathbf{k}^T(t) \bar{\mathbf{x}}(t) - \tilde{\mathbf{k}}^T(t) \bar{\mathbf{x}}(t),$$

где номинальная составляющая $u_0(t) = -\mathbf{k}^T(t) \bar{\mathbf{x}}(t)$ ограничена в виду ограниченности элементов векторов \mathbf{k} и $\bar{\mathbf{x}}(t)$, а член $\tilde{u}(t) = -\tilde{\mathbf{k}}^T(t) \bar{\mathbf{x}}(t)$ также ограничен и асимптотически стремится к нулю вследствие выполнения условия (3.26) — тогда и реализуемый закон управления $u(t)$ ограничен;

– объект управления (3.1) линейный и устойчивый, следовательно, выход объекта $y(t)$, к которому приложено ограниченное возмущение $\rho(t)$, тоже ограничен.

На основе вышесказанного формулируется ряд утверждений.

Утверждение 3.2. *Если модель устойчивого линейного объекта управления известна, $\hat{P}(z) \equiv P(z)$, вектор оценок $\hat{\mathbf{k}}(t)$ ограничен и имеет пределом $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{k}$, то тогда все сигналы в замкнутой схеме, представленной на рисунке 3.8, ограничены и, следовательно, система устойчива.*

Утверждение 3.3. *В случае, когда выполняются упомянутые в Утверждении 3.2 условия и справедливо выражение (3.11), выходной сигнал $y(t)$ объекта управления (3.1) асимптотически стремится к нулю.*

Таким образом, поскольку все входящие в разомкнутую схему звенья и блоки устойчивы в смысле ограниченности сигналов, то и вся разомкнутая система устойчива. Следовательно, устойчива и эквивалентная замкнутая система, представленная на рисунке 3.8, а выход системы при этом будет асимптотически стремиться к нулю.

3.4 Экспериментальные исследования по подавлению вибраций для электромеханического объекта

3.4.1 Описание экспериментального стенда

Экспериментальная проверка предложенного в настоящей главе алгоритма подавления вибраций, основанного на построении адаптивного наблюдателя детерминированного мультисинусоидального возмущения проводилась на электромеханическом вибростенде, задействованном в международных стендовых испытаниях, проводившихся в GIPSA Lab, г. Гренобль, Франция, под руководством профессора И. Д. Ландо. Указанный вибростенд, как и сами испытания, подробно описаны в работе [103].

Изображение стенда приведено на рисунке 3.10. Стенд состоит из шейкера, создающего вибрации и выступающего в роле внешнего генератора возмущений (на рисунке внизу), основного актуатора, преобразующего электромагнитные колебания в механические (на рисунке сверху), тензометрического датчика, измеряющего суммарные колебания, и механической связи между указанными объектами.

Для полноты изложения приведём схему замкнутой системы экспериментально стенда из работы [103], см. Рис 3.11. Здесь (a) – основной актуатор, (b) – тензометрический датчик, (c) – шейкер. Также на схеме обозначены: Shaker – шейкер, Amplifier – усилитель, Control Amplifier – усилитель управляющего сигнала, Residual Force Measurement – измерение остаточных колебаний (усилий), Force Amplifier – усилитель измеряемых усилий, Antialiasing Filter – сглаживающий фильтр, Ground – опора, xPC Target RT-OS Acquisition Board – работающая в реальном времени система измерений, построенная на платформе xPC Target, PC Development Matlab Simulink – система разработки и прототипирования алгоритмов компенсации.

Система функционирует следующим образом. На шейкер подаётся заранее записанный сигнал, вызывающий в шейкере колебания (вибрации),



Рисунок 3.10. Стенд для проведения экспериментальных исследований по подавлению вибраций для электромеханических объектов [103], GIPSA Lab, г. Гренобль, Франция.

соответствующие наблюдаемым на некоторых промышленных объектах. Создаваемые шейкером вибрации распространяются по механической связи и воздействуют на тензометрический датчик, измеряющий передающиеся ему усилия, это образует первичный канал распространения вибраций. С другой стороны, создаваемые основным актуатором вибрации так же распространяются по (другой) механической связи и также воздействуют на тензометрический датчик, что образует вторичный канал распространения вибраций. Таким образом, датчик измеряет суперпозицию двух каналов. При этом вторичный канал рассматривается как объект управления (от входного сигнала актуатора до выхода датчика), а первичный канал - как автономный генератор возмущающего воздействия. Выходной сигнал датчика поступает на плату захвата данных,

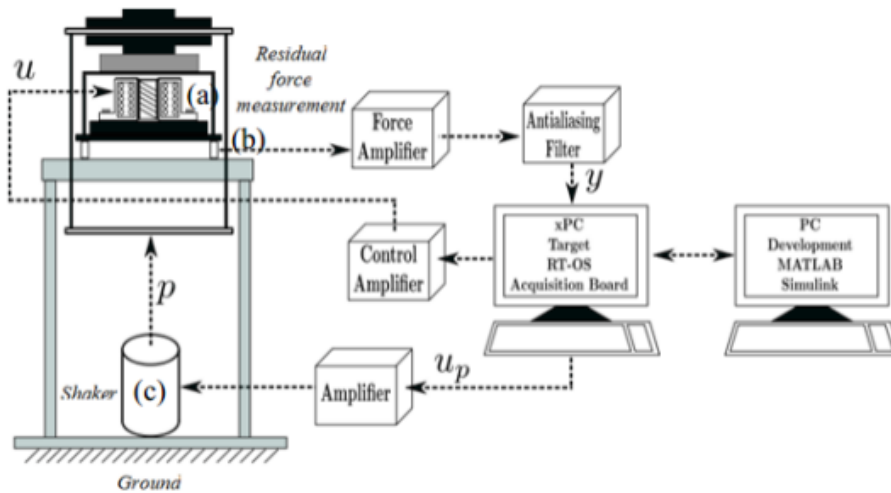


Рисунок 3.11. Стенд для проведения экспериментальных исследований по подавлению вибраций для электромеханических объектов [103], GIPSA Lab, г. Гренобль, Франция. Расшифровка используемых на схеме обозначений приведена в тексте работы.

где он оцифровывается и поступает на вход регулятора как выход объекта. Далее в режиме реального времени по полученным измерениям рассчитывается управляющий сигнал, который затем подаётся на основной актуатор. Целью управления является формирование такого управляющего сигнала, чтобы обеспечить нулевой выходной сигнал датчика. Иными словами, требуется за счёт управления основным актуатором подавить вибрации, действующие на датчик со стороны шейкера.

3.4.2 Реализация алгоритма компенсации

Экспериментальный стенд моделируется как линейная дискретная стационарная система размерности 26, подверженная внешнему возмущению, сформированному как конечная сумма синусоидальных сигналов. Модель объекта предполагается известной, а именно полученной в результате идентификации. Объект управления устойчив, однако имеет неустойчивые корни числителя. Частота дискретизации составляет 800Гц. В ходе эксперимента рассматриваются три *уровня* испытаний, а именно возмущения, состоящие из

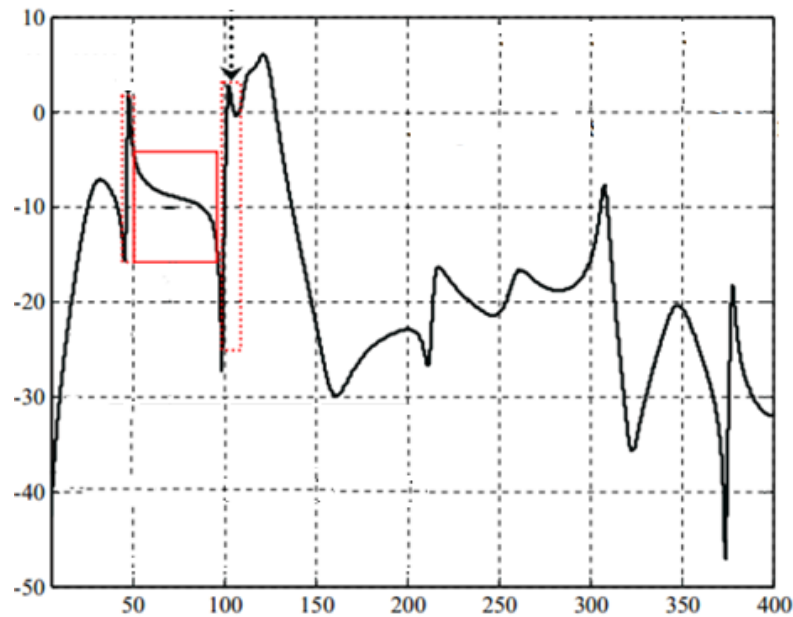


Рисунок 3.12. Амплитудно-частотная характеристика идентифицированной модели объекта, по оси ординат частота (Гц), по оси абсцисс дБ. Выделен диапазон частот, в котором находятся частоты возмущения.

одного, двух или трёх синусоидальных компонент соответственно. Частоты возмущений расположены в диапазоне от 50Гц до 95Гц, причём объект управления удовлетворяет Лемме 3.2 в этом диапазоне. Амплитудно-частотная характеристика идентифицированной модели объекта от управляющего сигнала основного актуатора к выходному сигналу датчика приведена на рисунке 3.12.

Для каждого уровня рассматриваются три *протокола* испытаний, а именно

- протокол “простой тест” – частоты возмущения постоянны в ходе эксперимента;
- протокол “кусочно-постоянный тест” – частоты возмущения варьируются между несколькими постоянными значениями в ходе эксперимента;
- протокол “линейный тест” – частоты возмущения линейно изменяются во времени в ходе эксперимента. Скорость изменения частоты $10\text{Гц}\cdot\text{с}^{-1}$ для Уровня 1, $5\text{Гц}\cdot\text{с}^{-1}$ для Уровня 2 и $3\text{Гц}\cdot\text{с}^{-1}$ для Уровня 3.

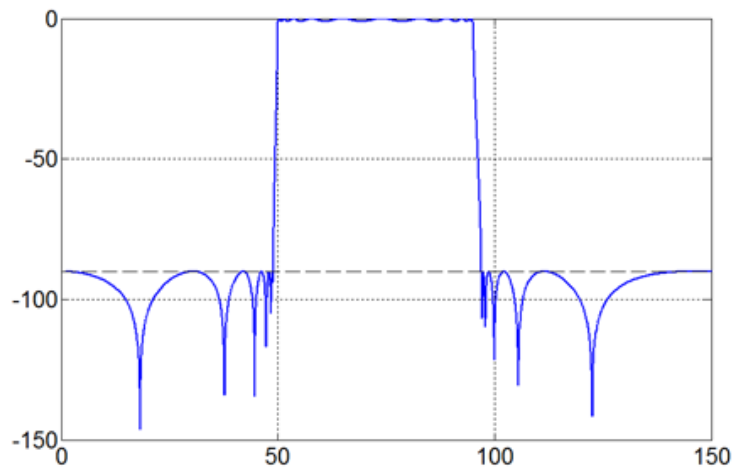


Рисунок 3.13. Амплитудно-частотная характеристика выбранного фильтра $F_0(q^{-1})$, по оси ординат частота (Гц), по оси абсцисс дБ..

Для компенсации возмущения была использована схема, представленная на рисунке 3.8. Банк фильтров был сформирован в соответствии с подразделом 3.2.3, где базовый фильтр $F_0(q^{-1})$ был выбран как эллиптический полосовой фильтр 14-го порядка с полосой пропускания от 50Гц до 95Гц, амплитудно-частотная характеристика выбранного фильтра приведена на рисунке 3.13. Для формирования оценки $\hat{k}(t)$ был использован алгоритм (3.25) с фактором списывания $\lambda = 0.98$.

В ходе эксперимента были протестированы два вида регуляторов. Для первого регулятора предполагалось, что число синусоидальных компонент точно известно, то есть $N_{max} = N$, где $N = 1$ для Уровня 1, $N = 2$ для Уровня 2, и $N = 3$ для Уровня 3. Таким образом, для каждого уровня строился отдельный регулятор. Для второго типа регулятора предполагалось, что известна только верхняя граница числа синусоидальных компонент, но не точное их число, то есть $N_{max} = 3$ для всех трёх уровней. При этом, естественно, такой регулятор совпадает с регулятором первого типа для Уровня 3. В ходе экспериментальных исследований было обнаружено, что регуляторы первого типа, использующие больше априорной информации о возмущении, обеспечивают лучшие показатели качества, чем регуляторы

второго типа. Однако, различие в показателях качества незначительно, и для практических применений использование регуляторов второго типа может оказаться предпочтительнее, так как такие регуляторы требуют меньше априорной информации о возмущении и являются более универсальными.

Далее в работе представлены результаты только для регуляторов первого типа.

3.4.3 Используемые показатели качества

Для оценки качества подавления возмущения по экспериментальным данным были рассмотрены следующие показатели качества и их целевые значения [103]:

– *Квадрат ограниченной нормы* для выходного сигнала определён как

$$N^2T = \sum_{i=1}^m y(i)^2,$$

где $y(i)$ это отсчёты оцениваемого дискретного сигнала и m это число отсчётов, которыми ограничивается оценка. Эта величина используется для оценки качества переходных процессов для протоколов “простой тест” и “кусочно-постоянный тест”.

– *Максимальное значение* определяется как

$$MV = \max_m |y(i)|.$$

Эта величина используется для оценки качества переходных процессов для всех протоколов.

– *Общее подавление (GA)* измеряется в децибелах и рассчитывается как

$$GA = 20 \log_{10} (\|Y_{ol}\|_2 / \|Y_{cl}\|_2),$$

где Y_{ol} и Y_{cl} это выходной сигнал в течение последних трёх секунд эксперимента эксперимента в разомкнутом контуре и в замкнутом

контуре, соответственно. Эта величина используется для оценки качества подавления в установившемся режиме в протоколе “простой тест”.

- *Подавление возмущения (DA)* измеряется в децибелах и определяется как разница в оценке спектральной плотности мощности (PSD) между выходными сигналами в замкнутом и разомкнутом контурах на частоте возмущения, то есть минимальное значение разницы по всем частотам:

$$DA = \min(PSD_{cl} - PSD_{ol}).$$

Эта величина используется для оценки качества подавления в установившемся режиме в протоколе “простой тест”.

- *Максимальное усиление (MA)* измеряется в децибелах и определяется как максимальное значение разницы в оценке спектральной плотности мощности (PSD) между выходными сигналами в замкнутом и разомкнутом контурах на частоте возмущения:

$$MA = \max(PSD_{cl} - PSD_{ol}).$$

Эта величина используется для оценки качества подавления в установившемся режиме в протоколе “простой тест”.

- *Среднее квадратичное* выходного сигнала используется для оценки качества в переходном процессе для протокола “линейный тест” и определяется как

$$MSE = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y(i)^2.$$

- *Коэффициент усиления переходного процесса (TR)* определяется как отношение между N^2T показателями для выходного сигнала в интервале от 3 до 5 секунд и последними тремя секундами эксперимента. Эта величина используется для оценки качества в переходных процессах в протоколе “простой тест” и должна быть ниже 1,21, что подразумевает, что переходные процессы заканчиваются в первые две секунды эксперимента.

3.4.4 Результаты численного моделирования

Результаты численного моделирования для протокола “простой тест”, то есть для постоянных частот возмущения, приведены в Таблице 3.1.

Как видно из результатов численного моделирования, алгоритм компенсации обеспечивает хорошее подавление вибраций и высокие значения GA и DA для всех экспериментов. Однако следует отметить, что уровень усиления MA , полученный при моделировании, достаточно высок. Это обусловлено тем, что при разработке метода компенсации задача контроля этого показателя не ставилась, что остаётся открытой проблемой и предметом дальнейших исследований. Требования ко времени переходного процесса были выполнены для всех экспериментов.

Результаты численного моделирования для протоколов “кусочно-постоянный тест” и “линейный тест” приведены в Таблице 3.2 и в Таблице 3.3.

3.4.5 Экспериментальные результаты

Результаты проведённого эксперимента на описанном выше тестовом оборудовании для протокола “простой тест” приведены в Таблице 3.4. Из результатов эксперимента видно, что на реальном оборудовании предложенный алгоритм компенсации обеспечивает подавление вибраций. Более того, результаты эксперимента оказываются близки к результатам численного моделирования. Отметим, что, как и при численном моделировании, величина MA остаётся высокой, что может быть нежелательно в некоторых приложениях. Как и при моделировании, требования по времени переходного процесса были выполнены для всех экспериментов.

Результаты эксперимента для протоколов “кусочно-постоянный тест” и “линейный тест” приведены в Таблице 3.5 и в Таблице 3.6.

Графики, иллюстрирующие экспериментальные испытания предложенного алгоритма, приведены на рисунке 3.14 - 3.19. На рисунке 3.14 приведены

Таблица 3.1: Результаты численного моделирования для протокола “простой тест”

Уровень 1 – “простой тест”							
Частота (Гц)	GA (дБ)	DA (дБ)	MA (дБ@Гц)	N^2T пер. пр. ($\times 10^{-3}$)	N^2T уст. ($\times 10^{-3}$)	MV ($\times 10^{-3}$)	TR
50	33.8	46.9	6.0@54.7	45.7	3.9	35.2	1.143
55	32.6	46.0	6.7@78.1	20.6	4.5	27.6	1.049
60	33.3	47.8	7.3@68.8	20.2	4.2	32.8	1.096
65	33.6	50.2	8.5@51.6	16.5	4.1	34.8	1.063
70	32.8	48.7	8.2@53.1	15.7	4.6	31.8	1.047
75	33.6	52.0	9.6@53.1	23.9	4.2	42.8	1.086
80	33.9	49.6	7.4@54.7	33.7	4.0	51.8	1.094
85	33.0	48.0	9.1@51.6	42.6	4.3	55.9	1.055
90	31.0	42.9	10.6@53.1	45.3	4.5	52.9	1.086
95	23.3	36.9	8.9@87.5	56.3	4.9	67.9	1.119
Уровень 2 – “простой тест”							
Частота (Гц)	GA (дБ)	DA (дБ)-(дБ)	MA (дБ@Гц)	N^2T пер. пр. ($\times 10^{-3}$)	N^2T уст. ($\times 10^{-3}$)	MV ($\times 10^{-3}$)	TR
50-70	33.9	42.9 - 38.6	13.2@92.2	103.6	7.8	69.6	1.122
55-75	36.3	46.3 - 45.9	9.9@84.4	80.8	6.0	68.7	1.005
60-80	39.2	48.3 - 49.6	7.7@87.5	82.9	4.3	81.3	1.125
65-85	38.7	50.7 - 48.1	9.7@51.6	101.5	4.5	89.6	1.059
70-90	36.9	50.2 - 42.6	13.2@53.1	137.6	5.1	104.4	1.012
75-95	33.6	46.1 - 38.2	17.0@53.1	207.8	5.7	128.7	1.111
Уровень 3 – “простой тест”							
Частота (Гц)	GA (дБ)	DA (дБ)-(дБ)-(дБ)	MA (дБ@Гц)	N^2T пер. пр. ($\times 10^{-3}$)	N^2T уст. ($\times 10^{-3}$)	MV ($\times 10^{-3}$)	TR
50-65-80	38.8	44.8 - 41.8 - 40.8	14.6@93.8	255.3	6.7	111.3	1.104
55-70-85	41.5	46.7 - 53.2 - 46.2	8.0@60.9	251.6	4.9	134.5	1.072
60-75-90	40.8	45.3 - 52.9 - 42.4	8.7@51.6	320.4	5.0	159.5	1.065
65-80-95	38.0	46.8 - 46.3 - 41.4	13.5@51.6	451.9	5.8	191.9	0.999

Таблица 3.2: Результаты численного моделирования для протокола
“кусочно-постоянный тест”

Уровень 1	Последовательность 1		
	Частота (Гц)	N^2T пер. пр. ($\times 10^{-3}$)	MV ($\times 10^{-3}$)
	60→70	15.2	21.3
	70→60	15.4	21.1
	60→50	31.6	20.2
	50→60	81.8	22.2
Уровень 2	Последовательность 1		
	[55-75] → [60-80]	22.2	31.1
	[60-80] → [55-75]	22.0	30.0
	[55-75] → [50-70]	46.8	29.4
	[50-70] → [55-75]	129.1	32.3
	Последовательность 2		
	[70-90] → [75-95]	23.2	24.9
	[75-95] → [70-90]	42.4	29.8
	[70-90] → [65-85]	19.2	32.1
	[65-85] → [70-90]	18.4	29.3
Уровень 3	Последовательность 1		
	[55-70-85] → [60-75-90]	41.0	50.1
	[60-75-90] → [55-70-85]	42.0	52.1
	[55-70-85] → [50-65-80]	71.3	53.4
	[50-65-80] → [55-70-85]	102.2	55.7
	Последовательность 2		
	[60-75-90] → [65-80-95]	39.7	49.4
	[65-80-95] → [60-75-90]	50.7	55.6
	[60-75-90] → [55-70-85]	42.2	55.0
	[55-70-85] → [60-75-90]	40.2	51.4

Таблица 3.3: Результаты численного моделирования для протокола “линейный тест”

	MV $\times 10^{-3}$		Среднее квадратичное $\times 10^{-6}$	
	↗	↘	↗	↘
Уровень 1	16.7	14.4	31.3	15.3
Уровень 2	20.8	15.7	49.4	18.0
Уровень 3	21.0	10.6	35.7	11.7

Таблица 3.4: Результаты эксперимента для протокола “простой тест”

Уровень 1 – “простой тест”							
Частота (Гц)	GA (дБ)	DA (дБ)	MA (дБ@Гц)	N^2T пер. пр. ($\times 10^{-3}$)	N^2T уст. ($\times 10^{-3}$)	MV ($\times 10^{-3}$)	TR
50	34.7	41.7	9.3@54.7	99.2	6.4	31.0	1.141
55	34.6	45.9	11.7@128.1	40.4	5.1	34.3	1.040
60	32.8	47.8	9.6@46.9	26.7	5.5	39.6	0.879
65	33.1	50.5	8.4@90.6	25.3	4.5	36.4	0.993
70	30.8	47.6	8.0@64.1	17.8	5.0	33.4	1.055
75	30.2	46.4	9.0@281.3	16.5	4.9	32.2	0.878
80	30.1	46.8	7.7@115.6	21.9	4.5	31.5	1.005
85	29.2	40.5	10.6@73.4	24.4	4.8	41.2	0.963
90	28.0	41.5	10.1@67.2	25.7	4.9	38.4	1.019
95	25.8	40.0	10.9@129.7	25.4	4.9	26.2	1.092
Уровень 2 – “простой тест”							
Частота (Гц)	GA (дБ)	DA (дБ)-(дБ)	MA (дБ@Гц)	N^2T пер. пр. ($\times 10^{-3}$)	N^2T уст. ($\times 10^{-3}$)	MV ($\times 10^{-3}$)	TR
50-70	33.1	39.4 - 35.6	15.6@90.6	179.4	12.7	77.7	0.946
55-75	35.1	45.0 - 45.4	11.4@92.2	90.0	7.9	56.8	1.008
60-80	37.7	49.0 - 47.6	9.6@70.3	52.5	5.1	63.0	1.019
65-85	34.5	49.0 - 39.9	10.5@106.3	63.5	6.6	70.6	0.961
70-90	33.8	51.4 - 40.6	12.2@59.4	64.4	6.4	58.3	0.955
75-95	31.7	44.9 - 42.1	14.1@103.1	68.2	7.4	49.1	0.981
Уровень 3 – “простой тест”							
Частота (Гц)	GA (дБ)	DA (дБ)-(дБ)-(дБ)	MA (дБ@Гц)	N^2T пер. пр. ($\times 10^{-3}$)	N^2T уст. ($\times 10^{-3}$)	MV ($\times 10^{-3}$)	TR
50-65-80	38.0	39.4 - 42.8 - 39.5	14.3@93.8	302.6	9.6	116.8	0.977
55-70-85	36.8	45.7 - 51.4 - 42.9	10.8@40.6	294.0	9.1	140.5	0.947
60-75-90	37.1	45.6 - 48.7 - 44.4	12.8@68.8	312.8	7.8	146.2	1.107
65-80-95	34.7	44.4 - 44.6 - 42.5	13.9@51.6	105.1	9.1	62.9	0.970

Таблица 3.5: Результаты эксперимента для протокола “кусочно-постоянный тест”

Уровень 1	Последовательность 1		
	Частота (Гц)	N^2T пер. пр. ($\times 10^{-3}$)	MV ($\times 10^{-3}$)
	60→70	17.9	24.1
	70→60	18.9	24.1
	60→50	66.7	24.1
	50→60	125.9	25.3
Уровень 2	Последовательность 1		
	[55-75] → [60-80]	27.9	32.6
	[60-80] → [55-75]	30.6	31.4
	[55-75] → [50-70]	93.0	32.6
	[50-70] → [55-75]	197.1	36.0
	Последовательность 2		
	[70-90] → [75-95]	26.0	25.3
	[75-95] → [70-90]	44.7	26.2
	[70-90] → [65-85]	21.3	28.6
	[65-85] → [70-90]	19.2	25.3
	Уровень 3	Последовательность 1	
[55-70-85] → [60-75-90]		48.2	55.5
[60-75-90] → [55-70-85]		50.1	56.0
[55-70-85] → [50-65-80]		126.7	58.0
[50-65-80] → [55-70-85]		147.6	57.2
Последовательность 2			
[60-75-90] → [65-80-95]		46.7	45.8
[65-80-95] → [60-75-90]		59.1	53.5
[60-75-90] → [55-70-85]		52.6	59.3
[55-70-85] → [60-75-90]		48.8	56.8

графики выходного сигнала в разомкнутом (без компенсации) и замкнутом (с компенсацией) контурах при экспериментальных исследованиях, протокол “простой тест”, Уровень 3. Возмущение представляет собой сумму трёх синусоидальных компонент с постоянными частотами 60Гц, 75Гц и 90Гц. Из рисунка видно, что переходные процессы быстро затухают, и выходной сигнал при подавлении вибраций по амплитуде близок к выходному сигналу при отсутствии вибраций (с 5 по 10 и с 25 по 30 секунды). На рисунке 3.15 приведены аналогичные графики для четырёх наборов постоянных частот, значения частот указаны на графиках. Видно, что алгоритм сохраняет работоспособность во всём диапазоне частот возмущения.

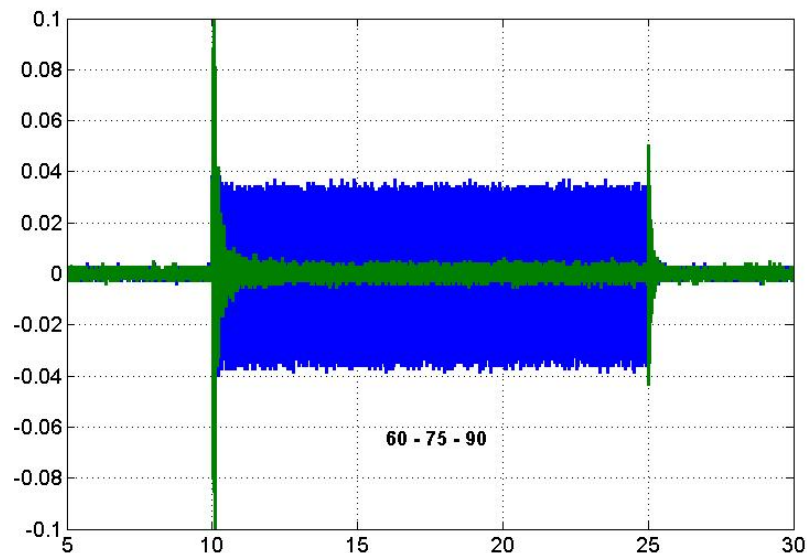


Рисунок 3.14. Выходной сигнал в разомкнутом (без компенсации) и замкнутом (с компенсацией) контурах при экспериментальных исследованиях. По оси абсцисс время в секундах, по оси ординат выходной сигнал тензометрического датчика, вольты.

На рисунке 3.16 приведены графики оценки спектральной плотности выходного сигнала в разомкнутом (без компенсации) и замкнутом (с компенсацией) контурах при экспериментальных исследованиях, протокол “простой тест”, Уровень 3. Возмущение представляет собой сумму трёх синусоидальных компонент с постоянными частотами 50Гц, 65Гц и 80Гц. На

Таблица 3.6: Результаты эксперимента для протокола “линейный тест”

	MV $\times 10^{-3}$		Среднее квадратичное $\times 10^{-6}$	
	↗	↘	↗	↘
Chirp-Level 1	17.6	20.4	42.8	18.6
Chirp-Level 2	18.8	24.1	67.9	22.2
Chirp-Level 3	14.3	24.9	50.8	15.4

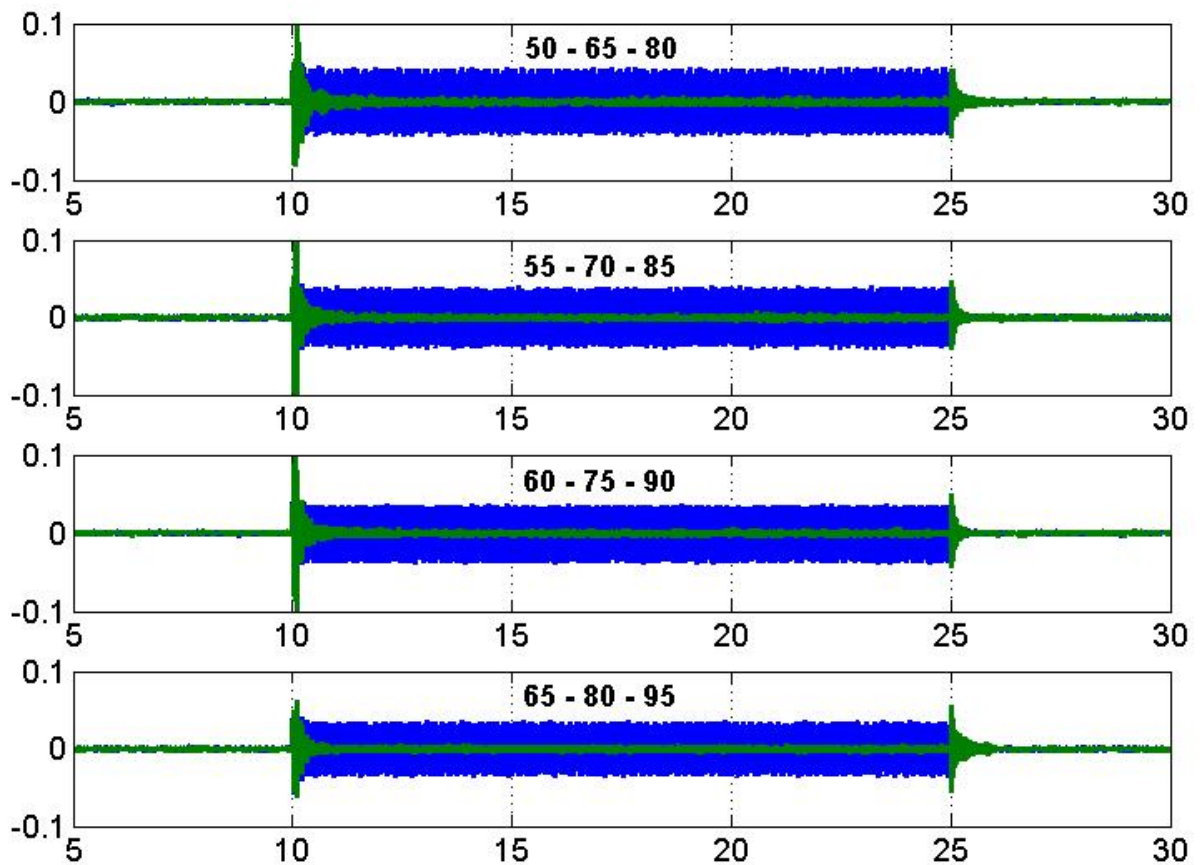


Рисунок 3.15. Выходные сигналы в разомкнутом (без компенсации) и замкнутом (с компенсацией) контурах при экспериментальных исследованиях, постоянные частоты. По оси абсцисс время в секундах, по оси ординат выходной сигнал тензометрического датчика, вольты.

графике отмечены значения подавления возмущений DA , а также максимальное усиление MA . Из рисунка видно, что использованный алгоритм обеспечивает подавление возмущений на соответствующих частотах. На рисунке 3.17 приведены аналогичные графики для четырёх наборов постоянных частот.

На рисунке 3.18 приведены графики выходного сигнала в разомкнутом (без компенсации) и замкнутом (с компенсацией) контурах при экспериментальных исследованиях, протокол “кусочно-постоянный тест”, Уровень 3. Возмущение представляет собой сумму трёх синусоидальных компонент с кусочно-постоянными частотами, значения частот указаны на графике. И на рисунке 3.18 приведены графики выходного сигнала в разомкнутом (без компенсации) и замкнутом (с компенсацией) контурах при экспериментальных исследованиях при линейно изменяющейся частоте.

Как следует из результатов численного моделирования, так и из результатов экспериментальных исследований, предложенный алгоритм компенсации обеспечивает хорошее подавление вибраций, как на отдельных частотах возмущения в частотной области, так и во временной области в смысле нормы выходного сигнала. Построенный на базе представленного в настоящей главе метода алгоритм обеспечивает быстрые переходные процессы, что позволяет подавлять также возмущение со ступенчатым или линейным изменением частоты. Так же в ходе экспериментов было обнаружено, что предложенный подход обладает невысокой вычислительной сложностью, что делает его привлекательным для многих инженерных приложений. Другим преимуществом предложенного метода является то, что он позволяет строить алгоритмы компенсации, не требующие точного знания числа синусоидальных компонент в возмущении.

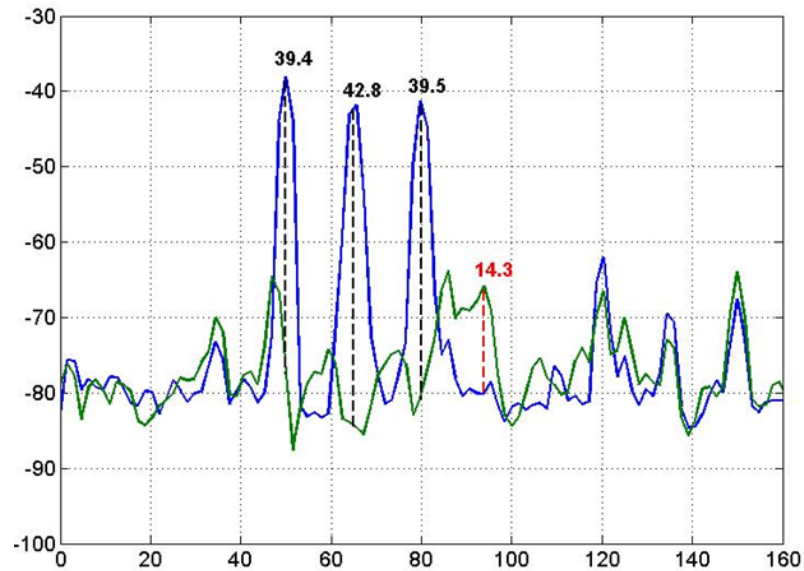


Рисунок 3.16. Оценка спектральной плотности выходного сигнала в разомкнутом (без компенсации) и замкнутом (с компенсацией) контурах при экспериментальных исследованиях, постоянные частоты. По оси абсцисс частота в Гц, по оси ординат оценка спектральной плотности, децибелы.

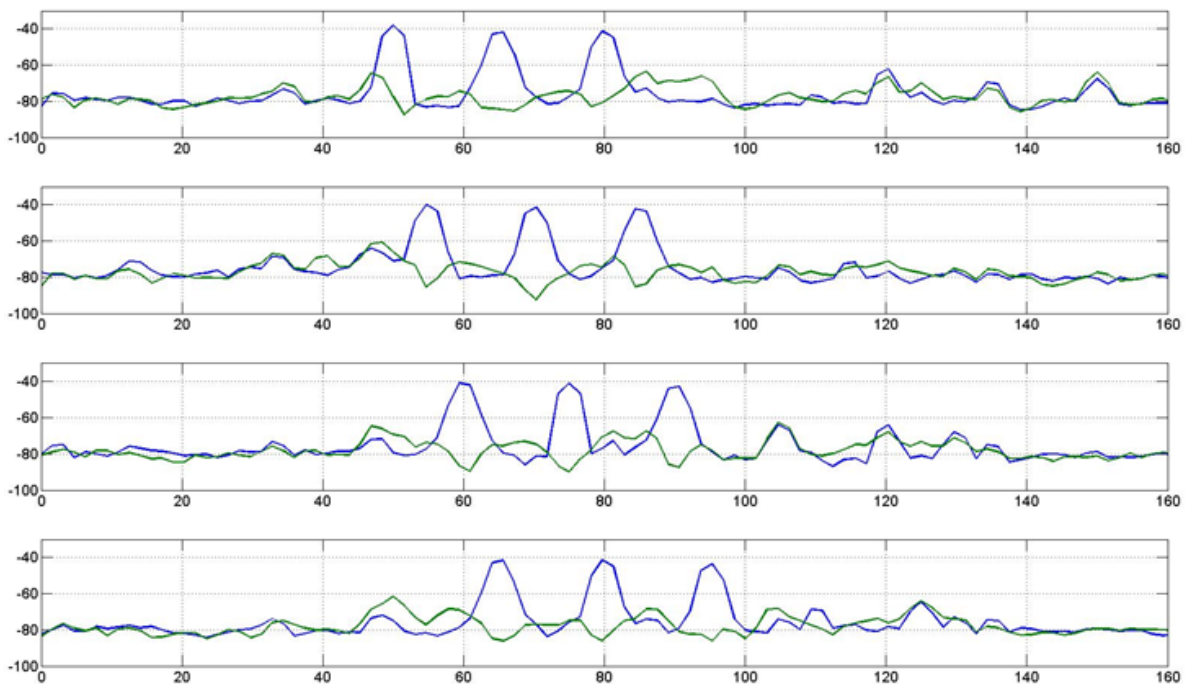


Рисунок 3.17. Оценки спектральной плотности выходного сигнала в разомкнутом (без компенсации) и замкнутом (с компенсацией) контурах при экспериментальных исследованиях, постоянные частоты. По оси абсцисс частота в Гц, по оси ординат оценка спектральной плотности, децибелы.

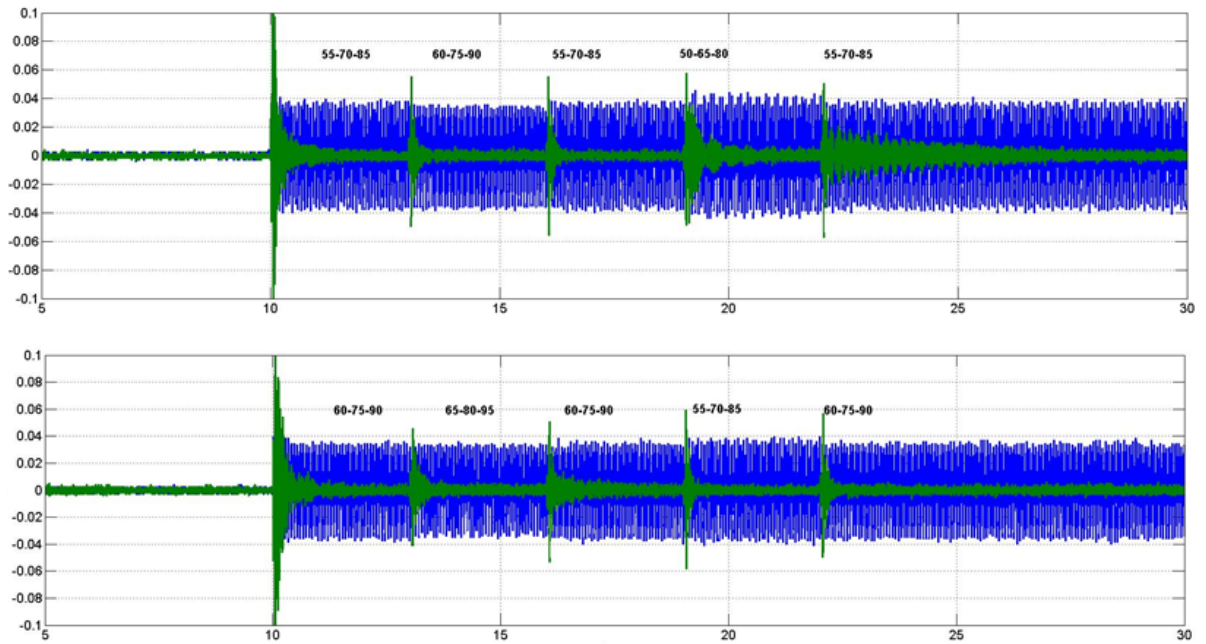


Рисунок 3.18. Выходные сигналы в разомкнутом (без компенсации) и замкнутом (с компенсацией) контурах при экспериментальных исследованиях при ступенчатом изменении частот. По оси абсцисс время в секундах, по оси ординат выходной сигнал тензометрического датчика, вольты.

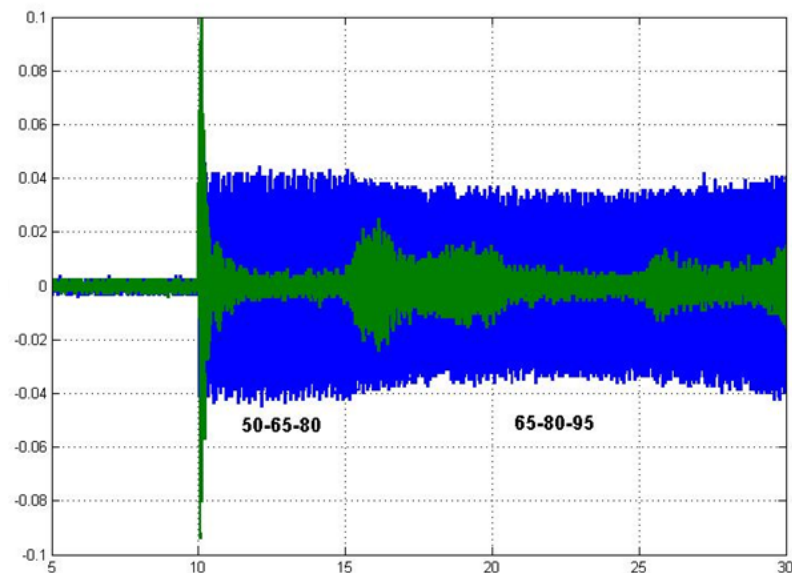


Рисунок 3.19. Выходной сигнал в разомкнутом (без компенсации) и замкнутом (с компенсацией) контурах при экспериментальных исследованиях при линейном изменении частот. По оси абсцисс время в секундах, по оси ординат выходной сигнал тензометрического датчика, вольты.

3.5 Выводы по главе

В настоящей главе предложен метод построения алгоритма компенсации детерминированных мультисинусоидальных возмущений, развивающий полученные в Главе 2 результаты. Предложенный метод основан на следующем подходе: пусть доступны измерению некоторые сигналы, являющиеся суммами синусоидальных компонент тех же частот, что и возмущение. Тогда, при выполнении некоторых допущений, оценка возмущения может быть представлена как линейная комбинация этих сигналов. Такой подход приводит к построению адаптивного наблюдателя возмущения, где параметры декомпозиции находятся с использованием методов идентификации. При этом показано, что опорные сигналы, обладающие требуемыми свойствами, могут быть сформированы с использованием набора линейных фильтров.

На основе предложенного адаптивного наблюдателя возмущения был построен прямой адаптивный регулятор, обеспечивающий компенсацию возмущения. К достоинствам полученного регулятора относится то, что для его построения не требуется знать точно число синусоидальных компонент в возмущающем сигнале (что существенно отличает его от алгоритмов компенсации, рассмотренных в Главе 2), вместо этого достаточно знать верхнюю границу этого числа.

Полученный алгоритм компенсации были использован в рамках международных тестовых испытаний по подавлению вибрация для электромеханических объектов. Полученные в ходе экспериментальных исследований результаты убедительно иллюстрируют работоспособность предложенного метода и достигнутые высокие показатели качества. Близость результатов численного моделирования и экспериментальных исследований иллюстрирует низкую чувствительность использованного алгоритма компенсации к неизбежным на практике отличиям в поведении объекта управления и его линейной модели.

К недостаткам метода можно отнести тот факт, что при разработке алгоритма компенсации не учитываются возможные ограничения на максимальное усиление шумов измерений и остаточных колебаний. Как было обнаружено в ходе эксперимента, несмотря на существенное подавление вибраций в целом, на отдельных частотах может наблюдаться усиление сигналов. Развитие предложенного метода и устранение указанного недостатка являются предметом дальнейших исследований.

Глава 4

СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ НЕИЗМЕРЯЕМЫХ СОСТОЯНИЙ К ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ПОСТОЯННЫХ ПАРАМЕТРОВ

В настоящей главе рассматривается решение Задачи 2, сформулированной в разделе 1.3, а именно оценивание неизмеряемой части вектора состояний нелинейной системы (1.1). Для решения задачи предложен адаптивный наблюдатель, оценивающий вектор неизвестных параметров. В роли вектора неизвестных параметров выступает вектор начальных условий некоторой подсистемы, полученной при частичной замене координат. Показано, что при выполнении некоторых допущений, такая оценка может быть использована для восстановления неизмеряемой части вектора состояний исходной системы. В главе приводятся примеры использования предложенного метода в задаче оценивания положения бездатчикового электродвигателя и в задаче оценивания состояний преобразователя тока. Полученные в данной главе результаты обобщают и расширяют результаты, ранее представленные в работах [36–38, 61].

Глава состоит из 7 разделов. В разделе 4.1 приводится постановка задачи и формулируются необходимые допущения. В разделе 4.2 рассматриваются отличия предложенного адаптивного наблюдателя от известных аналогов, а в разделе 4.3 изложен метод построения наблюдателя. В разделе 4.4 показана связь предложенного наблюдателя с понятиями наблюдаемости и идентифицируемости для линейных систем. Иллюстративные примеры рассмотрены в разделе 4.5 для преобразователя тока и в разделе 4.5 для бездатчикового электродвигателя. Глава завершается выводами, приведёнными в разделе 4.7

4.1 Постановка задачи

Для полноты изложения приведём здесь формулировку Задачи 2¹.

С учётом Допущения 1.3 перепишем уравнения (1.4)-(1.6) как

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_x(x, y, u) \\ \dot{y} &= f_y(x, y, u),\end{aligned}\tag{4.1}$$

где y – измеряемый вектор состояний (выход системы), x – подлежащий оценке неизмеряемый вектор состояний. В силу Допущения 1.1, $f_x : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ и $f_y : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ – достаточно гладкие функции, а вектор входных сигналов $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ такой, что все траектории системы ограничены. Выражения (4.1) совпадают с выражениями (1.12)-(1.14) при выборе $x(t) \equiv x_2(t)$. Функции f_1 и f_2 переобозначены как f_y и f_x соответственно.

Ставится задача построения наблюдателя неизмеряемого вектора состояний x , то есть нахождения таких функций $F : \mathbb{R}^{n_\xi} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n_\xi}$ и $G : \mathbb{R}^{n_\xi} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$, что наблюдатель следующего вида

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= F(\xi, y, u) \\ \hat{x} &= G(\xi, y, u),\end{aligned}\tag{4.2}$$

обеспечивает ограниченность сигналов ξ и, кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{x}(t) - x(t)| = 0,\tag{4.3}$$

для всех начальных условий $(x(0), y(0), \xi(0)) \in \mathbb{R}^{n_x+n_y+n_\xi}$ и входных воздействий $u \in \mathcal{U}$, принадлежащих некоторому классу.

Стоит отметить, что, в отличие от ряда традиционных подходов к построению наблюдателей, в приведённой постановке задачи также накладывается некоторое ограничение на выходной сигнал $u(t)$, а именно его принадлежность к

¹Для упрощения изложения материала в данной главе будут использованы некоторые обозначения, отличающиеся от введённых в Главе 1.

некоторому классу, рассмотренному далее. Это связано с тем, что задача построения адаптивного наблюдателя будет решаться с привлечением методов идентификации и оценивания постоянных параметров, для чего требуется допущение о “достаточном возбуждении” входного сигнала. Подробное обсуждение роли входного сигнала в задачах оценивания может быть найдено, например, в работе [3].

4.2 Обзор наблюдателей для нелинейных систем

Сама по себе проблема построения наблюдателей для нелинейных систем давно привлекает внимание исследователей, что во многом объясняется важностью этой задачи для тех практических приложений, где некоторые состояния объектов управления не измеряются в силу технических или экономических причин. Соответственно, на данный момент известен ряд решений этой задачи, подробный обзор которых может быть найден в работах [3, 12]. В настоящем разделе не ставится задача провести детальный обзор известных решений, вместо этого будут указаны их основные отличия от предлагаемого в главе метода.

Как уже было указано выше, в настоящей главе предложен метод построения (глобально устойчивого) адаптивного наблюдателя для класса нелинейных систем (4.1). Указанная проблема решается путём сведения задачи оценивания состояний к задаче оценивания неизвестных постоянных параметров, такое семейство наблюдателей будем в дальнейшем обозначать как Адаптивный Наблюдатель с Оценкой Параметров (АНОП).

В предложенном в настоящей главе подходе в качестве вектора неизвестных параметров выступает вектор начальных условия некоторой подсистемы. В силу такого перехода, для работоспособности наблюдателя необходимо сделать два допущения. Первое допущение связано с решением уравнения в частных производных (УЧП), позволяющим найти такую замену координат,

которая приводит систему к требуемой форме, позволяющей параметризовать решение посредством вектора неизвестных постоянных параметров. Второе же допущение относится к возможности идентификации (оценивания) полученного вектора параметров. Это допущение также связано с условием “достаточного возбуждения” [11, 108]. В частности, оно может быть сведено к допущениям о “регулярности” или “универсальности” входного сигнала исходной системы до замены координат. Отметим, что такое допущение является стандартным для многих наблюдателей [2, 3, 12].

Следует отметить, что в отличие от широкого класса наблюдателей, основанных на традиционном подходе с использованием линеаризации исходной системы [7], при котором требуется найти решения уравнений в частных производных, накладывающих существенные ограничения на систему, в предложенном в настоящей главе подходе накладываемые на систему ограничения заметно мягче. Так же предложенный АНОП выгодно отличается от наблюдателей Казантиса-Кравариса-Люенбергера [8]. Действительно, хотя оба вида наблюдателей требуют инъективности вводимой замены координат, в предлагаемом АНОП такое требование формулируется только для части переменных, в то время как для наблюдателей Казантиса-Кравариса-Люенбергера такое требование выдвигается к полному вектору состояний. Известно, например, что необходимость удовлетворить этому требованию часто препятствует использованию таких наблюдателей на практике [111].

4.3 Построение адаптивного наблюдателя

4.3.1 Параметризация системы

Допущение 4.1. Пусть существуют следующие три преобразования:

$$\phi : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$$

$$\phi^L : \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$$

$$h : \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n_z},$$

где $n_z \geq n_x$, такие, что:

(1) (Обратимость $\phi(\cdot, \cdot)$ относительно первого аргумента)

$$\phi^L(\phi(x, y), y) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n_x}, \forall y \in \mathbb{R}^{n_y}.$$

(2) (Приводимость к каскадной форме)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} f_x(x, y, u) + \frac{\partial \phi}{\partial y} f_y(x, y, u) = h(y, u). \quad (4.4)$$

Если выполняется пункт (2) Допущения 4.1, то существует частичное преобразование координат

$$z = \phi(x, y), \quad (4.5)$$

удовлетворяющее

$$\dot{z} = h(y, u). \quad (4.6)$$

Более того, из обратимости функции $\phi(\cdot, \cdot)$ относительно первого аргумента (пункт (1) Допущения 4.1) следует, что вектор состояний x может быть восстановлен по измерениям z и y следующим образом

$$x = \phi^L(z, y). \quad (4.7)$$

Схема полученной каскадной структуры приведена на рисунке 4.1.

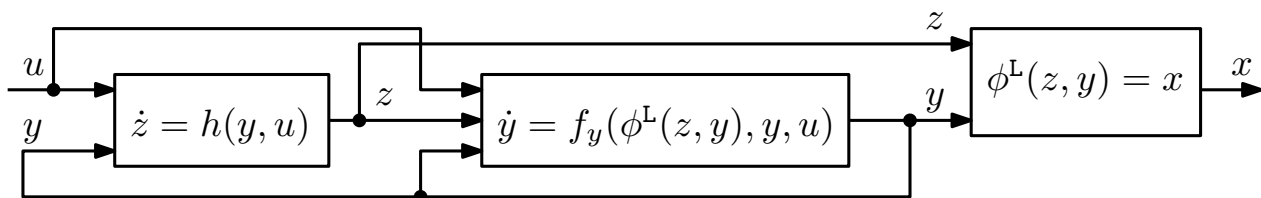


Рисунок 4.1. Схема полученной каскадной структуры при частичной замене координат.

Утверждение 4.1. Рассмотрим систему (4.1), удовлетворяющую Допущению 4.1. Введём в рассмотрение дополнительную динамику

$$\dot{\chi} = h(y, u), \quad (4.8)$$

где $\chi(0) \in \mathbb{R}^{n_z}$. Тогда можно построить отображение

$$\Phi : \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n_z} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y},$$

такое что

$$\dot{y} = \Phi(\chi, y, u, \theta) \quad (4.9)$$

$$x = \phi^L(\chi + \theta, y), \quad (4.10)$$

где $\theta \in \mathbb{R}^{n_z}$ – вектор неизвестных постоянных параметров.

Доказательство. Из выражений (4.6) и (4.8) получим

$$\dot{z}(t) = \dot{\chi}(t).$$

Проинтегрировав это выражение, запишем

$$z(t) = \chi(t) + \theta, \quad (4.11)$$

где

$$\theta := z(0) - \chi(0). \quad (4.12)$$

Подставляя (4.11) в (4.7), получим (4.10). Таким образом, регрессионная модель (4.9) может быть найдена при подстановке (4.10) в (4.1), а именно

$$f_y(\phi^L(\chi + \theta, y), y, u) =: \Phi(\chi, y, u, \theta), \quad (4.13)$$

что и требовалось доказать. \square

4.3.2 Построение наблюдателя

Из Утверждения 4.1 следует, что задача оценивания неизмеряемого вектора состояний x может быть представлена как задача оценивания векторов постоянных параметров регрессионной модели (4.9), где оценка вектора состояний может быть найдена как

$$\hat{x} = \phi^L(\chi + \hat{\theta}, y), \quad (4.14)$$

где $\hat{\theta} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$ – текущая оценка вектора постоянных параметров θ . Таким образом, для построения АНОП требуется сформировать оценку вектора θ .

Рассмотрим следующее допущение.

Допущение 4.2. Пусть существуют преобразования

$$H : \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_\zeta} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n_\zeta}$$

$$N : \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_\zeta} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n_z},$$

где $n_\zeta > 0$, такие что устройство оценки параметра θ

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= H(\chi, \zeta, y, u) \\ \hat{\theta} &= N(\chi, \zeta, y, u), \end{aligned} \quad (4.15)$$

совмещённое с расширенной динамикой (4.8) и регрессионной моделью (4.9), обеспечивает ограниченность ζ и выполнение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{\theta}(t) - \theta| = 0, \quad (4.16)$$

для всех начальных условий $(y(0), \chi(0), \zeta(0)) \in \mathbb{R}^{n_y + n_z + n_\zeta}$ и некоторого класса входных воздействий $u \in \mathcal{U}$.

На основе выражений (4.8), (4.10), (4.14), (4.15) и Допущения (4.16) можно сформулировать следующее следствие, описывающее построение адаптивного наблюдателя для системы (4.1). Доказательство этого следствия напрямую вытекает из приведенных выше рассуждений.

Следствие 4.1. Рассмотрим систему (4.1), удовлетворяющую Допущению 4.1 и Допущению 4.2 при $u \in \mathcal{U}$. Тогда адаптивный наблюдатель для части переменных вида (4.2), обеспечивающий (4.3), может быть получен как

$$\begin{aligned} \xi &:= \text{col}\{\chi, \zeta\} \\ F(\xi, y, u) &:= \begin{bmatrix} h(y, u) \\ H(\chi, \zeta, y, u) \end{bmatrix} \\ G(\xi, y, u) &:= \phi^L(\chi + N(\chi, \zeta, y, u), y). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Как и многие конструктивные методы построения наблюдателей, предложенный выше метод требует найти решение для параметризованного УЧП, а именно (4.4), где $h(y, u)$ – произвольная функция. В работах [2, 3, 12, 111] приведен обзор современной литературы по построению наблюдателей и связанным с ними УЧП. Так как нахождение решения соответствующего УЧП является ключевым шагом в построении предложенного АНОП, то ниже представлены некоторые соображения относительно существования такого решения.

Для упрощения изложения, обозначим вектор $X := \text{col}\{x, y\}$ и u -параметризованное векторное поле

$$\begin{aligned} f_u(X) &:= \text{col}\{f_x(X, u), f_y(X, u)\} \\ h_u(X) &:= h(y, u). \end{aligned}$$

Перепишем УЧП (4.4) в поэлементном виде как

$$\frac{\partial \phi_i(X)}{\partial X} f_u(X) = (h_u)_i(X), \quad i = 1, \dots, n_z. \quad (4.18)$$

По аналогии с построениями, приведёнными в работе [112], определим n_z функций $\tilde{\phi}_i : \mathbb{R}^{n_x+n_y} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом

$$\tilde{\phi}_i(X, s) := \phi_i(X) - s, \quad i = 1, \dots, n_z.$$

Тогда УЧП (4.18) можно представить в гомогенном виде

$$\frac{\partial \tilde{\phi}_i(X, s)}{\partial X} f_u(X) + \frac{\partial \tilde{\phi}_i(X, s)}{\partial s} (h_u)_i(X) = 0. \quad (4.19)$$

Известно [113], что если в некоторой окрестности $X_0 \in \mathbb{R}^{n_x+n_y}$ равномерно по u выполняется равенство

$$\text{rank} \begin{bmatrix} f_u(X) \\ (h_u)_i(X) \end{bmatrix} = 1, \quad i = 1, \dots, n_z, \quad (4.20)$$

то уравнение (4.19) имеет локальное решение вокруг точки $(X_0, s_0) \in \mathbb{R}^{n_x+n_y} \times \mathbb{R}$. К сожалению, условие (4.20) может оказаться слишком сильным, так как оно накладывает ограничения на возможные траектории движения системы (4.1) в окрестностях точки равновесия. Такое ограничение особенно существенно, если для системы (4.1) решается задача стабилизации.

Кроме того, даже если условие (4.20) выполняется и решение существует, то остаётся открытым вопрос его записи в аналитической форме, что требуется для построения наблюдателя. Таким образом, задача решения УЧП остаётся важнейшим компонентом предложенного метода. Отметим, однако, что как будет показано далее, эта задача может быть успешно решена для ряда прикладных задач.

Замечание 4.1. Кроме необходимости найти решение УЧП (4.4), дополнительная сложность возникает при необходимости выбора преобразования $h(y, u)$, обеспечивающего для функции замены координат $\phi(x, y)$ её обратимость относительно аргумента x . Следует отметить, что это свойство накладывает на функцию замены части координат $\phi(x, y)$, в отличие от требования инъективности для функции замены координат

для полного вектора состояния, возникающего при построении наблюдателей Казантиса-Кравариса-Лиенбергера [8].

Замечание 4.2. В общем случае, регрессионная модель (4.9) зависит от нелинейных параметров нелинейно. И хотя в настоящее время известен ряд частных решений задачи оценивания при нелинейной параметризации [114–118], сама проблема построения таких оценок остаётся открытой. С другой стороны, для моделей с линейной параметризацией проблема оценивания имеет стандартные решения. В частности, известны решения [11, 12, 108], позволяющие построить оценку вектора параметров θ для линейно параметризованной системы вида

$$\dot{y} = \Phi_0(\chi, y, u) + \Phi_1(\chi, y, u)\theta, \quad (4.21)$$

с известными функциями $\Phi_0 : \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ и $\Phi_1 : \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_z}$. Иллюстративные примеры приведены в разделах 4.5 и 4.6.

Замечание 4.3. Хорошо известно [108], что для обеспечения сходимости параметров требуется обеспечить определённый уровень возбуждения в сигналах, это условие неявным образом скрывается в требовании $u \in \mathcal{U}$ в Допущении 4.2. Множество \mathcal{U} в этом случае характеризует те входные сигналы, которые обеспечивают требуемое возбуждение. Это условие имеет ту же природу, что и условие “универсальности” или “регулярности” входного сигнала, часто формулируемое при построении классических наблюдателей [2, 3, 12]. Например, для линейной регрессионной модели вида (4.21) известна точная формулировка этого условия, называемая условием неисчезающего возбуждения. А именно, для матрицы $\Phi_1(\chi, y, u)$ существуют константы $\delta > 0$ и $T > 0$, такие что для всех $t \geq 0$ выполняется

$$\int_t^{t+T} \Phi_1^\top(\chi(s), y(s), u(s)) \Phi_1(\chi(s), y(s), u(s)) ds \geq \delta I_{n_z}. \quad (4.22)$$

При выполнении условия неисчезающего возбуждения для модели (4.21) можно показать глобальную сходимость оценок параметров. В этом случае множество \mathcal{U} может быть задано как

$$\mathcal{U} := \{u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m \mid (4.22) \text{ выполняется для } (4.8), (4.9)\}.$$

Из выражения (4.22) видно, что если размерность вектора измеряемых состояний не меньше размерности вектора неизменяемых состояний, то есть $n_y \geq n_z$, то условие неисчезающего возбуждения может быть сформулировано как условие полного ранга для матрицы $\Phi_1(\chi, y, u)$. В частности, это справедливо при построении наблюдателей для механических систем, где измеряются положения, но не скорости (импульсы). При этом константы δ и T связаны со скоростью сходимости ошибок оценивания [11, 119].

Так же отметим, что во многих случаях нелинейно параметризованная система может быть приведена к линейно параметризованной форме за счёт перепараметризации [117]. Однако, по скольку перепараметризация часто приводит к увеличению размерности и увеличению числа неизвестных параметров, то требования к достаточному возбуждению, накладываемые на входной сигнал, могут оказаться более жёсткими.

4.4 Случай линейной стационарной системы

Предложенные в настоящей главе АНОП предложен для оценивания состояний нелинейных систем, и вряд ли должен использоваться при работе с линейными системами. Однако, представляется интересным показать, что даже в простом случае линейной системы связь между наблюдаемостью [120] и идентифицируемостью [121] этой системы и Допущением 4.1 Допущением 4.2 может оказаться неочевидной.

Утверждение 4.2. Пусть система (4.1) является линейной и стационарной, то есть

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u, \quad (4.23)$$

где A_{ij} и B_i , $i, j = 1, 2$ – постоянные матрицы соответствующих размерностей. Тогда справедливы следующие утверждения:

(У1) Из наблюдаемости системы (4.23) по отношению к выходному сигналу y не следует Допущение 4.1.

(У2) Из Допущения 4.1 не следует наблюдаемость системы (4.23).

(У3) Если Допущение 4.1 выполняется, то для идентифицируемости вектора параметров θ , определённого в Утверждении 4.1, необходима наблюдаемость системы (4.23). Следовательно, наблюдаемость системы (4.23) необходима для выполнения Допущения 4.2.

Доказательство. Выберем

$$\phi(x, y) = T_1 x + T_2 y,$$

где $T_1 \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$ и $T_2 \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$. Так как $n_z \geq n_x$, условие (1) Допущения 4.1 выполняется, откуда

$$\text{rank } T_1 = n_x. \quad (4.24)$$

Тогда справедливо

$$\phi^L(z, y) = T_1^\dagger (z - T_2 y), \quad (4.25)$$

где

$$T_1^\dagger := (T_1^\top T_1)^{-1} T_1^\top.$$

В этом случае УЧП (4.4) принимает вид алгебраического равенства

$$T_1 A_{11} + T_2 A_{21} = 0. \quad (4.26)$$

Теперь, используя критерий наблюдаемости Попова [120], можно сделать вывод, что система (4.23) будет наблюдаемой тогда и только тогда, когда

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI_{n_x} - A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} = n_x, \quad \forall s \in \sigma\{A_{11}\}, \quad (4.27)$$

где $\sigma\{\cdot\}$ обозначает множество собственных значений матрицы.

Для доказательства Утверждения (У1) сконструируем пример наблюдаемой системы, такой что эта система не удовлетворяет Допущению 4.1. Выберем $n_x = 2$ и $n_y = 1$, а также выберем $A_{11} = \text{diag}\{a_1, a_2\}$, где $a_1 \neq a_2 \neq 0$, и $A_{21} = [a, b]$, где $a, b \neq 0$. Тогда матрица в условии (4.27) имеет вид

$$\begin{bmatrix} sI_2 - A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s - a_1 & 0 \\ 0 & a - a_2 \\ a & b \end{bmatrix},$$

и ранг этой матрицы равен 2 при $s = a_i$, $i = 1, 2$. Следовательно, сконструированная система наблюдаема. Однако, для всех $n_z \geq 2$, выражение (4.26) эквивалентно выражению

$$T_1 = -T_2 A_{21} A_{11}^{-1}.$$

Следовательно,

$$\text{rank } T_1 \leq \min\{\text{rank } T_2, \text{rank } A_{21}\} = 1 < 2 = n_x,$$

что нарушает условие (4.24).

Утверждение (У2) так же может быть доказано путём построения ненаблюдаемой системы, удовлетворяющей Допущению 4.1. Выберем $n_x = n_y = n_z = 1$ и $A_{21} = 0$, откуда, в силу (4.27), следует, что система ненаблюдаема. Однако, при выборе $A_{11} = 0$ уравнение (4.26) имеет своим решением $T_1 = 1$, $T_2 = 0$, и, следовательно, Допущение 4.1 выполняется. Отметим, однако, что отсюда не следует возможность построения адаптивного

наблюдается для ненаблюдаемой системы, так как при выбранных параметрах задача оценивания вектора θ не может быть решена.

Рассмотрим доказательство Утверждения (У3). Можно показать, что для рассматриваемой линейной системы регрессионная форма (4.9) имеет вид

$$\dot{y} = A_{21}T_1^\dagger \chi + (A_{22} - A_{21}T_1^\dagger T_2)y + B_2u + A_{21}T_1^\dagger \theta,$$

где $A_{21}T_1^\dagger \in \mathbb{R}^{n_y \times n_z}$, в то время как $A_{21} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$. Следовательно, вектор θ может быть идентифицирован только если [121] выполняется $n_y \geq n_z$ и $\text{rank } A_{21} = n_x$, откуда, в силу условия (4.27), следует наблюдаемость системы. \square

4.5 Построение адаптивного наблюдателя для преобразователя Чука

Рассмотрим пример построения АНОП для решения задачи оценивания состояний преобразователя тока. Предложенный в настоящей главе метод может быть использован для построения наблюдателей для широкого класса преобразователей, однако, с целью иллюстрации метода, рассмотрим частный случай преобразователя Чука. Схема преобразователя приведена на рисунке 4.2.

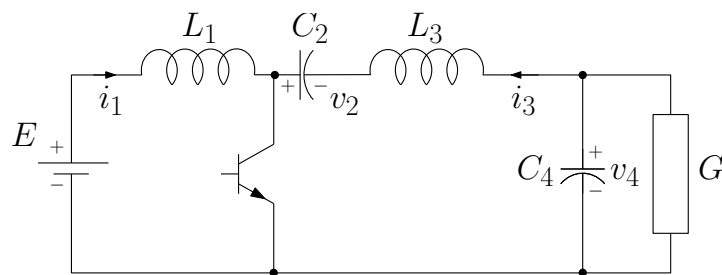


Рисунок 4.2. Схема преобразователя Чука.

Усреднённая модель работы преобразователя описывается следующими выражениями

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} &= -(1-u)v_2 + E \\ C_2 \dot{v}_2 &= (1-u)i_1 + ui_3 \\ L_3 \frac{di_3}{dt} &= -uv_2 - v_4 \\ C_4 \dot{v}_4 &= i_3 - Gv_4, \end{aligned} \tag{4.28}$$

где L_1, C_2, L_3, C_4, E и G – положительные константы, а $u \in (0, 1)$ – управляющий сигнал, имеющий смысл величины скважности. Дополнительные детали о преобразователе и вывод модели (4.28) могут быть найдены в работе [12].

Чтобы полнее проиллюстрировать предложенный подход к построению АНОП, рассмотрим два сценария работы преобразователя. Для первого сценария будем полагать, что измеряются сигналы (v_2, v_4) , а для второго сценария – что измеряются сигналы (v_2, i_3) . С практической точки зрения первый сценарий представляется более вероятным, так как включает в себя измерение только напряжений, но не токов. С другой стороны, для второго сценария в работе [12] был предложен наблюдатель, основанный на подходе I&I (Погружение и Инвариантность), и в настоящем разделе приводится сравнение работы двух подходов.

4.5.1 Первый сценарий работы преобразователя

Обозначим $y := \text{col}\{v_2, v_4\}$ и $x := \text{col}\{i_1, i_3\}$. Тогда модель (4.28) примет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{1}{L_1}(1-u)y_1 + \frac{E}{L_1} \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{L_3}uy_1 - \frac{1}{L_3}y_2.\end{aligned}$$

Так как правая часть этих выражений не зависит от x , то можно выбрать

$$\phi(x, y) = x.$$

Тогда дополнительная динамика имеет вид

$$\dot{\chi} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1}(1-u)y_1 + \frac{E}{L_1} \\ -\frac{1}{L_3}uy_1 - \frac{1}{L_3}y_2 \end{bmatrix} =: h(y, u), \quad (4.29)$$

а регрессионная форма

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \Phi_0(\chi, y, u) + \Phi_1(u)\theta \\ \theta &:= x(0) - \chi(0)\end{aligned} \quad (4.30)$$

где

$$\Phi_0(\chi, y, u) := \begin{bmatrix} \frac{1}{C_2}(1-u)\chi_1 + \frac{1}{C_2}u\chi_2 \\ \frac{1}{C_4}\chi_2 - \frac{G}{C_4}y_2 \end{bmatrix}, \quad \Phi_1(u) := \begin{bmatrix} \frac{1}{C_2}(1-u) & \frac{1}{C_2}u \\ 0 & \frac{1}{C_4} \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Модель (4.30) включает производные по времени от y . Чтобы получить классическую статическую регрессионную модель можно применить стандартную технику фильтра состояний [122], аналогичную использованной в главе 2. Определим фильтрованные сигналы как

$$\overline{(\cdot)} := \frac{\alpha}{p + \alpha}(\cdot), \quad (4.32)$$

где $p := \frac{d}{dt}$ и $\alpha > 0$ – настроечный параметр. Применяя фильтры к выражению (4.30) получим стандартную линейную статическую регрессионную модель

$$\vartheta = \overline{\Phi}_1\theta + \epsilon \quad (4.33)$$

где сигналы

$$\vartheta := \frac{\alpha p}{p + \alpha}y - \frac{\alpha}{p + \alpha}\Phi_0$$

доступны измерению и ϵ – экспоненциально затухающий сигнал, зависящий от начальных условиях фильтров и постоянной времени $\frac{1}{\alpha}$.

Для оценивания параметров регрессионной модели (4.33) может быть использован классический градиентный алгоритм оценивания

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \overline{\Phi}_1^\top (\vartheta - \overline{\Phi}_1 \hat{\theta}), \quad (4.34)$$

где матрица коэффициентов адаптации $\Gamma = \Gamma^\top > 0$ является настроечным параметром. Тогда наблюдатель состояний имеет вид

$$\hat{x} = \hat{\theta} + \chi.$$

Важно отметить, что матрица регрессора $\Phi_1(u)$, заданная выражением (4.31), имеет крайне простой вид. Действительно, в силу того, что эта матрица является верхнетреугольной, процессы оценивания первого и второго параметров

оказываются развязанными, и, более того, член регрессии, ассоциированный со вторым параметром, оказывается константой $\frac{1}{C_4}$. Также, так как матрица $\Phi_1(u)$ зависит только от входного сигнала u , то множество \mathcal{U} может быть задано как

$$\mathcal{U} := \{u : \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, 1) \mid \int_t^{t+T} \Phi_1^\dagger(s) ds \geq \delta I_2 > 0\},$$

где

$$\Phi_1^\dagger(s) := \begin{bmatrix} 1 - u(s) & (1 - u(s))u(s) \\ (1 - u(s))u(s) & u^2(s) + \frac{C_2^2}{C_4^2} \end{bmatrix}.$$

Несложно показать, что матрица в подинтегральном выражении является положительно определенной для всех $u \in (0, 1)$. Следовательно,

$$\mathcal{U} = \{u : \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, 1)\}$$

обеспечивает достаточное возбуждение и сходимость оценок.

Для иллюстрации и оценки работы предложенного метода построения АНОП было проведено численное моделирование. Моделирование было проведено для модели (4.28) в замкнутом контуре с регулятором, предложенным в Утверждении 8.2 работы [12]. А именно, закон управления имеет вид

$$u = \frac{|V_d|}{|V_d| + E} + \lambda \frac{G|V_d|v_2 + E(\hat{x}_2 - \hat{x}_1)}{1 + (G|V_d|v_2 + E(\hat{x}_2 - \hat{x}_1))^2} \quad (4.35)$$

где $V_d < 0$ – задание для выходного напряжения v_4 , и значение λ выбрано как

$$\lambda = \lambda_0 \min \left(\frac{|V_d|}{|V_d| + E}, \frac{E}{|V_d| + E} \right),$$

где $0 < \lambda_0 < 2$. Аналогичный контроллер, построенный по полному вектору состояний, то есть при замене \hat{x}_1 и \hat{x}_2 на i_1 и i_3 , соответственно, обеспечивает глобальную асимптотическую устойчивость желаемого положения равновесия, равно как и выполнение ограничений на управляющий сигнал.

Численное моделирование было проведено с использованием следующих значений параметров:

$$L_1 = 10 \text{ мГ},$$

$$C_2 = 22.0 \text{ мкФ},$$

$$L_3 = 10 \text{ мГ},$$

$$C_4 = 22.9 \text{ мкФ},$$

$$G = 0.0447,$$

$$E = 12\text{В}.$$

Начальные условия при моделировании выбраны как $x(0) = (0.5, -1)$, $y(0) = (10, -12)$. Желаемое значение для выходного напряжения выбрано как

$$V_d = \begin{cases} -25\text{В} & \text{при } 0 < t < 0,2 \\ -30\text{В} & \text{при } 0,2 < t < 0,4 \\ -15\text{В} & \text{при } 0,4 < t < 0,6 \\ -5\text{В} & \text{при } 0,6 < t < 0,8 \\ -20\text{В} & \text{при } 0,8 < t \end{cases}$$

Результаты моделирования представлены на рисунке 4.3 для выходного напряжения, на рисунке 4.4 для сигнала управления и на рисунках 4.5–4.6 для ошибок оценивания.

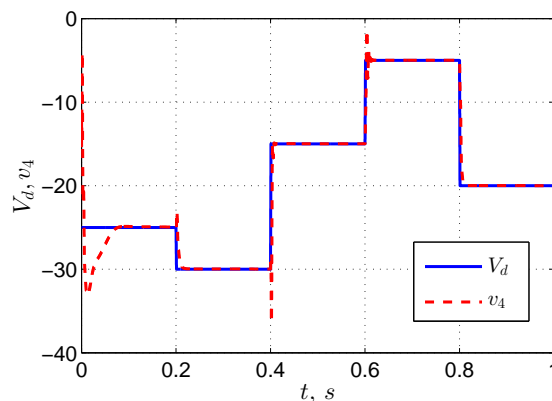


Рисунок 4.3. Задание V_d и выходное напряжение v_4 в модели (4.28) при $\alpha = 0.5$, $\Gamma = 0.001I_2$, первый сценарий работы преобразователя.

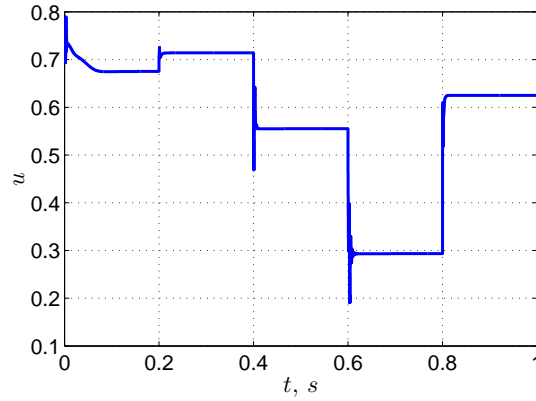


Рисунок 4.4. Сигнал управления u в модели (4.28) при $\alpha = 0.5$, $\Gamma = 0.001I_2$, первый сценарий работы преобразователя.

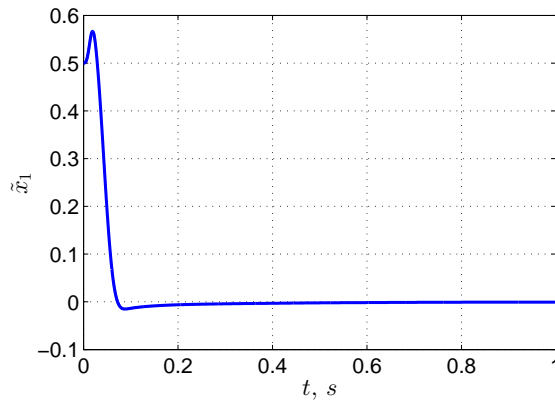


Рисунок 4.5. Ошибка оценивания $\tilde{x}_1 := \hat{x}_1 - i_1$, первый сценарий работы преобразователя.

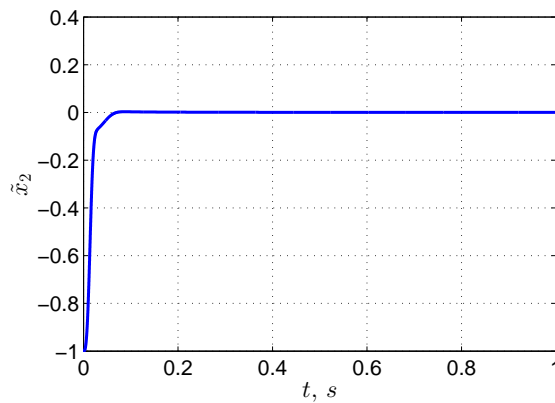


Рисунок 4.6. Ошибка оценивания $\tilde{x}_2 := \hat{x}_2 - i_2$, первый сценарий работы преобразователя.

4.5.2 Второй сценарий работы преобразователя

Обозначим теперь $y := \text{col}\{v_2, i_3\}$ и $x := \text{col}\{i_1, v_4\}$. Тогда из (4.28) получим

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{1}{L_1}(1-u)y_1 + \frac{E}{L_1} \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{C_4}y_2 - \frac{G}{C_4}x_2.\end{aligned}$$

Так как теперь правая часть выражения зависит от x_2 , то выбор $\phi(x, y) = x$, использовавшийся в первом сценарии, не применим. Выберем вместо этого

$$\phi(x, y) = x - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{GL_3}{C_4}y_2 \end{bmatrix},$$

что приводит к желаемому равенству для частичной замены координат $z = \phi(x, y)$:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1}(1-u)y_1 + \frac{E}{L_1} \\ \frac{1}{C_4}y_2 + \frac{G}{C_4}uy_1 \end{bmatrix} =: h(y, u).$$

Расширенная динамика задаётся как $\dot{\chi} = h(y, u)$, а регрессионная модель принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \Phi_0(\chi, y, u) + \Phi_1(u)\theta \\ \theta &:= x(0) - \chi(0) - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{GL_3}{C_4}y_2(0) \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (4.36)$$

где

$$\Phi_0(\chi, y, u) := \begin{bmatrix} \frac{1}{C_2}(1-u)\chi_1 + \frac{1}{C_2}uy_2 \\ -\frac{1}{L_3}uy_1 - \frac{1}{L_3}\chi_2 - \frac{GL_3}{C_4}y_2 \end{bmatrix}, \quad \Phi_1(u) := \begin{bmatrix} \frac{1}{C_2}(1-u) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_3} \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Тогда наблюдатель состояний может быть построен как

$$\hat{x} = \hat{\theta} + \chi + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{GL_3}{C_4}y_2 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Матрица регрессора $\Phi_1(u)$ вида (4.37) имеет диагональную форму, причём элемент матрицы, ассоциированный со вторым параметром, равен константе $-\frac{1}{L_3}$.

Очевидно, что в этом случае справедливо

$$\mathcal{U} = \{u : \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, 1)\},$$

и обеспечивается сходимость оценок параметров к истинным значениям.

В Утверждении 8.3 работы [12] был предложен следующий наблюдатель, построенный на основе метода I&I:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{I\&I} &= \begin{bmatrix} \hat{\zeta}_1 \\ \hat{\zeta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_2 \gamma_1 y_1 \\ L_3 \gamma_2 y_2 \end{bmatrix} \\ \dot{\hat{\zeta}}_1 &= \frac{1}{L_1} [-(1-u)y_1 + E] - \gamma_1 [(1-u)(\hat{\zeta}_1 + C_2 \gamma_1 y_1) + u y_2] \\ \dot{\hat{\zeta}}_2 &= \frac{1}{C_4} [y_2 - G(\hat{\zeta}_2 - L_3 \gamma_2 y_2)] - \gamma_2 [u y_1 + \hat{\zeta}_2 - L_3 \gamma_2 y_2], \end{aligned} \quad (4.39)$$

где $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ – настроечные параметры.

Было проведено численно моделирование АНОП, предложенного в настоящей главе, и наблюдателя (4.39). Симуляции были выполнены при тех же значениях параметров модели, что и в первом сценарии, подставляя \hat{x}_1 и \hat{x}_2 вместо i_1 и v_4 соответственно. На рисунках 4.7–4.10 приведены результаты моделирования АНОП с параметрами $\alpha = 1$, $\Gamma = \text{diag}\{0.01, 0.1\}$, а на рисунках 4.11–4.14 приведены результаты моделирования АНОП с параметрами $\alpha = 1$, $\Gamma = \text{diag}\{1, 10\}$. И на рисунках 4.15–4.18 приведены результаты моделирования I&I наблюдателя [12].

Результаты моделирования иллюстрируют работоспособность предложенного метода построения адаптивных наблюдателей для нелинейных систем на примере преобразователя Чука, а так же качество переходных процессов, в целом не уступающее известным аналогам.

4.6 Оценка положения ротора в бездатчиковом электродвигателе

В настоящем разделе рассматривается задача построения наблюдателя для оценки положения и потока в бездатчиковом синхронном электроприводе

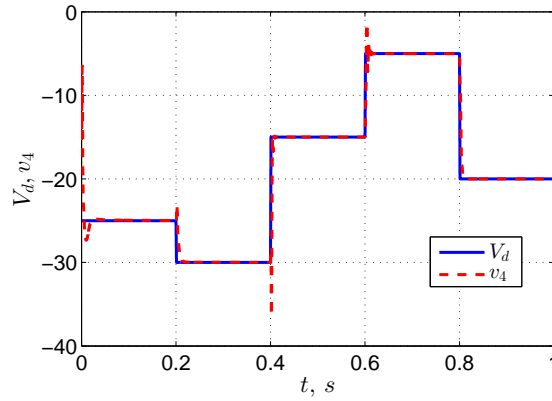


Рисунок 4.7. Задание V_d и выходное напряжение v_4 при $\alpha = 1$, $\Gamma = \text{diag}\{0.01, 0.1\}$, второй сценарий работы преобразователя.

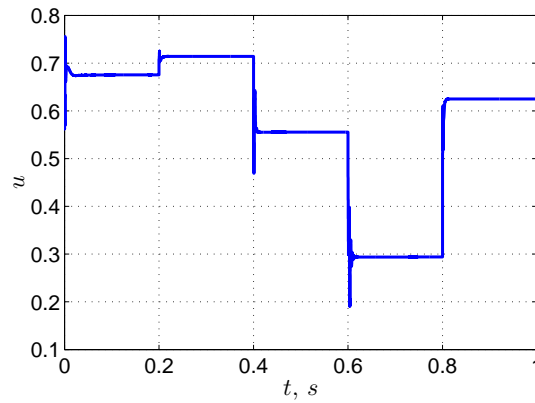


Рисунок 4.8. Сигнал управления u при $\alpha = 1$, $\Gamma = \text{diag}\{0.01, 0.1\}$, второй сценарий работы преобразователя.

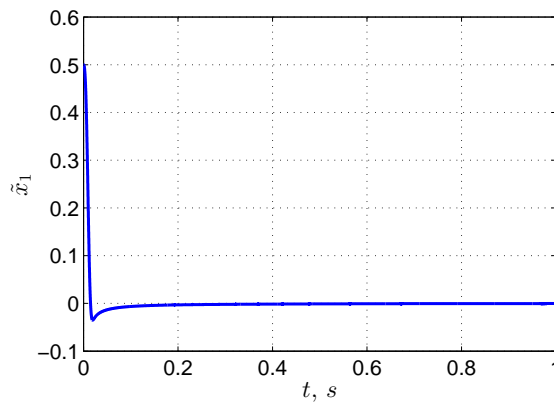


Рисунок 4.9. Ошибка оценвания $\tilde{x}_1 := \hat{x}_1 - i_1$, АНОП, второй сценарий работы преобразователя, $\alpha = 1$, $\Gamma = \text{diag}\{0.01, 0.1\}$.

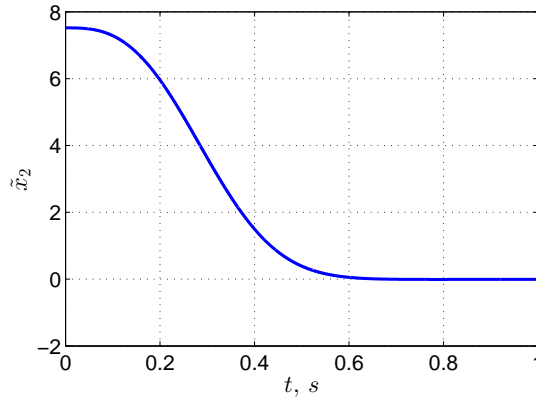


Рисунок 4.10. Ошибка оценвания $\tilde{x}_2 := \hat{x}_2 - v_4$, АНОП, второй сценарий работы преобразователя, $\alpha = 1$, $\Gamma = \text{diag}\{0.01, 0.1\}$.

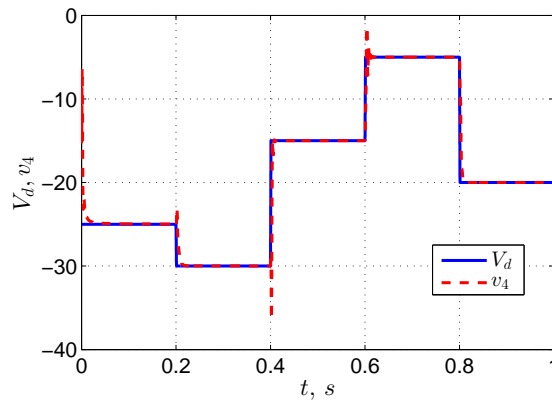


Рисунок 4.11. Задание V_d и выходное напряжение v_4 при $\alpha = 1$, $\Gamma = \text{diag}\{1, 10\}$, второй сценарий работы преобразователя.

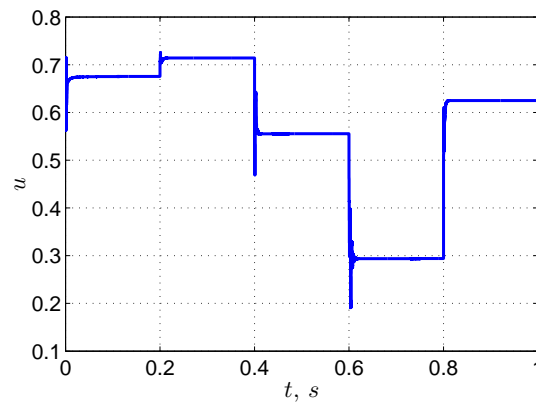


Рисунок 4.12. Сигнал управления u при $\alpha = 1$, $\Gamma = \text{diag}\{1, 10\}$, второй сценарий работы преобразователя.

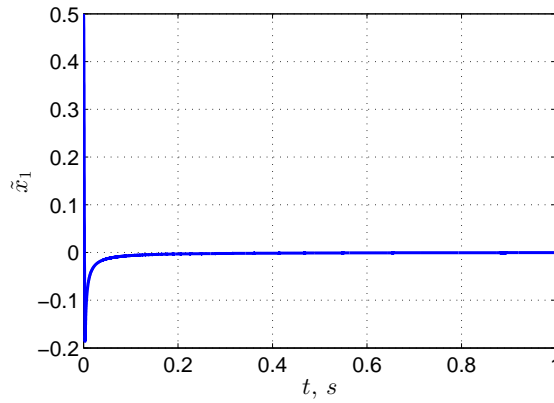


Рисунок 4.13. Ошибка оценвания $\tilde{x}_1 := \hat{x}_1 - i_1$, АНОП, второй сценарий работы преобразователя, $\alpha = 1$, $\Gamma = \text{diag}\{1, 10\}$.

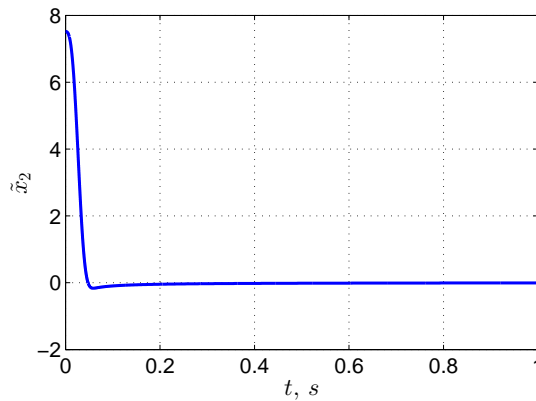


Рисунок 4.14. Ошибка оценвания $\tilde{x}_2 := \hat{x}_2 - v_4$, АНОП, второй сценарий работы преобразователя, $\alpha = 1$, $\Gamma = \text{diag}\{1, 10\}$.

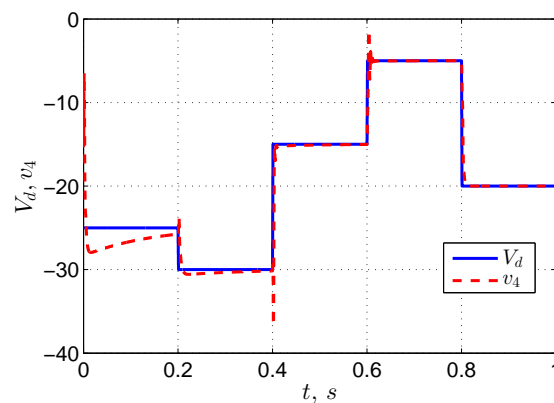


Рисунок 4.15. Задание V_d и выходное напряжение v_4 при использовании I&I наблюдателя [12], второй сценарий работы преобразователя, $\gamma_1 = 25$, $\gamma_2 = 1$.

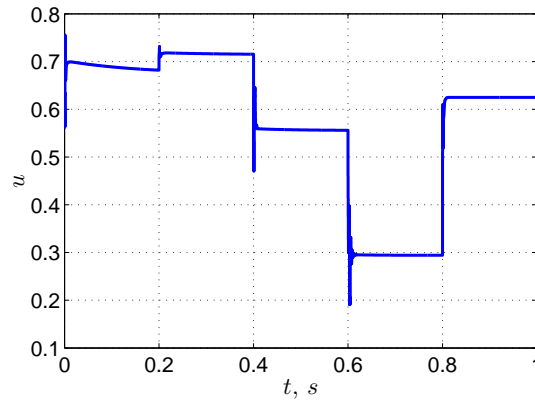


Рисунок 4.16. Сигнал управления u при использовании I&I наблюдателя [12], второй сценарий работы преобразователя, $\gamma_1 = 25$, $\gamma_2 = 1$.

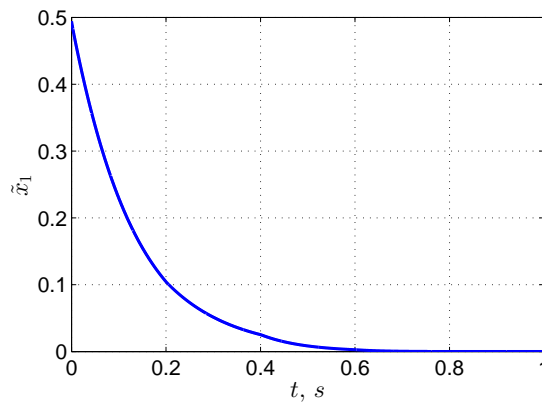


Рисунок 4.17. Ошибка оценвания $\tilde{x}_1 := \hat{x}_1 - i_1$ при использовании I&I наблюдателя [12], второй сценарий работы преобразователя, $\gamma_1 = 25$, $\gamma_2 = 1$.

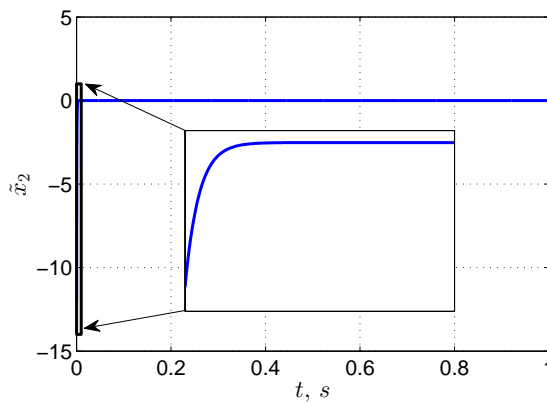


Рисунок 4.18. Ошибка оценвания $\tilde{x}_2 := \hat{x}_2 - v_4$ при использовании I&I наблюдателя [12], второй сценарий работы преобразователя, $\gamma_1 = 25$, $\gamma_2 = 1$.

с постоянными магнитами. Модель электрической машины, обозначения и основные соотношения взяты из работ [123–125].

4.6.1 Модель рассматриваемой системы

Рассмотрим электромеханическую систему, состоящую из n_λ индуктивных элементов и единичной массы. Обозначим поток в системе как $\lambda \in \mathbb{R}^{n_\lambda}$, а положение массы как $q \in \mathbb{R}$. Тогда запасённая в индуктивных элементах энергия может быть записана как

$$\mathcal{E}_M(i, q) := \frac{1}{2} i^\top L(q) i + \mu^\top(q) i$$

где $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\lambda \times n_\lambda}$ – положительно определенная матрица индуктивности (возможно, зависящая от положения q), $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\lambda}$ описывает потокосцепление, связанное с постоянными магнитами, и $i \in \mathbb{R}^{n_\lambda}$ – протекающие через индуктивные элементы токи. Кинетическая энергия массы описывается выражением

$$\mathcal{K}(\dot{q}) := \frac{1}{2} j \dot{q}^2,$$

где $j > 0$ – постоянный момент инерции. Будем полагать, что на систему могут воздействовать внешние силы, например, гравитационные, однако в системе отсутствуют другие элементы, способные запастись потенциальную энергию. Соответственно, потенциальная энергия системы описывается выражением

$$\mathcal{V}(q) := q\tau,$$

где $\tau \in \mathbb{R}$ – постоянные внешние силы.

С учётом введённых обозначений, динамическая модель рассматриваемой системы может быть получена и с использованием уравнений Эйлера-Лагранжа, а именно

$$L(q) \frac{di}{dt} + L'(q) \dot{q} i + \mu'(q) \dot{q} + Ri = Bu \quad (4.40)$$

$$j\ddot{q} - \frac{1}{2} i^\top L'(q) i - i^\top \mu'(q) + f\dot{q} = -\tau, \quad (4.41)$$

где $(\cdot)'$ обозначает взятие производной, $R = \text{diag}\{r_1, \dots, r_{n_\lambda}\} \geq 0$ – матрица сопротивлений, последовательно соединённых с индуктивными элементами, $B \in \mathbb{R}^{n_\lambda \times m}$ – постоянная матрица входных воздействий, $u \in \mathbb{R}^m$ – внешнее (управляющее) напряжение, и $f \geq 0$ – коэффициент вязкого трения.

Отметим, что как было показано в работе [125], полученная модель вида (4.40), (4.41) может быть использована также для описания динамики широкого класса электромеханических систем, включая левитируемый электромагнитами шар и различные виды электрических машин.

Задача построения наблюдателя для системы (4.40), (4.41) формулируется как задача восстановления неизмеряемого положения q при измерении сигналов $\text{col}\{i, \dot{q}\}$. Допущение об измерении скорости \dot{q} является достаточно сильным и ограничивает область применения такого наблюдателя. Однако, существует ряд прикладных задач, в которых такое допущение будет выполняться, то есть задач, когда в системе присутствует датчик скорости, но не датчик положения. Так же отметим, что для рассматриваемого далее электродвигателя предположение об измерении \dot{q} может быть устранено за счёт расширения размерности предлагаемого адаптивного наблюдателя, как показано в Замечании 4.4.

Используя основные соотношения электродинамики, запишем следующее выражение для вектора потока

$$\lambda = L(q)i + \mu(q). \quad (4.42)$$

Более того, справедливо

$$\dot{\lambda} = -Ri + Bu. \quad (4.43)$$

Так как величина тока i измеряется, то из выражения (4.43) следует, что подходящая частичная замена координат может быть выбрана как

$$\phi(q, i) = L(q)i + \mu(q),$$

где величина λ соответствует переменной z , ток i соответствует переменной y , а положение q соответствует переменной x , где z , y и x были определены в Утверждении 4.1. Очевидно, что такой выбор $\phi(q, i)$ удовлетворяет условию (2) Допущения 4.1, где $n_z = 2$

$$h(i, u) := -Ri + Bu.$$

В свою очередь, условие (1) Допущения 4.1 будет выполнено в том случае, если из выражения (4.42) будет возможно восстановить значение q по измерениям сигналов λ и i . Как будет показано далее, это справедливо для рассматриваемого в разделе электродвигателя.

Если измерению доступен только вектор токов i , то его производная по времени $\frac{di}{dt}$ в выражении (4.40) не может быть представлена в форме (4.1), то есть $\dot{y} = f_y(x, y, u)$, где x это положение q и y это i . Действительно, кроме q и i в выражение (4.40) также входит скорость \dot{q} . Следовательно, для построения регрессионной формы (4.9) необходимо ввести допущение об измеримости скорости \dot{q} . Однако, как будет показано в Замечании 4.4, это допущение может быть ослаблено за счёт увеличения размерности наблюдателя и вектора оцениваемых параметров.

4.6.2 Построение адаптивного наблюдателя с оценкой параметров

Перейдём к построению наблюдателя для рассматриваемого синхронного двигателя с постоянными магнитами. Тогда $n_\lambda = 2$, $m = 2$, $B = I_2$ и

$$\begin{aligned} L(q) &= LI_2 \\ \mu(q) &= \lambda_m \begin{bmatrix} \cos(n_p q) \\ \sin(n_p q) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

где $L > 0$ – индуктивность, $\lambda_m > 0$ описывает поток, создаваемый постоянными магнитами, $n_p > 0$ – число пар полюсов. Определим

$$\phi(q, i) := Li + \lambda_m \begin{bmatrix} \cos(n_p q) \\ \sin(n_p q) \end{bmatrix} = \lambda.$$

Тогда функция

$$\phi^L(\lambda, i) := \frac{1}{n_p} \arctan \left(\frac{\lambda_2 - Li_2}{\lambda_1 - Li_1} \right),$$

удовлетворяет условию (1) Допущения 4.1.

Расширенная динамика вида (4.8) может быть введена как

$$\dot{\chi} = -Ri + u. \quad (4.45)$$

Далее, интегрируя (4.43) с учётом (4.45) и полагая $B = I_2$, получим

$$\lambda(t) = \chi(t) + \theta, \quad (4.46)$$

где $\theta := \lambda(0) - \chi(0)$ – постоянный вектор неизвестных параметров, подлежащий оценке. Тогда, линейная по параметру θ регрессионная модель может быть записана как

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \Phi_0(\chi, i, \dot{q}, u) + \Phi_1(\dot{q})\theta \quad (4.47)$$

где

$$\Phi_0(\chi, i, \dot{q}, u) := \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -n_p \dot{q} \\ n_p \dot{q} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \frac{n_p \dot{q}}{L} \begin{bmatrix} \chi_2 \\ -\chi_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{L} u$$

и

$$\Phi_1(\dot{q}) := -n_p \dot{q} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Свою очередь, для линейной регрессионной модели (4.47) может быть использован классический градиентный алгоритм оценивания, построенный по аналогии с алгоритмом (4.33)–(4.34), приведённым в разделе 4.5, позволяющий

сформировать оценку $\hat{\theta}$. Тогда оценка положения может быть получена как

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}(t) &:= \chi(t) + \hat{\theta}(t), \\ \hat{q}(t) &:= \frac{1}{n_p} \arctan \left(\frac{\hat{\lambda}_2 - Li_2}{\hat{\lambda}_1 - Li_1} \right).\end{aligned}\quad (4.48)$$

Замечание 4.4. Как было отмечено ранее, допущение об измеримости скорости \dot{q} может не выполняться для ряда прикладных задач. Однако, это допущение может быть ослаблено за счёт увеличения размерности вектора неизвестных параметров θ . Действительно, из выражений (4.42) и (4.44) следует, что

$$|\lambda - Li|^2 = \lambda_m^2.$$

Далее, подставляя (4.46) в полученное выше равенство, после ряда преобразования получим следующую статическую линейную регрессионную модель

$$Y(\chi, i) = S^\top(\chi, i)\eta, \quad (4.49)$$

где

$$\begin{aligned}Y(\chi, i) &:= |\chi - Li|^2 \\ S(\chi, i) &:= \begin{bmatrix} -2(\chi - Li) \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.50)$$

измеряются, а расширенный вектор неизвестных параметров определён как

$$\eta := \begin{bmatrix} \theta \\ \lambda_m^2 - |\theta|^2 \end{bmatrix}.$$

С использованием стандартных алгоритмов идентификации может быть получена оценка $\hat{\eta}$ компоненты которой $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ могут быть использованы для формирования оценки \hat{q} вида (4.48). Отметим, однако, что повышение размерности вектора неизвестных параметров может привести к ухудшению качества переходных процессов.

Замечание 4.5. Размерность вектора неизвестных параметров в модели (4.49) можно сократить в силу того, что второй компонент вектора $S(\chi, i)$ (4.50) является константой. Действительно, продифференцировав (4.49) получим

$$\frac{d}{dt}Y(\chi(t), i(t)) = -2 \left(\frac{d}{dt}(\chi(t) - Li(t)) \right)^\top \theta.$$

Обозначим

$$Y^\ddagger(t) = \frac{p}{p+1} [Y(\chi(t), i(t))]$$

и

$$S^\ddagger(t) = \frac{-2p}{p+1} [\chi(t) - Li(t)].$$

Тогда, пренебрегая экспоненциально затухающими составляющими, справедливо

$$Y^\ddagger(t) = (S^\ddagger(t))^\top \theta,$$

и оценка $\hat{\theta}$ может быть построена как

$$\frac{d}{dt}\hat{\theta}(t) = K S^\ddagger(t) \left(Y^\ddagger(t) - (S^\ddagger(t))^\top \hat{\theta}(t) \right), \quad (4.51)$$

где $K > 0$ – положительно определённая матрица.

Для построенного наблюдателя требуется определить класс входных сигналов \mathcal{U} , для которого гарантируется сходимость оценок $\hat{\theta}$ к истинным значениям, и, соответственно, сходимость оценки положения \hat{q} . В работе [126] показано, что достаточным условием для сходимости оценок $\hat{\theta}$ для модели вида (4.47) с использованием фильтрации (4.33) и алгоритма оценивания (4.34), равно как и для их модификация с учётом замечания 4.4, является условие неисчезающего возбуждения для сигнала скорости, то есть множество \mathcal{U} может быть определено как

$$\mathcal{U}_1 := \{u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \int_t^{t+T} \dot{q}^2(s) ds \geq \delta > 0, \quad (4.52)$$

при выполнении (4.40), (4.41) и (4.44)}

для некоторых $T > 0$, $\delta > 0$.

Покажем, однако, что для модели (4.47) это условие может быть ослаблено и заменено на

$$\mathcal{U}_2 := \{u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \dot{q}^2(s) ds = \infty\} \quad (4.53)$$

при выполнении (4.40), (4.41) и (4.44)}

Замечание 4.6. Очевидно, что класс \mathcal{U}_2 (4.53) шире, чем класс \mathcal{U}_1 (4.52). Действительно, любой сигнал, отвечающий условию неисчезающего возбуждения, также принадлежит \mathcal{L}_2 [11]. В то же время, существуют сигналы \dot{q} , такие что $\dot{q} \notin \mathcal{L}_2$, но, в то же время, они не удовлетворяют условию неисчезающего возбуждения. Примером такого сигнала может быть

$$\dot{q}(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}.$$

Применяя фильтрацию вида (4.33) для модели (4.47) получим

$$\vartheta = \bar{\Phi}_1 \theta + \epsilon,$$

где

$$\bar{\Phi}_1 = -n_p \omega_f \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

и $\omega_f = \bar{\dot{q}}$. Тогда, в поэлементном виде, запишем

$$\begin{aligned} \vartheta_2(t) &= -\phi(t)\theta_1 + \epsilon_2(t), \\ \vartheta_1(t) &= \phi(t)\theta_2 + \epsilon_1(t), \end{aligned} \quad (4.54)$$

где $\phi := n_p \omega_f$.

Утверждение 4.3. Пусть входной сигнал выбран как $u \in \mathcal{U}_2$ и, то есть для системы (4.40), (4.41) и (4.44) выполняется

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \dot{q}^2(s) ds = \infty.$$

Кроме того, пусть аналогичное равенство выполняется и для выхода фильтра (4.32) при входном сигнале $\dot{q}(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \omega_f^2(s) ds = \infty. \quad (4.55)$$

Тогда для системы (4.54) алгоритм оценивания вида

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\theta}_1(t) &= \gamma \phi(t) \left(\vartheta_2(t) - \phi(t) \hat{\theta}_1(t) \right), \\ \frac{d}{dt} \hat{\theta}_2(t) &= \gamma \phi(t) \left(\vartheta_1(t) - \phi(t) \hat{\theta}_2(t) \right), \end{aligned} \quad (4.56)$$

обеспечивает

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{\theta}(t) - \theta| = 0.$$

Замечание 4.7. Отметим, что допущение (4.55) всегда выполняется для рассматриваемых физических систем и, следовательно, не ограничивает область применения предложенного адаптивного наблюдателя.

Прежде, чем доказать Утверждение, сформулируем вспомогательную Лемму.

Лемма 4.1. Рассмотрим скалярную систему, заданную как

$$\dot{x}(t) = -a^2(t)x(t) + b(t), \quad (4.57)$$

где $x \in \mathbb{R}$, $a(t)$ и $b(t)$ – кусочно-постоянные функции, $x(t_0) = x_0$. Тогда, если $a \notin \mathcal{L}_2$ и $b \in \mathcal{L}_1$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (4.58)$$

Доказательство. Решение $x(t)$ скалярной линейной нестационарной системы (4.57) имеет вид

$$x(t) = \phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, s)b(s)ds, \quad (4.59)$$

где

$$\phi(t, \tau) = \exp \left[- \int_{\tau}^t a^2(s)ds \right]. \quad (4.60)$$

Так как $a \notin \mathcal{L}_2$, то есть справедливо

$$\int_{t_0}^t a^2(s)ds \rightarrow \infty \text{ as } t \rightarrow \infty, \quad (4.61)$$

то можно сформулировать следующие свойства функции $\phi(t, \tau)$:

$$0 < \phi(t, \tau) \leq 1 \quad \forall t \geq \tau, \quad (4.62)$$

$$\phi(t, \tau) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty, \quad (4.63)$$

и

$$\phi(t, \tau) \leq \phi(t, \tau + \Delta) \quad \forall t \geq \tau + \Delta, \quad \Delta \geq 0. \quad (4.64)$$

Так как $b \in \mathcal{L}_1$, i.e.

$$\int_{t_0}^{\infty} |b(s)| ds =: C < \infty, \quad (4.65)$$

то выполняется

$$\forall \varepsilon_b > 0 \exists T_b > t_0 : \int_{T_b}^{\infty} |b(s)| ds < \varepsilon_b. \quad (4.66)$$

В силу (4.63) можно сделать вывод, что $\phi(t, t_0)x(t_0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, и, соответственно, для доказательства равенства (4.58) достаточно показать, что интегральный член в правой части (4.59) стремится к нулю.

Обозначим

$$I(t) := \int_{t_0}^t \phi(t, s)b(s)ds.$$

Тогда для произвольного $T \in [t_0; t]$ значение функции $I(t)$ может быть представлено как сумма двух частей:

$$I(t) = \int_{t_0}^T \phi(t, s)b(s)ds + \int_T^t \phi(t, s)b(s)ds.$$

Так как в силу (4.64) $\phi(t, s) \leq \phi(t, T) \quad \forall s \leq T$, то, с учётом (4.65), выполняется

$$\int_{t_0}^T \phi(t, s)b(s)ds \leq \int_{t_0}^T \phi(t, T)|b(s)|ds \leq C\phi(t, T).$$

Далее, в силу (4.62) справедливо

$$\int_T^t \phi(t, s)b(s)ds \leq \int_T^t |b(s)|ds,$$

что приводит к неравенству

$$|I(t)| \leq C\phi(t, T) + \int_T^t |b(s)|ds$$

для любого $T \geq t_0$.

Теперь покажем, что $I(t) \rightarrow 0$. Выберем произвольно малое $\varepsilon > 0$. В силу (4.66) существует $T_b = T_b(\varepsilon) \geq t_0$, такое что $\forall t \geq T_b$

$$\int_{T_b}^t |b(s)| ds < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Далее, в силу (4.63) существует $t_\phi = t_\phi(\varepsilon, T_b) \geq T_b$, такое что $\phi(t, T_b) < \frac{1}{2C}\varepsilon$ для всех $t \geq t_\phi$. Тогда $\forall t \geq t_\phi$

$$|I(t)| \leq C\phi(t, T_b) + \int_{T_b}^t |b(s)| ds < \varepsilon,$$

откуда следует, что $I(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать. \square

Теперь докажем Утверждение 4.3.

Доказательство Утверждения 4.3. Для системы (4.54) с алгоритмом оценки (4.56) динамика ошибки оценивания имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}}_1(t) &= -\gamma\phi^2(t)\tilde{\theta}_1(t) - \gamma\phi(t)\varepsilon_2(t), \\ \dot{\tilde{\theta}}_2(t) &= -\gamma\phi^2(t)\tilde{\theta}_2(t) - \gamma\phi(t)\varepsilon_1(t), \end{aligned} \quad (4.67)$$

В силу выбора сигнала u и выбора фильтра (4.32), сигнал $\phi(t)$ будет ограничен и выполняется $\phi \notin \mathcal{L}_2$. Следовательно, так как $\varepsilon(t)$ – экспоненциально затухающая функция, то справедливо $\phi(t)\varepsilon(t) \in \mathcal{L}_1$. Следовательно, уравнения динамики (4.67) удовлетворяют Лемме 4.1, откуда и следует доказательство утверждения. \square

4.6.3 Численное моделирование

Для иллюстрации работы предложенного наблюдателя было проведено численное моделирование алгоритма оценивания (4.48), где оценка $\hat{\theta}$ была получена для модели вида (4.47) с использованием фильтрации (4.33), (4.54) и алгоритма оценивания вида (4.56). В таблице 4.1 приведены параметры электродвигателя, модель которого была использована при моделировании.

Таблица 4.1: Параметры использовавшегося при моделировании
электродвигателя ВМР0701F

Индуктивность L	40.03 мГн
Сопротивление R	8.875 Ом
момент инерции j	60×10^{-6} кг·м ²
Число пар полюсов n_p	5
Максимальный ток I	2.3 А

В ходе моделирования предполагалось, что параметры R и L известны, однако требуемое значение \dot{q} было заменено его оценкой \hat{q} . Одной из целей моделирования является проверка робастности полученного наблюдателя в ситуации, когда точное значение скорости не измеряется, а используется его оценка, рассчитанная с использованием наблюдателя положения.

Традиционным способом оценки скорости при измерении положения является линейный наблюдатель вида [127]:

$$\begin{aligned}\dot{\varsigma}_1 &= K_p(\hat{q} - \varsigma_1) + K_i\varsigma_2 \\ \dot{\varsigma}_2 &= \hat{q} - \varsigma_1 \\ \hat{q} &= K_p(\hat{q} - \varsigma_1) + K_i\varsigma_2,\end{aligned}$$

где $K_p > 0$ и $K_i > 0$ – соответственно пропорциональный и интегральный коэффициенты, \hat{q} – оценка положения ротора, полученная с использованием оценки \hat{q} вместо действительного измерения скорости \dot{q} .

Другой целью моделирования является сравнение предложенного наблюдателя с наблюдателем, описанным в работах [128, 129]:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\lambda}} &= v - Ri - \frac{g}{2} \nabla_{\hat{\lambda}} h(\hat{\lambda}, i) M(\hat{\lambda}, i) \\ h(\hat{\lambda}, i) &:= \|\hat{\lambda} - Li\|^2 - \lambda_m^2 \\ M(\hat{\lambda}, i) &:= \max\{0, h(\hat{\lambda}, i)\}.\end{aligned}\tag{4.68}$$

Здесь $g > 0$ – коэффициент адаптации, обеспечивающий глобальную ограниченность всех сигналов и их схождение в некоторую область, однако не асимптотическое стремление к нулю. Следует подчеркнуть, что наблюдатель (4.68) не требует измерений скорости \dot{q} , однако предполагает знание параметра λ_m .

Сценария моделирования построен на основе типовых испытания для бездатчикового управления. Профиль желаемой скорости, приведённый на рисунке 4.19, начинается от нуля и нарастает вплоть до номинальной скорости 314 оборотов в минуту за 5 секунд. Момент нагрузки, показанный на рисунке 4.20, в начале моделирования установлен в ноль, и начиная с момента времени $t = 5$ с линейно нарастает вплоть до номинального значения 1Нм.

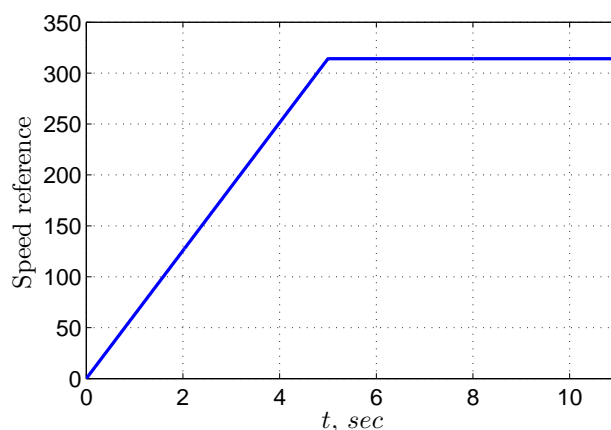


Рисунок 4.19. Используемый при моделировании профиль желаемой скорости.

На рисунках 4.21–4.23 приведены результаты численного моделирования предложенного в настоящем разделе АНОП и алгоритма оценивания (4.68) при параметрах $\gamma = 0.1$, $\alpha = 100$, $g = 100$, а на рисунках 4.24–4.26 при параметрах $\gamma = 0.1$, $\alpha = 300$, $g = 300$. Представленные результаты иллюстрируют сходимость оценок к истинным значениям и высокое быстродействие предложенного адаптивного наблюдателя.

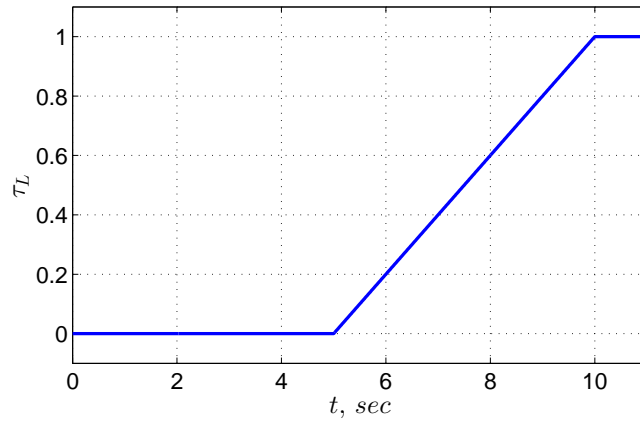


Рисунок 4.20. Используемый при моделировании профиль момента нагрузки.

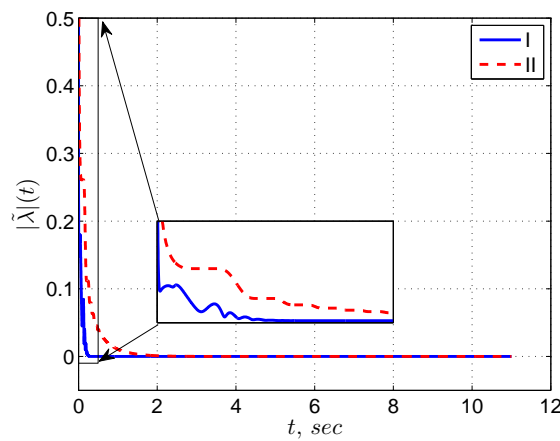


Рисунок 4.21. Ошибка оценивания $|\tilde{\lambda}|$ для предложенного адаптивного наблюдателя (I) и наблюдателя (4.68) (II) при $\gamma = 0.1$, $\alpha = 100$, $g = 100$.

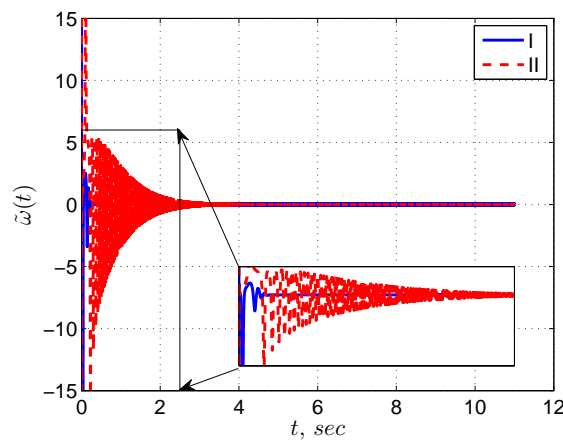


Рисунок 4.22. Ошибка оценивания \tilde{q} для предложенного адаптивного наблюдателя (I) и наблюдателя (4.68) (II) при $\gamma = 0.1$, $\alpha = 100$, $g = 100$.

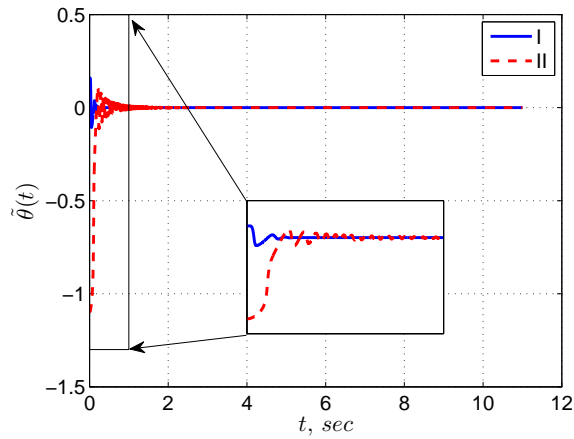


Рисунок 4.23. Ошибка оценивания $|\tilde{\theta}|$ для предложенного адаптивного наблюдателя (I) и наблюдателя (4.68) (II) при $\gamma = 0.1$, $\alpha = 100$, $g = 100$.

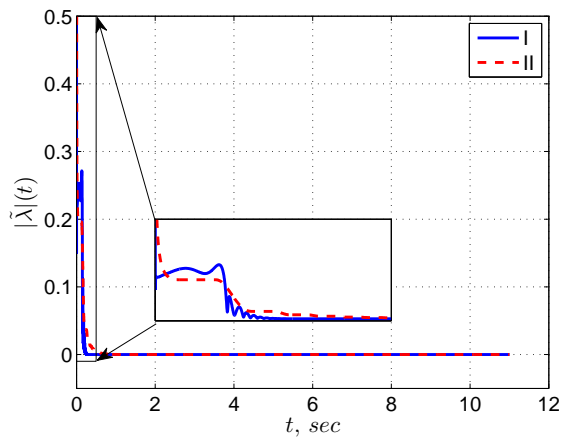


Рисунок 4.24. Ошибка оценивания $|\tilde{\lambda}|$ для предложенного адаптивного наблюдателя (I) и наблюдателя (4.68) (II) при $\gamma = 0.1$, $\alpha = 300$, $g = 300$.

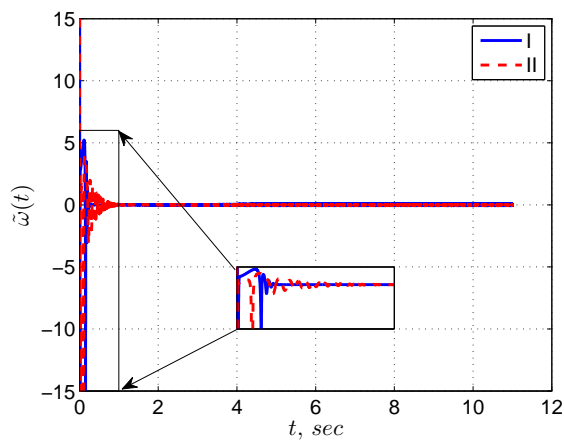


Рисунок 4.25. Ошибка оценивания \tilde{q} для предложенного адаптивного наблюдателя (I) и наблюдателя (4.68) (II) при $\gamma = 0.1$, $\alpha = 300$, $g = 300$.

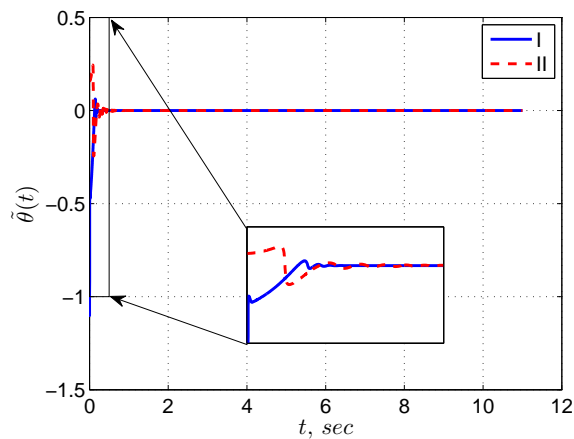


Рисунок 4.26. Ошибка оценивания $|\tilde{\theta}|$ для предложенного адаптивного наблюдателя (I) и наблюдателя (4.68) (II) при $\gamma = 0.1$, $\alpha = 300$, $g = 300$.

И на рисунках 4.27–4.29 приведены результаты эксперимента, иллюстрирующего, что для работоспособности предложенного адаптивного наблюдателя достаточно выбора $u \in \mathcal{U}_2$ вместо выполнения условия неисчезающего возбуждения и $u \in \mathcal{U}_1$. Для этого было проведено моделирование при $\tau_L = 0$ и задании по скорости вида

$$\dot{q}^*(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}.$$

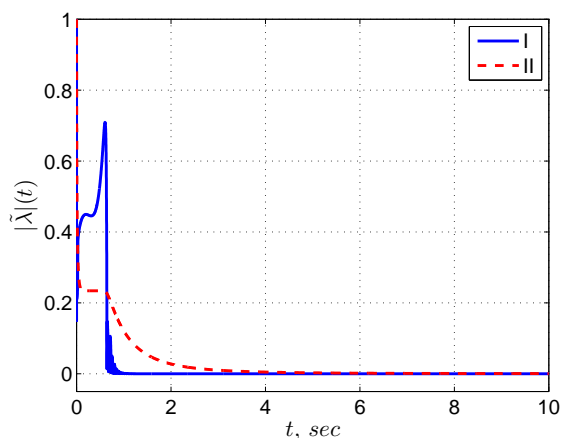


Рисунок 4.27. Ошибка оценивания $|\tilde{\lambda}|$ при $u \in \mathcal{U}_2$.

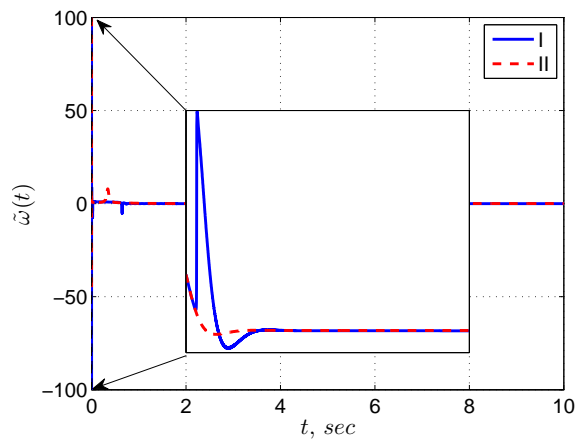


Рисунок 4.28. Ошибка оценивания $|\tilde{q}|$ при $u \in \mathcal{U}_2$.

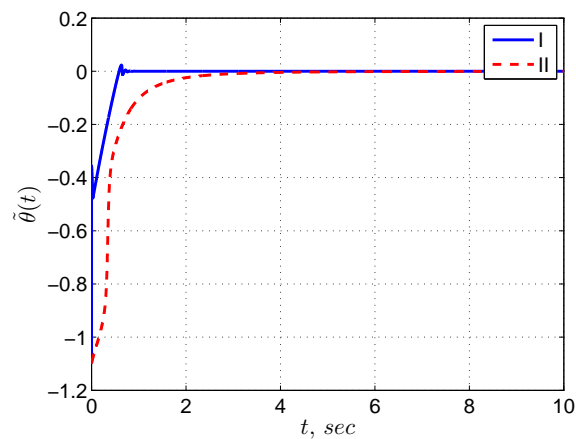


Рисунок 4.29. Ошибка оценивания $|\tilde{\theta}|$ при $u \in \mathcal{U}_2$.

4.7 Вывод по главе

В главе был предложен метод построения адаптивных наблюдателей для нелинейных систем, основанный на сведении задачи оценивания состояний к задаче оценивания вектора постоянных параметров, которая затем решается с использованием методов идентификации. Показано, что для построения адаптивного наблюдателя требуется выполнить два условия: 1) найти решения УЧП, позволяющего привести исходную систему к требуемому виду путём замены части координат, и 2) построить алгоритм оценивания неизвестных параметров. Показано, что решение второй задачи связано с

принадлежностью входного сигнала к некоторому классу, обеспечивающему достаточно возбуждение в системе.

Для указанных допущений показано, что даже в случае построения наблюдателей для линейной системы эти допущения не вытекают явно из свойств наблюдаемости и идентифицируемости.

Предложенные в главе адаптивный наблюдатель был использован для решения задачи оценки части состояний для преобразователя тока Чука и для бездатчикового электромотора. Приведённые результаты численного моделирования иллюстрируют работоспособность предложенного подхода.

Глава 5

МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ В ЗАДАЧА ОЦЕНИВАНИЯ

В предыдущих главах были предложены методы построения адаптивных наблюдателей состояния с использованием методов идентификации и сведения задачи оценивания состояний к задаче оценивания вектора постоянных параметров. Как следствие, качество работы полученных адаптивных наблюдателей напрямую зависит от качества оценивания вектора параметров и, соответственно, используемого алгоритма оценивания. В настоящей главе предлагается процедура динамического расширения регрессора (ДРР), которая в некоторых ситуациях позволяет усилить используемый алгоритм оценивания.

В настоящей главе рассматриваются два сценария использования предложенной процедуры ДРР. Первый сценарий предполагает использование метода для линейной регрессионной модели. Известно, что типовые алгоритмы оценивания, применяемые в адаптивных системах, обеспечивают экспоненциальную сходимость оценок тогда и только тогда, когда регрессор удовлетворяет требованию неисчезающего возбуждения [11, 108]. При этом отсутствует систематический способ установить асимптотическую сходимость оценок параметров в условиях, когда допущение о неисчезающем возбуждении не выполняется. Отметим так же, что указанная проблема ранее частично рассматривалась в работах [130–133], где были получены частные решения. Использование предложенного в главе метода ДРР позволяет гарантировать асимптотическую сходимость оценок параметров к истинным значениям при более слабых требованиях к сигналам, нежели классическое условие неисчезающего возбуждения.

Так же использование процедуры ДРР для линейной регрессионной модели позволяет улучшить качество переходных процессов. Известно, что качество переходных процессов в адаптивных наблюдателях может быть

критичным для функционирования в замкнутой системе. В некоторых случаях наблюдаемые выбросы и осцилляции оценок параметров могут привести к потере замкнутой системой устойчивости, несмотря на ограниченность и сходимость к нулю нормы вектора ошибок оценивания. Как будет показано далее, предложенная процедура ДРР в ряде случаев позволяет гарантировать монотонность переходных процессов по каждой компоненте вектора оценок, что позволяет избежать выбросов и нежелательных осцилляций.

Второй сценарий применения предложенной процедуры ДРР рассматривает задачу, в которой параметры входят в регрессионную модель нелинейно. Подобная нелинейная параметризация может возникать, в частности, при построении адаптивного наблюдателя с оценкой параметров, как описано в Главе 4. Как было отмечено там же, решение задачи оценивания параметров нелинейной регрессионной модели в общем случае неизвестно. Представляет интерес частная задача, когда нелинейная функция параметров обладает свойством монотонности, методы оценивания параметров для такого случая могут быть найдены в работах [116–118]. Более общей является модель, в которой только часть нелинейных функций, образующих регрессионную модель, обладает желаемым свойством монотонности. В этом случае процедура ДРР позволяет изолировать указанные “хорошие” нелинейности и, при выполнении ряда допущений, построить алгоритм оценивания параметров.

Глава состоит четырёх разделов. В разделе 5.1 формулируется процедура ДРР для линейной регрессионной модели. Построение алгоритмов оценивания с использованием предложенной процедуры для мультисинусоидальных сигналов, ранее рассмотренных в Главе 2, описано в разделе 5.2. Использование ДРР при оценивании параметров нелинейной регрессии рассмотрено в разделе 5.3, и выводы по главе сформулированы в разделе 5.4. Представленные в главе результаты расширяют и обобщают результаты, ранее изложенные в работах [39, 40, 54, 62].

5.1 Процедура динамического расширения

5.1.1 Стандартная процедура оценивания и условие неисчезающего возбуждения

Рассмотрим стандартную проблему оценивания вектора постоянных параметров θ в линейной регрессионной модели

$$y(t) = m^\top(t)\theta, \quad (5.1)$$

где $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta}$ и $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta}$ – известные ограниченные функции времени, а $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ – вектор неизвестных параметров. Стандартный градиентный алгоритм оценивания имеет вид

$$\dot{\hat{\theta}} = Km(y - m^\top \hat{\theta}), \quad (5.2)$$

где $K \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$ – положительно-определённая матрица коэффициентов усиления. Тогда динамика ошибки задаётся выражением

$$\dot{\tilde{\theta}} = -Km(t)m^\top(t)\tilde{\theta}, \quad (5.3)$$

где $\tilde{\theta} := \hat{\theta} - \theta$ – вектор ошибок оценивания. Известно [11, 108], что нулевое положение равновесия линейной нестационарной системы (5.3) будет равномерно экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда вектор-регрессор m удовлетворяет условию неисчезающего возбуждения, то есть

$$\int_t^{t+T} m(s)m^\top(s)ds \geq \delta I_{n_\theta}, \quad (5.4)$$

для некоторых $T, \delta > 0$ и для всех $t \geq 0$. Для обозначения этого свойства будем далее использовать запись $m(t) \in \text{PE}$. Если же $m(t) \notin \text{PE}$, то, в общем случае, не удаётся гарантировать асимптотическую устойчивость системы и сходимости ошибок оценивания параметров к нулю.

5.1.2 Процедура динамического расширения регрессора

Процедура ДРР, позволяющая обеспечить сходимость оценок при отсутствии неисчезающего возбуждения, состоит в конструировании n_θ изолированных

скалярных регрессионных моделей, позволяющих независимо оценивать каждый из компонентов вектора θ при допущениях на регрессор m , отличающихся от допущения (5.4).

Первым шагом процедуры ДРР является введение $n_\theta - 1$ линейных операторов $H_i : \mathcal{L}_\infty \rightarrow \mathcal{L}_\infty$, $i \in \{1, 2, \dots, n_\theta - 1\}$. При подаче ограниченного входного сигнала, выходы этих операторов также ограничены и могут быть представлены в форме

$$(\cdot)_{f_i}(t) := [H_i(\cdot)](t) + \epsilon_t, \quad (5.5)$$

где ϵ_t – обобщенный экспоненциально затухающий член. Например, в качестве операторов H_i могут быть выбраны линейные стационарные экспоненциально устойчивые фильтры вида

$$H_i(p) = \frac{\alpha_i}{p + \beta_i}, \quad (5.6)$$

где $\alpha_i \neq 0$, $\beta_i > 0$. В этом случае член ϵ_t соответствует переходным компонентам, связанным с начальными условиями фильтров. Другим возможным выбором являются операторы задержки вида

$$[H_i(\cdot)](t) := (\cdot)(t - d_i),$$

где $d_i \in \mathbb{R}_+$ – величина задержки.

Для простоты изложения, временно пренебрежём экспоненциально затухающей составляющей; анализ влияния этой составляющей приведён в Замечании 5.2. Тогда, применяя введённые выше операторы к исходной регрессионной модели (5.1), получим

$$y_{f_i} = m_{f_i}^\top \theta. \quad (5.7)$$

Объединив исходное равенство (5.1) с полученными в результате применения операторов $n_\theta - 1$ равенствами вида (5.7), можно записать расширенную системы вида

$$Y_e(t) = M_e(t)\theta, \quad (5.8)$$

где $Y_e : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta}$ и $M_e : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$ определены как

$$Y_e := \begin{bmatrix} y \\ y_{f_1} \\ \vdots \\ y_{f_{n_\theta-1}} \end{bmatrix}, \quad M_e := \begin{bmatrix} m^\top \\ m_{f_1}^\top \\ \vdots \\ m_{f_{n_\theta-1}}^\top \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Отметим, что в силу выбора операторов H_i , все компоненты Y_e и M_e ограничены. Домножая (5.8) слева на присоединённую матрицу алгебраических дополнений $\text{adj}\{M_e(t)\}$ матрицы $M_e(t)$, получим n_θ скалярных регрессионных моделей вида

$$Y_i(t) = \phi(t)\theta_i \quad (5.10)$$

где $i \in \bar{n}_\theta := \{1, 2, \dots, n_\theta\}$, определитель матрицы M_e обозначен как

$$\phi(t) := \det\{M_e(t)\}, \quad (5.11)$$

и $Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta}$

$$Y(t) := \text{adj}\{M_e(t)\}Y_e(t). \quad (5.12)$$

Для полученных скалярных уравнений (5.10) оценка параметров θ_i может быть получена с использованием градиентного алгоритма оценивания

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \gamma_i \phi(Y_i - \phi\hat{\theta}_i), \quad i \in \bar{n}_\theta, \quad (5.13)$$

где коэффициенты адаптации $\gamma_i > 0$. Тогда, в силу (5.10), последнее выражение может быть переписано как

$$\dot{\tilde{\theta}}_i = -\gamma_i \phi^2 \tilde{\theta}_i, \quad i \in \bar{n}_\theta. \quad (5.14)$$

Решая полученное скалярное дифференциальное уравнение, получим

$$\tilde{\theta}_i(t) = \tilde{\theta}_i(t_0) e^{-\gamma_i \int_{t_0}^t \phi^2(s) ds},$$

откуда следует

$$\phi(t) \notin \mathcal{L}_2 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_i(t) = 0. \quad (5.15)$$

Сформулируем следующее утверждение, доказательство которого следует из приведённых выше рассуждений.

Утверждение 5.1. *Рассмотрим n_θ -мерную линейную регрессионную модель (5.1), где $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ и $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta}$ – известные и ограниченные функции времени, а $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ – вектор неизвестных постоянных параметров. Введём $n_\theta - 1$ линейных операторов $H_i : \mathcal{L}_\infty \rightarrow \mathcal{L}_\infty$, $i \in \{1, 2, \dots, n_\theta - 1\}$, удовлетворяющих (5.5). Обозначим вектор Y_e и матрицу M_e с соответствии с (5.9). Рассмотрим алгоритм оценивания вида (5.13), где ϕ и Y_i определены в соответствии с выражениями (5.11) и (5.12) соответственно. Тогда утверждение (5.15) верно.*

Замечание 5.1. *Для любой матрицы $A \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$*

$$\text{adj}\{A\}A = \det\{A\}I_q, \quad (5.16)$$

даже если матрица A вырождена [134, 135].

Замечание 5.2. *Рассмотрим вклад в анализ сходимости экспоненциальных членов ϵ_t , которыми пренебрегли ранее. В этом случае уравнения динамики ошибки (5.14) примут вид*

$$\dot{\tilde{\theta}}_i = -\gamma_i \phi^2 \tilde{\theta}_i + \epsilon_t, \quad i \in \bar{n}_\theta.$$

Как было показано в Лемме 4.1, для полученной динамики ошибки также обеспечивается выполнение (5.15).

Замечание 5.3. *Как следует из (5.14), переходные процессы по отдельным компонентам $\tilde{\theta}_i$ монотонным и для $t > t_0$ справедливо*

$$|\tilde{\theta}_i(t)| \leq |\tilde{\theta}_i(t_0)|.$$

Связь между $m(t)$ и $\phi(t)$

Естественным вопросом относительно применимости предложенной процедуры является вопрос, действительно ли условие $\phi(t) \notin \mathcal{L}_2$ слабее, чем $m(t) \in \text{PE}$? Для ответа на этот вопрос сформулируем следующие наблюдения.

Н1. Отметим, что [11]

$$\phi(t) \in \text{PE} \implies \phi(t) \notin \mathcal{L}_2.$$

В то же время, обратное утверждение, в общем случае, неверно. Действительно, рассмотрим

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}},$$

для которого справедливо как $\phi(t) \notin \mathcal{L}_2$, так и $\phi(t) \notin \text{PE}$.

Н2. Рассмотрим регрессор вида $m(t) := [\sin(t) \ \cos(t)]^\top$ и линейный устойчивый оператор

$$H(p) = \frac{c(p+1)}{p^2+p+2},$$

где $c > 0$. Отметим, что на единичной частоте оператор H имеет нулевой сдвиг фазы и амплитудную характеристику, равную c . Тогда, $m_{1f}(t) = c \sin(t)$, $m_{2f}(t) = c \cos(t)$ и

$$M_e(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) & \cos(t) \\ c \sin(t) & c \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $m(t) \in \text{PE}$, но $\det\{M_e(t)\} \equiv 0$ и $\phi(t) \in \mathcal{L}_2$.

Н3. В силу определения (5.4) видно, что свойство неисчезающего возбуждения накладывается на минимальное собственное число матрицы:

$$\lambda_{\min} \left\{ \int_t^{t+T} m(s)m^\top(s)ds \right\} \geq \delta > 0 \iff m(t) \in \text{PE},$$

где $\lambda_{\min}\{\cdot\}$ обозначает минимальное собственное число. При этом, условие $\phi(t) \notin \mathcal{L}_2$ накладывает ограничения на все собственные

числа матрицы M_e . Действительно, определитель матрицы является произведением её собственных чисел, и для любых двух ограниченных сигналов $a, b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ справедливо

$$a(t)b(t) \notin \mathcal{L}_2 \implies a(t) \notin \mathcal{L}_2 \text{ and } b(t) \notin \mathcal{L}_2.$$

Следовательно, необходимым условием сходимости алгоритма оценивания параметров (5.13) является то, что все собственные числа матрицы M_e не интегрируемы с квадратом.

Наблюдения Н1-Н3 иллюстрируют, что предложенный алгоритм оценивания, построенный с использованием процедуры ДРР, вводит новые условия сходимости, которые существенно отличаются от известного условия неисчезающего возбуждения, и, как будет показано далее, в ряде случаев оказываются слабее.

5.1.3 Иллюстративный пример

Рассмотрим простейший случай $n_\theta = 2$ и $m = \text{col}\{m_1, m_2\}$. Тогда

$$\phi = m_1 m_{2f} - m_{1f} m_2. \quad (5.17)$$

Следующее утверждение устанавливает класс регрессоров $m(t) \notin \text{PE}$, таких что $\phi(t) \notin \mathcal{L}_2$ при выборе в качестве оператора H линейного стационарного фильтра первого порядка.

Утверждение 5.2. *Определим следующее множество дифференцируемых функций:*

$$\mathcal{G} := \{g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \mid g(t) \in \mathcal{L}_\infty, \dot{g}(t) \in \mathcal{L}_\infty, \dot{g}(t) \notin \mathcal{L}_2, \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{g}(t) = 0\}.$$

Пусть регрессор $m(t)$ задан как

$$m(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ g + \dot{g} \end{bmatrix}.$$

Тогда для всех $g \in \mathcal{G}$ выполняется $m(t) \notin PE$. Пусть оператор H выбран как

$$[H(\cdot)](t) = \left[\frac{1}{p+1}(\cdot) \right](t).$$

Тогда функция ϕ , определённая в (5.17), удовлетворяет $\phi(t) \notin \mathcal{L}_2$.

Доказательство. Утверждение $m(t) \notin PE$ очевидно в силу $\lim_{t \rightarrow \infty} m_2(t) = 0$.

Далее, запишем $m_{1f} = 1 + \epsilon_t$ и, с учётом выбранного фильтра,

$$\dot{m}_{2f} = -m_{2f} + m_2.$$

С другой стороны, в силу выбора m можно записать

$$\dot{g} = -g + m_2.$$

Вычитая второе выражение из первого, получим

$$\frac{d}{dt}(m_{2f} - g) = -(m_{2f} - g),$$

и, следовательно $m_{2f} = g + \epsilon_t$. Подставляя полученные равенства в (5.17), запишем

$$\begin{aligned} \phi &= m_{2f} - (1 + \epsilon_t)m_2 \\ &= (g + \epsilon_t) - (1 + \epsilon_t)(g + \dot{g}) \\ &= -\dot{g} + \epsilon_t, \end{aligned}$$

где для последнего равенства было использовано $g(t) \in \mathcal{L}_\infty$ и $\dot{g}(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Следовательно, в силу выбора \dot{g} , имеем $\phi(t) \notin \mathcal{L}_2$. \square

Замечание 5.4. Рассмотрим в качестве примера функции $g \in \mathcal{G}$

$$g(t) = \frac{\sin t}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}.$$

Тогда соответствующий регрессор

$$m(t) = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \frac{\sin t + \cos t}{(1+t)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sin t}{2(1+t)^{\frac{3}{2}}} \end{array} \right]. \quad (5.18)$$

Замечание 5.5. В приведённых рассуждения выбор $\alpha = \beta = 1$ для оператора H не уменьшает их общности. Действительно, подобные рассуждения могут быть приведены для любого экспоненциально устойчивого линейного стационарного фильтра. Конкретный выбор фильтра в этом случае является дополнительной степенью свободы при построении алгоритма оценивания.

Результаты численного моделирования

Рассмотрим вначале применение классического градиентного алгоритма оценивания (5.2). Пусть регрессор $m(t)$ выбран в соответствии с (5.18). Как показано в разделе 5.1.1, система (5.3) устойчива, но не экспоненциально устойчива, так как $m(t) \notin PE$.

Выберем $K = \gamma I_2$ и $\theta = \text{col}\{-3, 3\}$. Переходные процессы для ошибки оценивания $\tilde{\theta}(t)$ приведены на рисунках 5.1 и 5.2 при $\tilde{\theta}(0) = \text{col}\{3, -3\}$ и значениях $\gamma = 3$ и $\gamma = 10$. Стоит отметить, что из результатов численного моделирования не представляется возможным сделать вывод об асимптотической сходимости $\tilde{\theta}(t)$ к нулю. Однако, как следует из графиков, даже по прошествии 500 секунд оценка $\tilde{\theta}_2$ заметно отстоит от нуля. Графики так же показывают, что увеличение параметра γ , которое, предположительно, должно увеличивать быстродействие алгоритма оценивания, на самом деле ухудшает результаты эксперимента, достаточно сравнить рисунки 5.1 и 5.2. На рисунке 5.3 показаны интегральные кривые для различных начальных значений при выборе $\gamma = 3$.

Далее рассмотрим результаты численного моделирования алгоритма оценивания (5.13), построенного с использованием процедуры ДРР. Будем рассматривать тот же $m(t)$ и $\theta = \text{col}\{-3, 3\}$. Переходные процессы $\tilde{\theta}(t)$ при выборе $\tilde{\theta}(0) = \text{col}\{3, -3\}$, $\gamma_{1,2} = 3$ и $\gamma_{1,2} = 10$ приведены на рисунках 5.4 и 5.5. Интегральные кривые для различных начальных условий и $\gamma_{1,2} = 3$ представлены на рисунке 5.6. Результаты численного моделирования

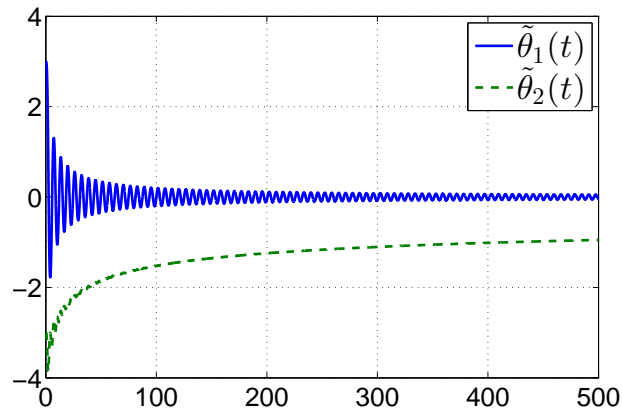


Рисунок 5.1. Ошибки оценивания $\tilde{\theta}(t)$ (безразм.) для алгоритма (5.2) при выборе $m(t)$ как (5.18), $\tilde{\theta}(0) = \text{col}\{3, -3\}$ и $K = 3I_2$. По оси ординат – время, секунды.

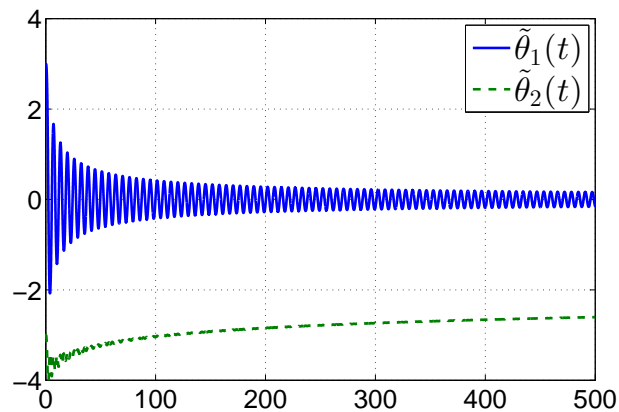


Рисунок 5.2. Ошибки оценивания $\tilde{\theta}(t)$ (безразм.) для алгоритма (5.2) при выборе $m(t)$ как (5.18), $\tilde{\theta}(0) = \text{col}\{3, -3\}$ и $K = 10I_2$. По оси ординат – время, секунды.

показывают значительное улучшение качества переходных процессов, как с точки зрения осцилляций, так и времени переходных процессов. Более того, для алгоритма оценивания с ДРР легко определить вклад коэффициента γ_i в характер переходных процессов. В рассмотренном примере имеем

$$\int_0^{10} \phi^2(t) dt \approx 0.78,$$

откуда для $\gamma_i = 3$

$$\tilde{\theta}_i(10) \approx e^{-3 \cdot 0.78} \tilde{\theta}_i(0) \approx 0.09 \tilde{\theta}_i(0),$$

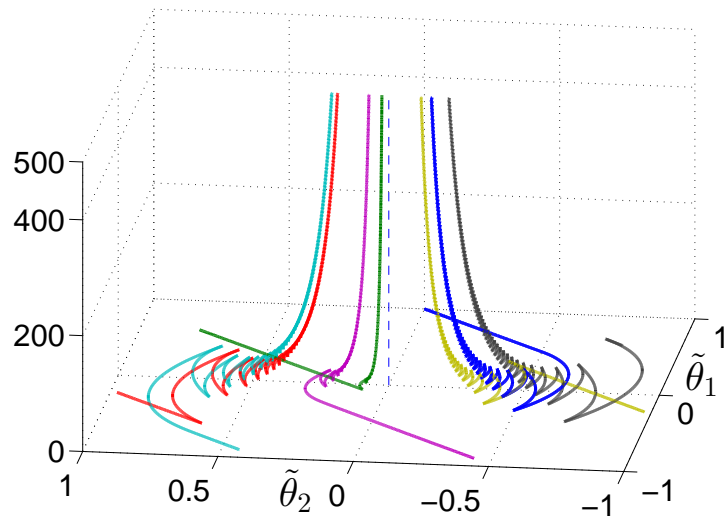


Рисунок 5.3. Ошибки оценивания (безразм.) для алгоритма (5.2), (5.18) при различных начальных условиях, $K = 3I_2$. Вертикальная ось – время, секунды.

а для $\gamma_i = 10$

$$\tilde{\theta}_i(10) \approx e^{-10 \cdot 0.78} \tilde{\theta}_i(0) \approx 0.0004 \tilde{\theta}_i(0).$$

Полученные оценки согласуются с представленными на рисунках 5.4 и 5.5 графиками.

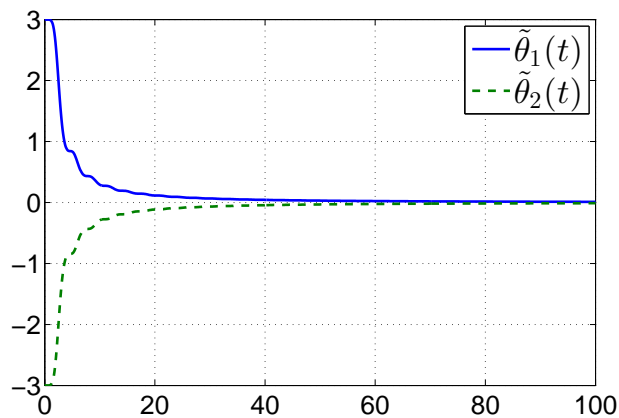


Рисунок 5.4. Ошибки оценивания $\tilde{\theta}(t)$ (безразм.) для алгоритма (5.13) при выборе $m(t)$ как (5.18), $\tilde{\theta}(0) = \text{col}\{3, -3\}$ и $\gamma_{1,2} = 3$. По оси ординат – время, секунды.

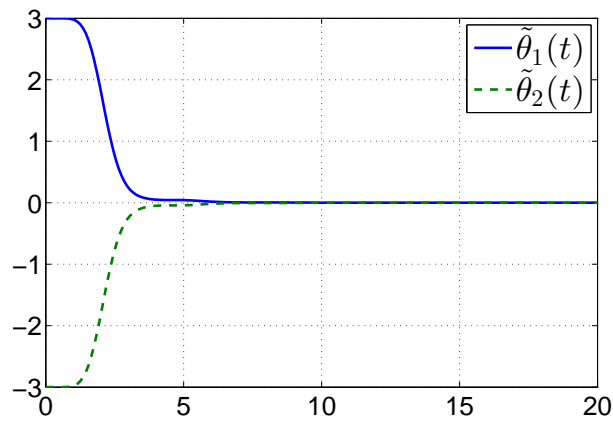


Рисунок 5.5. Ошибки оценивания $\tilde{\theta}(t)$ (безразм.) для алгоритма (5.13) при выборе $m(t)$ как (5.18), $\tilde{\theta}(0) = \text{col}\{3, -3\}$ и $\gamma_{1,2} = 10$. По оси ординат – время, секунды.

5.2 Использование динамического расширения при оценивании параметров синусоидальных сигналов

Будем рассматривать задачу оценивания параметров мультисинусоидального сигнала, ранее рассмотренную в разделе 2.2.5. Покажем, каким образом предложенная в настоящей главе процедура ДРР может быть использована для улучшения качества переходных процессов в алгоритме оценивания, предложенном в разделе 2.2.5.

5.2.1 Построение алгоритма оценивания с использованием ДРР

Рассмотрим мультисинусоидальный сигнал вида (2.51), а именно

$$\rho_m(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i),$$

где $A_i > 0$, φ_i и $\omega_i > 0$ – неизвестные постоянные параметры, $i \in \bar{N} := \{1, 2, \dots, N\}$, причём все частоты различны, то есть

$$\omega_i \neq \omega_j \quad \forall i \neq j, \quad i, j \in \bar{N}.$$

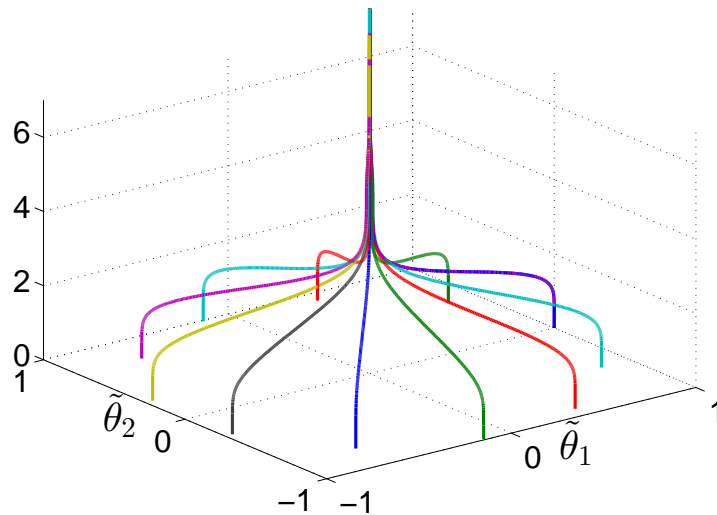


Рисунок 5.6. Ошибки оценивания (безразм.) для алгоритма (5.13), (5.18) при различных начальных условиях, $\gamma_{1,2} = 3$. Вертикальная ось – время, секунды.

По аналогии с разделом 2.2.5 будем считать, что сигнал $\rho_m(t)$ является выходом автономного генератора вида

$$\dot{x}_2(t) = \Gamma(\theta)x_2(t),$$

$$\rho_m(t) = h^\top x_2(t),$$

где пара (Γ, h) полностью наблюдаема, все собственные числа матрицы Γ расположены на мнимой оси и имеют ненулевую мнимую часть, и, соответственно, характеристический полином $P_\Gamma(s)$, определённый в подразделе 2.2.1, имеет вид

$$P_\Gamma(s) = \prod_{i=1}^N (s^2 + \omega_i^2) = s^{2N} - \theta_N s^{2N-2} - \dots - \theta_2 s^2 - \theta_1.$$

Ставится задача построения алгоритма оценивания, обеспечивающего

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{\theta}(t) - \theta| = 0. \quad (5.19)$$

Для формирования линейной регрессии в задаче оценивания вектора θ воспользуемся упрощённым подходом, основанным на расширенном фильтре состояний, аналогичном введённому в разделе 2.2.3, Лемма 2.2. Для этого рассмотрим фильтр состояний вида

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + B\rho_m(t), \quad (5.20)$$

где $\xi := [\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_{2N}(t)]^\top$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{2N-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_0 \end{bmatrix},$$

$a_i, i \in \{0, 2, \dots, 2N - 1\}$ – коэффициенты Гурвицева полинома

$$a(s) = s^{2N} + a_{2N-1}s^{2N-1} + \dots + a_1s + a_0.$$

Обозначим

$$y(t) := -\dot{\xi}_{2N}(t) = \sum_{i=1}^{2N} a_{i-1}\xi_i(t) - a_0u(t). \quad (5.21)$$

Тогда выполняется

$$y(t) = m^\top(t)\theta + \varepsilon(t), \quad (5.22)$$

где

$$m(t) := [\xi_{2N-1}(t), \xi_{2N-3}(t), \dots, \xi_3(t), \xi_1(t)]^\top, \quad (5.23)$$

и $\varepsilon(t)$ – экспоненциально затухающий член. Доказательство справедливости выражения (5.22) аналогично с доказательству Леммы 2.2 и рассуждениям, приведённым в разделе 2.2.5.

Тогда для оценивания вектора неизвестных параметров θ может быть использован градиентный алгоритм вида

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = K_\theta m(t) \left(y(t) - m^\top(t)\hat{\theta}(t) \right), \quad (5.24)$$

где $K_\theta \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $K_\theta > 0$. По аналогии с разделом 2.2.5 можно показать, что алгоритм (5.24) обеспечивает достижение цели (5.19), причём ошибка оценивания $|\tilde{\theta}(t)|$ сходится к нулю экспоненциально быстро. С другой стороны, экспоненциальная сходимость ошибок оценивания не гарантирует качества переходных процессов. Известно, что для $N \geq 2$ переходные процессы по

отдельным компонентам вектора оценок $\hat{\theta}(t)$ могут демонстрировать выбросы или существенные осцилляции. Для устранения этого недостатка предлагается модифицировать алгоритм оценивания (5.24) за счёт использования процедуры ДРР, предложенной в разделе 5.1.

Следуя предложенной ранее процедуре ДРР, введём в рассмотрение $N - 1$ линейных операторов, выбрав их как элементы задержки $[H_i(\cdot)](t) := (\cdot)(t - d_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$, где $d_i > 0$ и $d_i \neq d_j$ при $i \neq j$. Определим $N - 1$ фильтрованный сигнал

$$\begin{aligned} m_{f_i}(t) &= m(t - d_i), \\ y_{f_i}(t) &= y(t - d_i). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Тогда, объединив эти сигналы с сигналами $y(t)$ и $m(t)$, сконструируем $N \times 1$ вектор Y_e и $N \times N$ матрицу M_e как

$$Y_e(t) := \begin{bmatrix} y(t) \\ y_{f_1}(t) \\ \vdots \\ y_{f_{N-1}}(t) \end{bmatrix}, \quad M_e(t) := \begin{bmatrix} m^\top(t) \\ m_{f_1}^\top(t) \\ \vdots \\ m_{f_{N-1}}^\top(t) \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Обозначим

$$\phi_m(t) := \det\{M_e(t)\} \quad (5.27)$$

и

$$Y(t) = \text{adj}\{M_e(t)\}Y_e(t). \quad (5.28)$$

Тогда, пренебрегая экспоненциально затухающими членами, справедливы следующие N скалярных равенств

$$Y_i(t) = \phi_m(t)\theta_i,$$

а алгоритм оценивания (5.24) может быть заменён его модифицированной версией

$$\hat{\theta}_i(t) = \gamma_i \phi_m(t) \left(Y_i(t) - \phi_m(t) \hat{\theta}(t) \right), \quad (5.29)$$

где $\gamma_i > 0$, $i \in \bar{N}$.

Сформулируем следующее утверждение, вытекающее из приведённых выше построений, Утверждения 5.1 и Замечания 5.3.

Утверждение 5.3. *Рассмотрим сигнал вида (2.51) и фильтр состояний (5.20). Определим сигнал $y(t)$ как (5.21) и сигнал $m(t)$ как (5.23). Выберем $N - 1$ параметр d_i , $i = \{1, 2, \dots, N - 1\}$ и построим вектор $Y_e(t)$ и матрицу $M_e(t)$ в соответствии с (5.25), (5.26). Тогда, если параметры d_i выбраны таким образом, что $\phi_m(t) \notin \mathcal{L}_2$, где $\phi_m(t)$ определено в (5.27), то алгоритм оценивания (5.29), где вектор $Y(t)$ определён в (5.28), обеспечивает для всех $i \in \bar{N}$*

- достижение цели (5.19);
- $|\tilde{\theta}_i(t)|$ – невозрастающие функции времени.

Более того, если $\phi_m(t) \in PE$, то оценки $\hat{\theta}_i(t)$ сходятся к истинным значениям экспоненциально быстро.

Основным вкладом процедуры ДРР (Утверждение 5.3) по сравнению с алгоритмом оценивания (5.24), является монотонность функций ошибки по каждой компоненте вектора $\tilde{\theta}(t)$. Очевидно, что это утверждение справедливо при пренебрежении экспоненциально затухающими компонентами, порождёнными фильтром состояний, а именно $\varepsilon(t)$ в выражении (5.22). Отметим, однако, что скорость затухания этих компонент зависит от выбора матрицы A в системе (5.20), и, как правило, превосходит быстродействие процессов оценивания.

Иллюстративный пример

В качестве иллюстративного примера рассмотрим случай с двумя синусоидальными компонентами, $N = 2$:

$$u(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (5.30)$$

Выберем следующие настроечные параметры:

- Фильтр переменных состояния (5.20) с характеристическим полиномом матрицы A

$$a(s) = (s + \lambda)^4,$$

где $\lambda > 0$;

- линейный оператор задержки $[H_1(\cdot)](t) := (\cdot)(t - d_1)$, где $d_1 > 0$;

- коэффициенты усиления $\gamma_{1,2} > 0$.

Сконструируем вектора $m(t) = [\xi_3(t), \xi_1(t)]^\top$ и $m_{f_1}(t) = m(t - d_1)$, а так же сигнал $y(t)$ как (5.21), $y_{f_1}(t) = y(t - d_1)$, и матрицы

$$M_e(t) = \begin{bmatrix} \xi_3(t) & \xi_1(t) \\ \xi_3(t - d_1) & \xi_1(t - d_1) \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

$$Y(t) = \text{adj}\{M_e(t)\} \begin{bmatrix} y(t) \\ y_{f_1}(t) \end{bmatrix}.$$

Применимость процедуры ДРР для оценивания параметров такого мультисинусоидального сигнала представлена в следующем утверждении.

Утверждение 5.4. Пусть

$$d_1 < \frac{\pi}{\max\{\omega_1, \omega_2\}}. \quad (5.32)$$

Тогда выполняется $\det\{M_e(t)\} \notin \mathcal{L}_2$.

Замечание 5.6. Если допустить, что известна верхняя граница для неизвестных частот, то есть $\omega_{max} \geq \omega_i \forall i \in \bar{N}$, что соответствует большинству практических задач, то условие (5.32) будет выполнено при выборе

$$d_1 < \frac{\pi}{\omega_{max}}.$$

Доказательство Утверждения 5.4. Пренебрегая экспоненциально затухающими членами, для вектора состояний системы (5.20) запишем

$$\begin{aligned}\xi_1(t) &= B_1 \sin(\omega_1 t + \bar{\varphi}_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \bar{\varphi}_2), \\ \xi_3(t) &= -(\omega_1^2 B_1 \sin(\omega_1 t + \bar{\varphi}_1) + \omega_2^2 B_2 \sin(\omega_2 t + \bar{\varphi}_2)),\end{aligned}$$

где параметры $B_{1,2} > 0$ и $\bar{\varphi}_{1,2} \in [0, 2\pi)$ зависят от выбора параметра λ и от параметров сигнала (5.30).

Обозначим функцию

$$I(t) := \int_0^t (\det\{M_e(s)\})^2 ds.$$

Очевидно, что условие $\det\{M_e(t)\} \notin \mathcal{L}_2$ эквивалентно условию $I(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Путём некоторых тригонометрических и алгебраических преобразований, можно показать, что

$$I(t) = C_{lin}t + C_{per}(t) + C_0,$$

где коэффициент C_{lin} определён как

$$C_{lin} := \frac{1}{2} B_1^2 B_2^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 (1 - \cos(d_1 \omega_1) \cos(d_1 \omega_2)),$$

$C_{per}(t)$ — ограниченный периодический член, и C_0 — константа. Очевидно, что условие $I(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ выполняется если $C_{lin} \neq 0$. Так как $\omega_1 \neq \omega_2$, то $C_{lin} \neq 0$ обеспечивается при

$$|\cos(d_1 \omega_i)| < 1, \quad i = 1, 2,$$

что, в свою очередь, следует из выбора (5.32). □

Отметим, что условие $C_{lin} \neq 0$ подразумевает, что величина d_1 не является периодом сигналов $u(t)$, $\xi_i(t)$ (или полупериодом при выполнении условия полупериодной симметрии), то есть $u(t - d_1) \neq \pm u(t)$. В противном случае матриц $M_e(t)$ окажется вырожденной для всех $t \geq 0$. Неравенство (5.32) гарантирует, что величина d_1 меньше, чем половина наименьшего периода двух синусоидальных компонент с частотами $\omega_{1,2}$. Такая оценка будет достаточной, но консервативной.

Численное моделирование

Проведём численное моделирование алгоритмов оценивания (5.24) и (5.29). Выберем входной сигнал как

$$u(t) = 1.2 \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right). \quad (5.33)$$

и параметры

$$- \lambda = 5, K = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ для наблюдателя (5.24);}$$

$$- \lambda = 5, d_1 = 0.3, \gamma_1 = \gamma_2 = 0.1 \text{ для наблюдателя (5.29).}$$

Начальные условия для обоих алгоритмов оценивания выбраны нулевыми, $\hat{\theta}(0) = 0$, откуда следует $\tilde{\theta}(0) = -\theta = -[13, 36]^\top$. Для того, чтобы отделить переходные процессы в фильтре состояний от переходных процессов алгоритмах оценивания, процесс оценивания начинается в момент времени $t = 5$ секунд.

Переходные процессы для $\tilde{\theta}(t)$ при использовании алгоритма оценивания (5.24) представлены на рисунке 5.7, а при использовании алгоритма оценивания (5.29) – на рисунке 5.8. Отметим различие в значениях параметров K и $\gamma_{1,2}$, а так же различие во времени переходных процессов. Переходные процессы для алгоритма оценивания (5.29) при выборе $\lambda = 5$, $d_1 = 0.3$ и различных значениях $\gamma_{1,2}$ приведены на рисунках 5.9–5.10 и иллюстрируют влияние параметров $\gamma_{1,2}$ на время переходного процесса.

Рассмотрим также результаты численного моделирования для $N = 3$ и $\theta = [38, 361, 900]^\top$, нулевыми начальными условиями, фильтром состояний (5.20) при $a(s) = (s + \lambda)^6$ и $l = 25$. Пусть алгоритм оценивания включается в момент времени $t = 2$ секунды. Переходные характеристики $\tilde{\theta}_{1,2,3}(t)$ представлены на рисунке 5.11 для алгоритма оценивания (5.24) при

$$K = \begin{bmatrix} 240 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

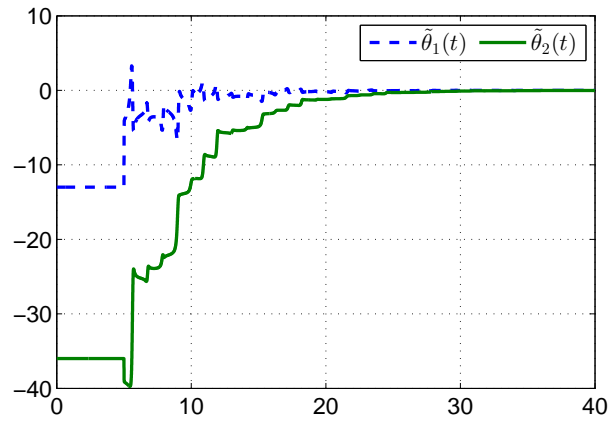


Рисунок 5.7. Ошибки оценивания $\tilde{\theta}(t)$ ыдля алгоритма (5.24) при $N = 2$. По оси ординат – время, секунды.

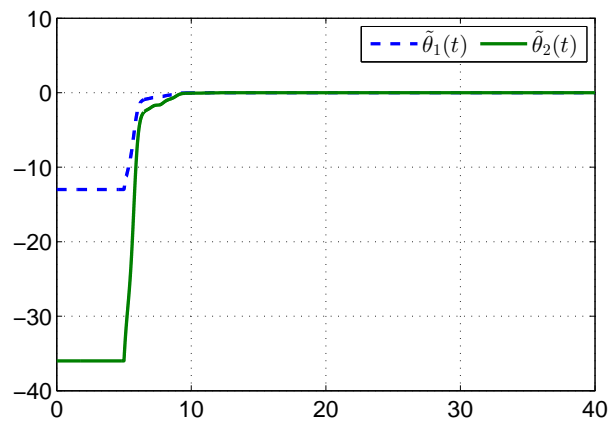


Рисунок 5.8. Ошибки оценивания $\tilde{\theta}(t)$ для алгоритма (5.29) при $N = 2$. По оси ординат – время, секунды.

и на рисунке 5.12 для алгоритма оценивания (5.29) при $d_1 = 0.2$, $d_2 = 0.5$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 10^{-5}$. Как и ранее, подчеркнём различие во времени переходных процессов.

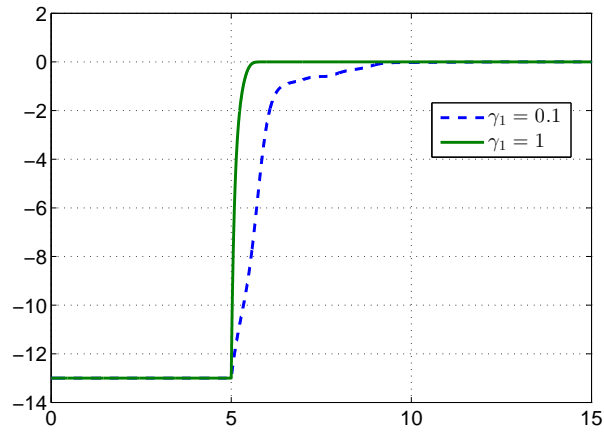


Рисунок 5.9. Ошибка оценивания $\tilde{\theta}_1(t)$ для алгоритма (5.29) при различных значениях γ . По оси ординат – время, секунды.

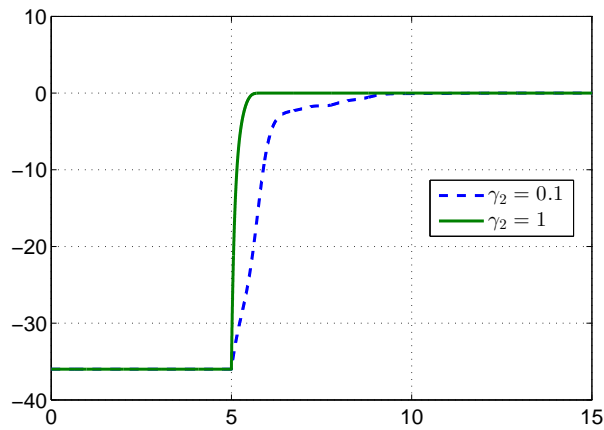


Рисунок 5.10. Ошибка оценивания $\tilde{\theta}_2(t)$ для алгоритма (5.29) при различных значениях γ . По оси ординат – время, секунды.

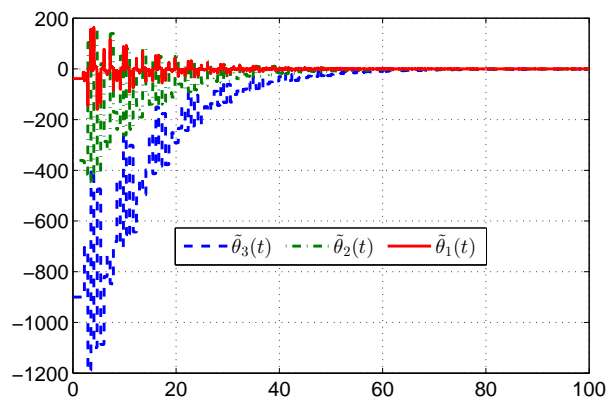


Рисунок 5.11. Ошибки оценивания, алгоритм (5.24) при $\lambda = 25$, $K = \text{diag}\{240, 40, 10\}$. По оси ординат – время, секунды.

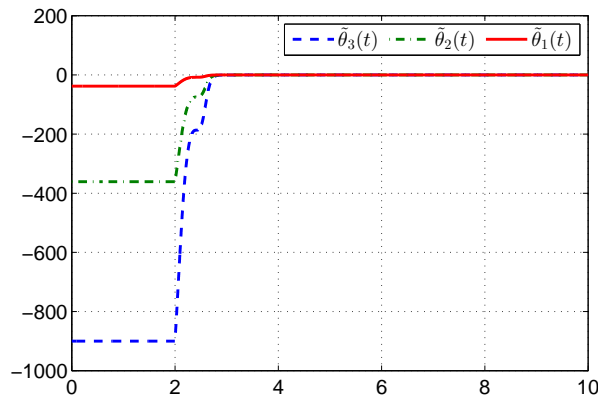


Рисунок 5.12. Ошибки оценивания, алгоритм (5.29) с ДРР при $\lambda = 25$, $d_1 = 0.2$, $d_2 = 0.5$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 10^{-5}$. По оси ординат – время, секунды.

5.3 Использование процедуры динамического расширения при нелинейной параметризации

В этом разделе рассмотрим применение предложенной процедуры ДРР для оценивания параметров при нелинейной параметризации, в которой часть нелинейных функций являются монотонными. В этом случае применение процедуры ДРР ставит своей целью изоляцию этих “хороших” нелинейности, и, при выполнении ряда условий, последующей оценки неизвестных параметров.

Будем рассматривать нелинейную параметризацию вида

$$y(t) = m(t)\psi(\theta), \quad (5.34)$$

где $y \in \mathbb{R}^n$ и $m \in \mathbb{R}^{n \times p}$ – измеряемые сигналы, $\psi : \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^p$ – известные нелинейные функции, и $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ – вектор неизвестных постоянных параметров. Подобная задача может возникнуть, например, при построении АНОП в соответствии с методом, предложенным в Главе 4.

Возможность перепараметризации

Как уже обсуждалось в Главе 4, одним из подходов к оценке параметров при нелинейной параметризации является сведение задачи оценивания к линейной

за счёт перепараметризации. Действительно, обозначим $\eta := \psi(\theta)$. Тогда градиентный алгоритм оценивания может быть построен как

$$\dot{\hat{\eta}} = Km^\top(y - m\hat{\eta}). \quad (5.35)$$

Безусловно, такой подход может быть использован, однако ему присущи некоторые недостатки [11, 108]:

- (i) Так как обычно $n_\theta < p$, то есть размерность вектора параметров после перепараметризации вырастает, то скорость сходимости оценок, как правило, падает.
- (ii) Для оценивания нового вектора параметров требуется удовлетворить условиям достаточного возбуждения, которые могут оказаться более строгими, чем в исходной постановке задачи.
- (iii) В общем случае нет возможности однозначно восстановить значения вектора θ по полученным оценкам вектора η . Это, в свою очередь, препятствует использованию перепараметризации в тех случаях, когда требуется оценить значения именно исходного вектора θ .
- (iv) Если возможно построить только локальное обращение функции ψ , то для формирования состоятельных оценок θ необходимо вводить оператор проекции в алгоритм оценивания перепараметризованного вектора η .

Для простоты изложения вначале будут рассмотрены два иллюстративных примера, а затем будет показано использование процедуры ДРР в общем случае.

5.3.1 Первый пример использования ДРР

Рассмотрим в качестве первого примера случай $n = 1$, $p = 2$ и $q = 1$. Тогда модель (5.34) примет вид

$$y(t) = \begin{bmatrix} m_1(t) & m_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1(\theta) \\ \psi_2(\theta) \end{bmatrix}, \quad (5.36)$$

где $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $m_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ и $\psi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, где $i = 1, 2$. Пусть функция $\psi_1(\theta)$ является строго монотонно возрастающей, причём свойство монотонности сильное, то есть существует $\rho_1 > 0$, такое что для функции ψ_1 выполняется [136]

$$(a - b)[\psi_1(a) - \psi_1(b)] \geq \rho_1(a - b)^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (5.37)$$

В этом случае целью процедуры ДРР является построение нового регрессора, для которого, по аналогии с работами [116–118], может быть использовано свойство монотонности (5.37). В соответствии с процедурой ДРР введём линейный оператор H , применим его к (5.36) и объединим результат этой операции с исходным регрессором как

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y_f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1(t) & m_2(t) \\ m_{1f}(t) & m_{2f}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1(\theta) \\ \psi_2(\theta) \end{bmatrix}.$$

Домножая получившееся равенство слева на строку $[m_{2f} \quad -m_2]$, получим искомую регрессионную модель, в которую вовлечена только функция ψ_1 , а именно

$$Y(t) = \Phi(t)\psi_1(\theta),$$

где были использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} Y &:= m_{2f}y - m_2y_f \\ \Phi &:= m_{2f}m_1 - m_2m_{1f}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Тогда алгоритм оценивания

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \gamma\Phi(t)[Y(t) - \Phi(t)\psi_1(\hat{\theta}(t))], \quad (5.39)$$

где $\gamma > 0$, приводит к динамике ошибки

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\gamma\Phi^2(t)[\psi_1(\hat{\theta}(t)) - \psi_1(\theta)].$$

Для анализа устойчивости полученной системы рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V(\tilde{\theta}) = \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2.$$

Производная функции Ляпунова по времени имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= -\Phi^2(t)(\hat{\theta}(t) - \theta)[\psi_1(\hat{\theta}(t)) - \psi_1(\theta)] \\ &\leq -\rho_1\Phi^2(t)(\hat{\theta}(t) - \theta)^2 \\ &= -2\rho_1\gamma\Phi^2(t)V(t),\end{aligned}$$

где неравенство следует из (5.37). Интегрируя полученное неравенство, запишем

$$V(t) \leq e^{-2\rho_1\gamma \int_0^t \Phi^2(s)ds} V(0),$$

откуда следует, что $\tilde{\theta}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ если $\Phi(t) \notin \mathcal{L}_2$.

Рассмотрим иллюстративный пример. Пусть модель задана как

$$\begin{aligned}y(t) &= m_1(t)(\theta - e^{-\theta}) + m_2(t)\cos(\theta) \\ &= \begin{bmatrix} m_1(t) & m_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta - e^{-\theta} \\ \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &=: m(t)\psi(\theta),\end{aligned}$$

где

$$m(t) = \begin{bmatrix} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+2\pi}} & 1 \end{bmatrix} \notin \text{PE}.$$

Очевидно, что эта модель удовлетворяет условию (5.37). Так как $m(t) \notin \text{PE}$, то сходимость оценок при использовании перепараметризации не гарантируется. Более того, так как функция $\psi(\theta)$ инъективна только локально, для реконструкции параметра θ пришлось бы ограничивать область возможных значений оценки η .

Далее, выберем оператор H как элемент задержки

$$(\cdot)_f(t) = (\cdot)(t-d), \quad d \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right],$$

и покажем, что для функции Φ , определённой в (5.38), выполняется $\Phi(t) \notin \mathcal{L}_2$.

Функция Φ имеет вид

$$\Phi(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+2\pi}} - \frac{\sin(t-d)}{\sqrt{t+2\pi-d}}.$$

С использованием некоторых тригонометрических преобразований можно показать, что

$$\begin{aligned}
\Phi^2(t) &= \left(\frac{\sin(t)}{\sqrt{t+2\pi}} - \frac{\sin(t-d)}{\sqrt{t+2\pi-d}} \right)^2 \\
&= \frac{\sin^2(t)}{t+2\pi} + \frac{\sin^2(t-d)}{t+2\pi-d} - 2 \frac{\sin(t)\sin(t-d)}{\sqrt{t+2\pi}\sqrt{t+2\pi-d}} \\
&= \frac{\sin^2(t)}{t+2\pi} + \frac{\sin^2(t-d)}{t+2\pi-d} \\
&\quad - 2 \cos(d) \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{t+2\pi}\sqrt{t+2\pi-d}} \\
&\quad + \sin(d) \frac{\sin(2t)}{\sqrt{t+2\pi}\sqrt{t+2\pi-d}}.
\end{aligned}$$

Отметим, что первые три члена в правой части полученного равенства неинтегрируемы. Так как для выбранного диапазона d выполняется $\cos(d) \leq 0$, то сумма этих трёх членов так же неинтегрируема. С другой стороны, несложно показать, что

$$\sin(d) \int_0^\infty \frac{\sin(2t)}{\sqrt{t+2\pi}\sqrt{t+2\pi-d}} dt < \infty.$$

Следовательно, $\Phi(t) \notin \mathcal{L}_2$.

Численное моделирование

Выберем $\theta = 1$ и рассмотрим моделирование алгоритма оценивания (5.35) с перепараметризацией и предложенного алгоритма оценивания с ДРР. Результаты численного моделирования для алгоритма (5.35) приведены на рисунках 5.13 и 5.14. Как видно из графиков, в силу того, что $m(t) \notin \text{PE}$, алгоритм не демонстрирует сходимости оценок. При ручном подбора коэффициентов усиления возможно улучшить сходимость, как это показано на рисунке 5.14. Тем не менее, при этом не представляется возможным восстановить значение θ , так как функция $\cos(\theta)$, соответствующая параметру η_2 , для которой достигнута сходимость, не инъективна при $\theta \in \mathbb{R}$.

Замечание 5.7. Если свойство сильной монотонности (5.37) ослабить и полагать, что функция $\psi_1(\theta)$ удовлетворяет

$$\psi_1'(\theta) \geq 0,$$

то для производной функции Ляпунова выполняется

$$\dot{V}(t) = -\Phi^2(t)(\hat{\theta}(t) - \theta)[\psi_1(\hat{\theta}(t)) - \psi_1(\theta)] \leq 0,$$

откуда следует ограниченность траекторий $\hat{\theta}$.

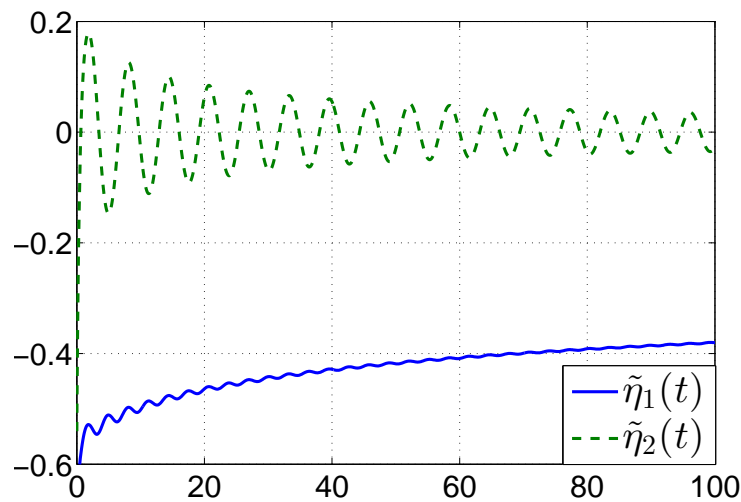


Рисунок 5.13. Ошибки оценивания $\tilde{\eta}(t)$ для алгоритма (5.35), $K = \text{diag}\{3, 3\}$.

По оси ординат – время, секунды.

Результаты численного моделирования для алгоритма (5.39) с ДРР при представлены на рисунке 5.15. Ошибки оценивания $\tilde{\theta}(t)$ сходятся к нулю, и увеличение настроечного параметра γ позволяет увеличить скорость сходимости.

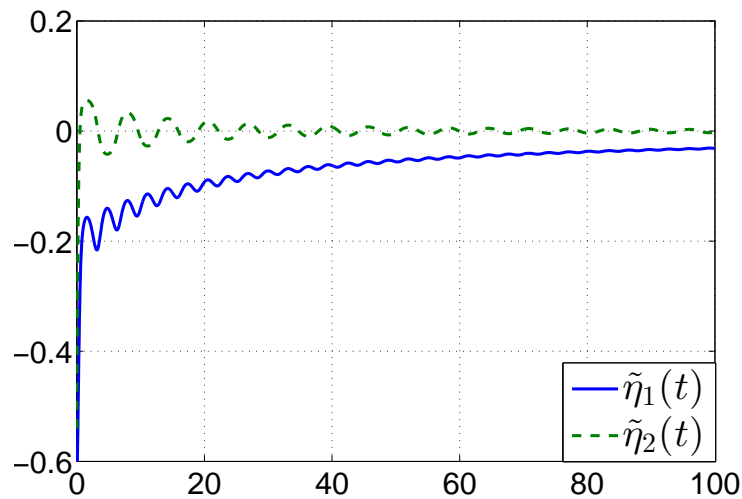


Рисунок 5.14. Ошибки оценивания $\tilde{\eta}(t)$ для алгоритма (5.35), $K = \text{diag}\{50, 5\}$.

По оси ординат – время, секунды.

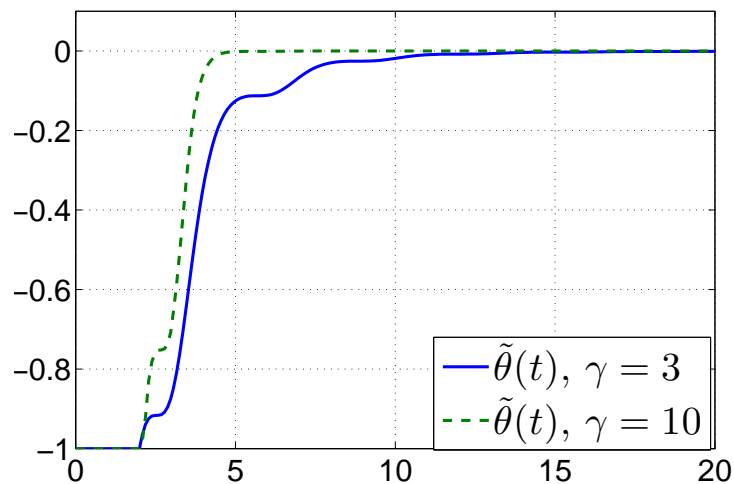


Рисунок 5.15. Переходные процессы для ошибок оценивания $\tilde{\theta}(t)$ для алгоритма (5.39) с ДРР. По оси ординат – время, секунды.

5.3.2 Второй пример использования ДРР

Рассмотрим теперь векторный случай при $n = 2$, $p = 3$ и $q = 2$. Тогда регрессионная модель (5.34) примет вид

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}(t) & m_{12}(t) & m_{13}(t) \\ m_{21}(t) & m_{22}(t) & m_{23}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1(\theta) \\ \psi_2(\theta) \\ \psi_3(\theta) \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

где $y_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $m_{ij} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ и $\psi_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ для $i = 1, 2$ и $j = 1, 2, 3$. Будем предполагать, что только две функции ψ_j из трёх являются монотонными, а именно (без потери общности) ψ_2 и ψ_3 . Обозначим

$$\psi_g := \text{col}\{\psi_2, \psi_3\}.$$

Точнее, будем полагать, что существует положительно определённая матрица $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, такая что

$$P \nabla \psi_g(\theta) + [\nabla \psi_g(\theta)]^\top P \geq \rho_0 I_2 > 0. \quad (5.41)$$

Как показано в работе [136], из приведённого выше неравенства следует существование $\rho_1 > 0$, такого что выполняется

$$(a - b)^\top P [\psi_g(a) - \psi_g(b)] \geq \rho_1 |a - b|^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^{n_\theta}. \quad (5.42)$$

В этом примере целью использования процедуры ДРР является построение регрессионной модели размерности 2, не содержащей функцию ψ_1 . Выберем некоторый линейный оператор H и применим его к одной из строк модели (5.40), например, к первой. Объединяя полученный результат с исходной моделью, запишем

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_{1f}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}(t) & m_{12}(t) & m_{13}(t) \\ m_{21}(t) & m_{22}(t) & m_{23}(t) \\ m_{11f}(t) & m_{12f}(t) & m_{13f}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1(\theta) \\ \psi_2(\theta) \\ \psi_3(\theta) \end{bmatrix}.$$

Домножим слева левую и правую части полученного равенства на матрицу

$$\begin{bmatrix} m_{21}(t) & -m_{11}(t) & 0 \\ m_{11f}(t) & 0 & -m_{11}(t) \end{bmatrix},$$

которая является левым аннигилятором первого столбца расширенного регрессора. Обозначив 2×2 матрицы

$$\Phi := \begin{bmatrix} m_{21} & -m_{11} & 0 \\ m_{11f} & 0 & -m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{12} & m_{13} \\ m_{22} & m_{23} \\ m_{12f} & m_{13f} \end{bmatrix},$$

и

$$Y_1 := \begin{bmatrix} m_{21} & -m_{11} & 0 \\ m_{11f} & 0 & -m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_{1f} \end{bmatrix},$$

запишем

$$Y_1(t) = \Phi(t)\psi_g(\theta). \quad (5.43)$$

Домножая равенство (5.43) слева на $\text{adj}\{\Phi(t)\}$ и обозначая $Y(t) := \text{adj}\{\Phi(t)\}Y_1(t)$, получим желаемую регрессионную модель

$$Y(t) = \det\{\Phi(t)\}\psi_g(\theta). \quad (5.44)$$

Будем строить алгоритм оценивания в виде

$$\dot{\hat{\theta}} = \det\{\Phi\}KP[Y - \det\{\Phi\}\psi_g(\hat{\theta})], \quad (5.45)$$

где $K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ – положительно-определённая матрица. Используя соотношение (5.44), запишем

$$\dot{\hat{\theta}} = -\det^2\{\Phi\}KP[\psi_g(\hat{\theta}) - \psi_g(\theta)].$$

Для анализа устойчивости полученной системы введём в рассмотрение функцию Ляпунова

$$V(\tilde{\theta}) = \frac{1}{2}\tilde{\theta}^\top K^{-1}\tilde{\theta}. \quad (5.46)$$

Производная функции Ляпунова находится как

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\det^2\{\Phi\}(\hat{\theta} - \theta)^\top P[\psi_g(\hat{\theta}) - \psi_g(\theta)] \\ &\leq -\det^2\{\Phi\} \frac{2\rho_1}{\lambda_{\max}\{K\}} V. \end{aligned}$$

Интегрируя полученное неравенство, получим

$$V(t) \leq e^{-\frac{2\rho_1}{\lambda_{\max}\{K\}} \int_0^t \det^2\{\Phi(s)\} ds} V(0),$$

откуда следует, что $\tilde{\theta}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ если $\det\{\Phi(t)\} \notin \mathcal{L}_2$. Кроме того, если $\Phi(t)$ является матрицей полного ранга для всех t и $\det^2\{\Phi(t)\} \geq \kappa > 0$, то

$$\dot{V} \leq -\frac{2\kappa\rho_1}{\lambda_{\max}\{K\}} V,$$

что обеспечивает экспоненциальную сходимость к нулю ошибок оценивания $\tilde{\theta}$.

Замечание 5.8. Как следует из представленных выше рассуждений, для предложенного подхода характерно большое число степеней свободы при формировании матрицы Φ : выбор операторов H , выбор конкретных строк, к которым применяется оператор. Целью назначения этих степеней свободы является формирование желаемых свойств функции $\det\{\Phi(t)\}$, которая, в идеале, должна быть равномерно отделена от нуля, обеспечивая экспоненциальную сходимость.

5.3.3 Использование ДРР в общем случае

Рассмотрим теперь применение процедуры ДРР в общем случае.

Допущение 5.1. Рассмотрим регрессионную модель вида (5.34). Существуют n_θ функций ψ_i , объединённых в вектор $\psi_g : \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta}$ путём соответствующих перестановок выходных сигналов, такой что существует положительно определённая матрица P , для которой выполняется

$$P\nabla\psi_g(\theta) + [\nabla\psi_g(\theta)]^\top P \geq \rho_0 I_q > 0.$$

Перепишем модель (5.34) в соответствии с Допущением 5.1:

$$y_N(t) = \begin{bmatrix} m_g(t) & m_b(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_g(\theta) \\ \psi_b(\theta) \end{bmatrix}, \quad (5.47)$$

где $y_N : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ – вектор выходных сигналов после перестановок, $m_g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n_\theta}$, $m_b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times (p-n_\theta)}$, $\psi_g : \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta}$ и $\psi_b : \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{p-n_\theta}$.

Исходя из рассмотренных выше примеров можно сделать наблюдение, что процедура ДРР должна удовлетворять двум требованиям. Во-первых, в её результате должна быть получена регрессионная модель, в которую не входит m_b . Во-вторых, для обеспечения сходимости, матрица регрессоров в полученной модели должна быть квадратной, или же иметь больше строк, чем столбцов. Тогда, для формализации процедуры ДРР введём следующее допущение.

Допущение 5.2. Модель (5.47) удовлетворяет неравенствам

$$n_\theta < p \quad (5.48)$$

$$n < p. \quad (5.49)$$

Если не выполняется неравенство (5.48), то условию монотонности удовлетворяют все функции ψ_i , $i = 1, \dots, p$, и, следовательно, нет необходимости изолировать некоторые из них. С другой стороны, если не выполняется неравенство (5.49), то возможно сконструировать квадратную регрессионную матрицу для модели без ψ_b не используя операторы H_i . Действительно, если $n = p$, то матрица m_b имеет больше строк, чем столбцов, и, следовательно, для неё существует левый аннигилятор полного ранга $m_b^\perp : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta \times n}$. Более того, полученная в таком случае матрица $m_b^\perp m_g$ будет квадратной. Аналогичные рассуждения применимы и при $n > p$. Таким образом, Допущение 5.2 не столько ограничивает область применения процедуры ДРР, сколько показывает, в каких случаях исходная задача может быть решена без привлечения этой процедуры.

Введём в рассмотрение n_f операторов и применим их к некоторым строкам (5.47). Объединяя полученный результат с исходной моделью, запишем

$$\begin{bmatrix} y_N \\ y_{Nf} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_g & M_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_g(\theta) \\ \psi_b(\theta) \end{bmatrix}. \quad (5.50)$$

где $M_g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{(n+n_f) \times n_\theta}$ и $M_b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{(n+n_f) \times (p-n_\theta)}$ заданы как

$$M_g := \begin{bmatrix} m_g \\ m_{gf} \end{bmatrix}, \quad M_b := \begin{bmatrix} m_b \\ m_{bf} \end{bmatrix}. \quad (5.51)$$

Отметим, что матрица, подлежащая исключению, а именно M_b , имеет размерность $(n + n_f) \times (p - n_\theta)$. Следовательно, для существования левого аннигилятора, имеющего n_θ строк (это условие необходимо для формирования квадратной матрицы регрессора), необходимо выбрать $n_f = p - n$. Обозначим

$$\Phi := M_b^\perp M_g. \quad (5.52)$$

Домножая слева на $\text{adj}\{\Phi\}M_b^\perp$ получим желаемую модель вида

$$Y = \det\{\Phi\}\psi_g(\theta),$$

где

$$Y := \text{adj}\{\Phi\}M_b^\perp \begin{bmatrix} y_N \\ y_{Nf} \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Сформулируем теперь основной результат этого раздела в виде Утверждения, чтё доказательство вытекает из приведённых выше рассуждений.

Утверждение 5.5. *Рассмотрим нелинейно параметризованную модель (5.47), удовлетворяющую Допущениям 5.1 и 5.2. Выберем $p - n$ линейных операторов $H_i : \mathcal{L}_\infty \rightarrow \mathcal{L}_\infty$, $i \in \{1, 2, \dots, p - n\}$, удовлетворяющих (5.5). Обозначим матрицы M_g , M_b как (5.51). Рассмотрим алгоритм оценивания (5.45), где Φ и Y определены в (5.52), (5.53), и $M_b^\perp : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta \times p}$ – левый аннигилятор M_b полного ранга. Тогда выполняется*

$$\det\{\Phi(t)\} \notin \mathcal{L}_2 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)| = 0.$$

Более того, если $\det^2\{\Phi(t)\} \geq \kappa > 0$, то $|\tilde{\theta}(t)|$ стремится к нулю экспоненциально.

Очевидно, что примеры, приведённые в подразделах 5.3.1 и 5.3.1, являются частными случаями Утверждения 5.5.

5.4 Выводы по главе

В главе была предложена процедура динамического расширения регрессора, которая позволяет усилить используемые при построении адаптивных наблюдателей алгоритмы оценивания. Для задачи оценивания, заданной линейной регрессией, предложенная процедура позволяет получить условия асимптотической сходимости, отличающиеся от условия неисчезающего возбуждения. Приведённый иллюстративный пример демонстрирует задачу

оценивания, в которой градиентный алгоритм оценивания не обеспечивает сходимости оценок, в то время как алгоритм оценивания, построенный с применением процедуры ДРР гарантирует стремление ошибок оценивания к нулю.

Так же использование процедуры ДРР обеспечивает монотонность переходных процессов для компонентов вектора оценок параметров, откуда следует, что модуль ошибки оценивания для каждого параметра является невозрастающей функцией. Указанное свойство, в свою очередь, гарантирует отсутствие выбросов или осцилляций в переходных процессах при оценивании параметров, что имеет большое значение для качества работы адаптивных наблюдателей.

Предложенная процедура ДРР была использована для модификации алгоритмов оценивания параметров мультисинусоидальных возмущений, рассмотренных в Главе 2. Показано, что переходные процессы в модифицированном алгоритме имеют демонстрируют как существенное сокращение времени оценивания, так и отсутствие выбросов и колебаний.

Другим возможным применением предложенной процедуры ДРР является задача оценивания постоянных параметров, входящих в нелинейную регрессионную модель. Если часть нелинейных функций обладает свойством монотонности, то за счёт динамического расширения становится возможным изолировать эти нелинейности и построить алгоритм оценивания параметров. Такой подход обладает заметными преимуществами по сравнению со сведением исходной задачи к линейной модели путём перепараметризации. Приведённые результаты численного моделирования иллюстрирую это утверждение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итогом диссертационной работы является новый подход к построению адаптивных наблюдателей нелинейных систем, основанный на сведении задачи оценивания к задаче идентификации постоянных параметров. Разработанные в рамках предложенного подхода методы применимы для широкого класса нелинейных систем, в том числе для систем, подверженных действию возмущений, что позволяет использовать предложенные методы в задачах компенсации. В диссертации также предложены методы, позволяющие повысить точность оценивания параметров внешних возмущений, обеспечить отсутствие выбросов и колебаний в процессе оценивания и расширить класс траекторий системы, для которого гарантируется асимптотическая сходимость оценок.

В первой главе диссертации приведена постановка общая постановка задачи оценивания неизмеряемых состояний нелинейной системы. Далее в главе выделены две подзадачи, рассматривающие оценку состояния для линейной подсистемы с неизвестными параметрами и для нелинейной подсистемы с известными параметрами.

Глава 2 посвящена решению первой из сформулированных проблем. Как показано в главе, рассматриваемая задача может быть представлена как задача оценивания неизмеряемого детерминированного мультисинусоидального возмущения, действующего на некоторый объект. В главе предложены адаптивные методы оценки вектора состояния генератора такого возмущения, построенные с использованием метода идентификации частоты мультисинусоидального сигнала. На основе полученных методов в главе также предложены методы компенсации возмущений. При этом рассматриваются два случая — возмущение, действующее на нелинейный объект в точке, совпадающей с точкой приложения управляющего сигнала, и возмущение,

действующее на линейный объект, у которого измеряется только выходная переменная.

В главе 3 рассматривается прикладная задача компенсации вибраций для электромеханического объекта. Предполагается, что такие вибрации могут быть представлены как сумма конечного числа синусоидальных компонент, что позволяет решить задачу компенсации путём построения адаптивного наблюдателя детерминированного возмущения. В главе показано, что действующее возмущение может быть представлено как некоторая комбинация сигналов, полученных на выходе банка фильтров, что позволяет свести задачу построения наблюдателя к задаче нахождения постоянных параметров такой комбинации. В дополнение к результатам численного моделирования в главе приводятся результаты экспериментальных исследований по подавлению вибраций.

В главе 4 рассматривается вторая из подзадач, сформулированных в главе 1. Для широкого класса нелинейных систем предложен подход, позволяющий свести задачу построения адаптивного наблюдателя к задаче оценивания вектора постоянных параметров, соответствующих начальным условиям некоторой дополнительной системы, полученной при частичной смене координат. Как показано в главе, класс систем, для которых применим такой подход, описывается двумя допущениями: существование частичной замены координат, позволяющей перевести исходную систему в желаемую каскадную форму, и возможности идентифицировать вектор постоянных параметров. Первое из этих допущений связано с решением уравнения в частных производных, в то время как второе допущение связано с определением класса входных воздействий, при которых требуемый вектор параметров может быть идентифицирован. В главе приведены результаты численного моделирования оценивания состояний преобразователя Чуа и положения синхронного двигателя с постоянными магнитами.

В 5-ой главе рассматривается проблема усиления алгоритмов оценивания параметров, используемых при построении адаптивных наблюдателей в рамках предложенного в диссертации подхода. В главе предложен метод динамического расширения, который позволяет обеспечить асимптотическую сходимость оценок параметров при условиях, которые, как показано в главе, в ряде случаев оказываются слабее, чем традиционное условие неисчезающего возбуждения. Также предложенный метод динамического расширения обеспечивает монотонность переходных процессов и, соответственно, отсутствие выбросов и осцилляций. При рассмотрении задачи оценивания параметров для нелинейно параметризованной модели предложенный в главе метод позволяет изолировать отвечающие условию монотонности нелинейные функции и, при выполнении ряда условий, построить оценку неизвестных параметров. В главе приводятся результаты численного моделирования построенного с использованием предложенного метода алгоритма оценивания параметров возмущений, иллюстрирующие повышение быстродействия и монотонность ошибок оценивания.

Изложенные в диссертации методы могут быть использованы для широкого класса технических объектов, где ряд сигналов недоступен прямому измерению в силу технических или экономических причин. Применение предложенных в диссертации методов позволит формировать оценку этих сигналов, которая затем может быть использована для построения управления по обратной связи, диагностики и мониторинга состояния технического объекта, в задачах контроля неисправностей и других. Применение предложенных в работе методов позволит также снизить число датчиков, используемых в техническом объекте, что положительно скажется как на стоимости, так и на сложности разработки и изготовления такого объекта.

Диссертация вносит вклад в развитие теории управления, предлагая новый научно обоснованный подход к построению адаптивных наблюдателей. Предложенные методы могут быть в дальнейшем использованы для решения

широкого круга задач адаптивного управления, идентификации параметров, анализа сходимости алгоритмов оценивания недоступных измерению сигналов.

В качестве направления дальнейших исследований по рассматриваемой теме могут быть указаны следующие вопросы: построение адаптивных наблюдателей для нелинейных генераторов детерминированных возмущений, точное определение класса технических систем, для которого может быть применён метод построения адаптивного наблюдателя с оценкой параметров, то есть для которого возможно указать требуемую замену части координат, и разработка конструктивного метода выбора линейных операторов H при использовании метода динамического расширения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Khalil, H.K. Nonlinear systems [Text] / H.K. Khalil, J.W. Grizzle. — USA : Prentice Hall, 1996. — Vol. 3. — P. 750.
2. Gauthier, J. Deterministic observation theory and applications [Text] / J. Gauthier, I. Kupka. — Cambridge, UK : Cambridge university press, 2001. — P. 226.
3. Besançon, G. Nonlinear observers and applications [Text] / G. Besançon. — Berlin : Springer, 2007. — Vol. 363. — P. 224.
4. Praly, Laurent. On certainty-equivalence design of nonlinear observer-based controllers [Text] / Laurent Praly, Murat Arcak // Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on. — Vol. 2. — Las Vegas, USA : [s. n.], 2002. — P. 1485–1490.
5. Sussmann, HJ. The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems [Text] / HJ Sussmann, PV Kokotovic // Automatic Control, IEEE Transactions on. — 1991. — Vol. 36, no. 4. — P. 424–440.
6. Teel, Andrew R. Examples of GES systems that can be driven to infinity by arbitrarily small additive decaying exponentials [Text] / Andrew R Teel, J Hespanha // Automatic Control, IEEE Transactions on. — 2004. — Vol. 49, no. 8. — P. 1407–1410.
7. Krener, A.J. Nonlinear observers with linearizable error dynamics [Text] / A.J. Krener, W. Respondek // SIAM Journal on Control and Optimization. — 1985. — Vol. 23, no. 2. — P. 197–216.

8. Kazantzis, N. Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem [Text] / N. Kazantzis, C. Kravaris // *Systems & Control Letters*. — 1998. — Vol. 34, no. 5. — P. 241–247.
9. Ioannou, P.A. Robust adaptive control [Text] / P.A. Ioannou, J. Sun. — USA : Courier Corporation, 2012. — P. 848.
10. Krstic, Miroslav. Nonlinear and adaptive control design [Text] / Miroslav Krstic, Petar V. Kokotovic, Ioannis Kanellakopoulos. — USA : John Wiley & Sons, Inc., 1995. — P. 563.
11. Sastry, S. Adaptive control: stability, convergence and robustness [Text] / S. Sastry, M. Bodson. — USA : Courier Corporation, 2011. — P. 381.
12. Astolfi, A. Nonlinear and adaptive control with applications [Text] / A. Astolfi, D. Karagiannis, R. Ortega. — USA : Springer Science & Business Media, 2007. — P. 290.
13. Besançon, Gildas. Remarks on nonlinear adaptive observer design [Text] / Gildas Besançon // *Systems & Control Letters*. — 2000. — Vol. 41, no. 4. — P. 271 – 280.
14. Marino, Riccardo. Adaptive observers for single output nonlinear systems [Text] / Riccardo Marino // *Automatic Control, IEEE Transactions on*. — 1990. — Vol. 35, no. 9. — P. 1054–1058.
15. Cho, Young Man. A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems [Text] / Young Man Cho, R. Rajamani // *Automatic Control, IEEE Transactions on*. — 1997. — Vol. 42, no. 4. — P. 534–537.
16. Adaptive observers for nonlinearly parameterized class of nonlinear systems [Text] / M. Farza, M. M'Saad, T. Maatoug, M. Kamoun // *Automatica*. — 2009. — Vol. 45, no. 10. — P. 2292 – 2299.

17. Besancon, Gildas. On adaptive observers for state affine systems [Text] / Gildas Besancon, J De Leon-Morales, Oscar Huerta-Guevara // International journal of Control. — 2006. — Vol. 79, no. 06. — P. 581–591.
18. García, E. Alcorta. Deterministic nonlinear observer-based approaches to fault diagnosis: A survey [Text] / E. Alcorta García, P.M. Frank // Control Engineering Practice. — 1997. — Vol. 5, no. 5. — P. 663 – 670.
19. Xu, Aiping. Nonlinear system fault diagnosis based on adaptive estimation [Text] / Aiping Xu, Qinghua Zhang // Automatica. — 2004. — Vol. 40, no. 7. — P. 1181 – 1193.
20. An adaptive interconnected observer for sensorless control of pm synchronous motors with online parameter identification [Text] / Mohamed Assaad Hamida, Jesus De Leon, Alain Glumineau, Robert Boisliveau // Industrial Electronics, IEEE Transactions on. — 2013. — Vol. 60, no. 2. — P. 739–748.
21. Speed sensorless control of induction motors based on a reduced-order adaptive observer [Text] / Marcello Montanari, Sergei M Peresada, Carlo Rossi, Andrea Tilli // IEEE Transactions on Control Systems Technology. — 2007. — Vol. 15, no. 6. — P. 1049–1064.
22. Garimella, Phanindra. Nonlinear adaptive robust observer for velocity estimation of hydraulic cylinders using pressure measurement only [Text] / Phanindra Garimella, Bin Yao // ASME 2002 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. — USA : [s. n.], 2002. — P. 907–916.
23. Speed observation and position feedback stabilization of partially linearizable mechanical systems [Text] / Aneesh Venkatraman, Romeo Ortega, Ioannis Sarras, Arjan Van der Schaft // Automatic Control, IEEE Transactions on. — 2010. — Vol. 55, no. 5. — P. 1059–1074.

24. A nonlinear observer design for fuel cell hydrogen estimation [Text] / Murat Arcak, Haluk Görgün, Lars Malcolm Pedersen, Subbarao Varigonda // IEEE Transactions on Control Systems Technology. — 2004. — Vol. 12, no. 1. — P. 101–110.
25. An Adaptive Nonlinear Current Observer for Boost PFC AC/DC Converters [Text] / Majid Pahlevani, Shangzhi Pan, Suzan Eren [et al.] // Industrial Electronics, IEEE Transactions on. — 2014. — Vol. 61, no. 12. — P. 6720–6729.
26. Identification of frequency of biased harmonic signal [Text] / S. Aranovskiy, A. Bobtsov, A. Kremlev [et al.] // IFAC Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing. — Saint-Petersburg, Russia : [s. n.], 2007. — P. 167–172.
27. Bobtsov, A. Frequency Identification of Biased Harmonic Output Disturbance [Text] / A. Bobtsov, S. Aranovskiy // 15th IFAC Symposium on System Identification. — Saint-Malo, France : [s. n.], 2009. — P. 623–627.
28. Cancellation of Unknown Harmonic Disturbance for Nonlinear System with Input Delay [Text] / A. Bobtsov, A. Pyrkin, A. Kremlev, S. Aranovskiy // 18th IFAC World Congress. — Milan, Italy : [s. n.], 2011. — P. 1516–1521.
29. Aranovskiy, S. Output harmonic disturbance compensation for nonlinear plant [Text] / S. Aranovskiy, A. Bobtsov // 20th Mediterranean Conference on Control and Automation. — Barcelona, Spain : [s. n.], 2012. — P. 386–391.
30. Aranovskiy, S. Adaptive attenuation of disturbance formed as a sum of sinusoidal signals applied to a benchmark problem [Text] / S. Aranovskiy // 2013 European Control Conference. — Zurich, Switzerland : [s. n.], 2013. — P. 2879–2884.
31. The New Algorithm of Sinusoidal Signal Frequency Estimation [Text] / N. Nikolaev, A. Bobtsov, O. Slita [et al.] // IFAC Workshop on Adaptation

- and Learning in Control and Signal Processing. — Caen, France : [s. n.], 2013. — P. 182–186.
32. Improved frequency identification via an adaptive filters cascade [Text] / S. Aranovskiy, A. Bobtsov, A. Pyrkin, P. Gritcenko // 2014 IEEE Conference on Control Applications. — Antibes, France : [s. n.], 2014. — P. 140–145.
 33. Output adaptive controller for linear system with input delay and multisinusoidal disturbance [Text] / A. Pyrkin, A. Bobtsov, V. Nikiforov [et al.] // 2014 IEEE Conference on Control Applications. — Antibes, France : [s. n.], 2014. — P. 1777–1782.
 34. Adaptive Controller for Linear Plant with Parametric Uncertainties, Input Delay And Unknown Disturbance [Text] / A. Pyrkin, A. Bobtsov, S. Aranovskiy [et al.] // 19th IFAC World Congress. — Cape Town, South Africa : [s. n.], 2014. — P. 11294–11298.
 35. On Stability of Tunable Linear Time-Varying Band-Pass Filters [Text] / J. Wang, S. Aranovskiy, A. Bobtsov [et al.] // 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems (MICNON). — Vol. 48. — Saint Petersburg, Russia : [s. n.], 2015. — P. 345 – 347.
 36. Flux and Position Observer of Permanent Magnet Synchronous Motors with Relaxed Persistency of Excitation Conditions [Text] / S. Aranovskiy, A. Bobtsov, A. Pyrkin [et al.] // 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems (MICNON). — Saint-Petersburg, Russia : [s. n.], 2015. — P. 301 – 306.
 37. Ćuk converter full state adaptive observer design [Text] / A. Pyrkin, R. Ortega, A. Bobtsov [et al.] // 2015 IEEE Conference on Control Applications. — Sydney, Australia : [s. n.], 2015. — P. 1254–1259.

38. A parameter estimation approach to state observation of nonlinear systems [Text] / R. Ortega, A. Bobtsov, A. Pyrkin, S. Aranovskiy // 54th IEEE Conference on Decision and Control. — Osaka, Japan : [s. n.], 2015.
39. Improved Transients in Multiple Frequencies Estimation via Dynamic Regressor Extension and Mixing [Text] / S. Aranovskiy, A. Bobtsov, R. Ortega, A. Pyrkin // IFAC Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing. — Eindhoven, The Netherlands : [s. n.], 2016.
40. Parameters Estimation via Dynamic Regressor Extension and Mixing [Text] / S. Aranovskiy, A. Bobtsov, R. Ortega, A. Pyrkin // American Control Conference. — Boston, MA, USA : [s. n.], 2016.
41. Арановский, С. В. Компенсация конечномерного квазигармонического возмущения для нелинейного объекта [Текст] / С. В. Арановский, А. А. Бобцов, А. С. Кремлев // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2006. — № 4. — С. 14–21.
42. Арановский, С. В. Алгоритм компенсации квазигармонического возмущения с нерегулярной составляющей [Текст] / С. В. Арановский, А. А. Бобцов // Изв. вузов. Приборостроение. — 2007. — № 11. — С. 19–23.
43. Робастный алгоритм идентификации частоты синусоидального сигнала [Текст] / С. В. Арановский, А. А. Бобцов, А. С. Кремлев, Г. В. Лукьянова // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2007. — № 3. — С. 39–44.
44. Идентификация частоты гармонического сигнала, действующего на линейный объект [Текст] / С. В. Арановский, А. А. Бобцов, А. С. Кремлёв, Г. В. Лукьянова // Известия ВУЗов. Приборостроение. — 2007. — № 1. — С. 22–25.

45. Идентификация частоты смещенного синусоидального сигнала [Текст] / С.В. Арановский, А.А. Бобцов, А.С. Кремлев [и др.] // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 9. — С. 3–9.
46. Арановский, С. В. Идентификация частоты смещённого гармонического сигнала [Текст] / С. В. Арановский // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. — 2008. — № 47. — С. 97–104.
47. Арановский, С. В. Адаптивный наблюдатель неизвестного синусоидального выходного возмущения для линейного объекта [Текст] / С. В. Арановский, А. А. Бобцов, А. А. Пыркин // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 11. — С. 108–116.
48. Синтез наблюдателя в условиях возмущения процесса измерения выхода объекта [Текст] / С. В. Арановский, В. М. Бардов, А. А. Бобцов [и др.] // Изв. вузов. Приборостроение. — 2009. — № 11. — С. 28–32.
49. Арановский, С. В. Синтез наблюдателя для нелинейного объекта в условиях гармонического возмущения, приложенного к выходной переменной [Текст] / С. В. Арановский, А. А. Бобцов, В. О. Никифоров // Научно-технический вестник ИТМО. — 2010. — № 3. — С. 32–39.
50. Арановский, С.В. Синтез гибридного наблюдателя для линейного объекта в условиях гармонического возмущения [Текст] / С.В. Арановский, Бобцов А.А., А.А. Пыркин // Известия ВУЗов. Приборостроение. — 2011. — № 6. — С. 13–18.
51. Арановский, С. В. Каскадная схема идентификации частоты гармонического сигнала [Текст] / С. В. Арановский, А. А. Бобцов, А. В. Горин // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. — 2011. — № 1. — С. 129.

52. Алгоритм улучшения параметрической сходимости неизвестной частоты синусоидального сигнала с использованием каскадной редукции [Текст] / С. В. Арановский, А. А. Бобцов, А. А. Ведяков [и др.] // Научно-технический вестник ИТМО. — 2012. — № 4. — С. 149–151.
53. Арановский, С. В. Идентификация линейно меняющейся частоты синусоидального сигнала [Текст] / С. В. Арановский, А. А. Бобцов, А. А. Пыркин // Научно-технический вестник ИТМО. — 2012. — № 1. — С. 28–32.
54. Арановский, С. В. Каскадная редукция в задачах идентификации [Текст] / С. В. Арановский, А. А. Бобцов, А. А. Пыркин // Научно-технический вестник ИТМО. — 2012. — № 3. — С. 149–150.
55. Повышение точности идентификации с использованием метода каскадной фильтрации [Текст] / П. А. Гриценко, С. В. Арановский, А. А. Бобцов, А. А. Пыркин // Известия ВУЗов. Приборостроение. — 2015. — № 8. — С. 587–592.
56. Арановский, С. В. Прямой адаптивный метод компенсации мультисинусоидальных возмущений [Текст] / С. В. Арановский, А. А. Лосенков // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. — 2015. — Т. 58, № 9. — С. 694–700.
57. Aranovskiy, S. Adaptive compensation of disturbances formed as sums of sinusoidal signals with application to an active vibration control benchmark [Text] / S. Aranovskiy, L. Freidovich // European Journal of Control. — 2013. — Vol. 19, no. 4. — P. 253–265.
58. Identification of frequency of biased harmonic signal [Text] / S. Aranovskiy, A. Bobtsov, A. Kremlev [et al.] // European Journal of Control. — 2010. — Vol. 16, no. 2. — P. 129–139.

59. Discussion and Final Comments on “Identification of frequency of biased harmonic signal” [Text] / G. Damm, S. Aranovskiy, A. Bobtsov [et al.] // European Journal of Control. — 2010. — Vol. 16, no. 2. — P. 140–143.
60. Adaptive filters cascade applied to a frequency identification improvement problem [Text] / S. Aranovskiy, A. Bobtsov, A. Pyrkin, P. Gritchenko // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. — 2016. — Vol. 30, no. 5. — P. 677–689.
61. A parameter estimation approach to state observation of nonlinear systems [Text] / O. Romeo, Bobtsov. A., A. Pyrkin, S. Aranovskiy // Systems & Control Letters. — 2015. — Vol. 85. — P. 84 – 94.
62. Алгоритм улучшения идентифицирующих свойств в задачах оценки параметров линейной регрессионной модели [Текст] / С. В. Арановский, А. А. Бобцов, Ц. Ван [и др.] // Научно-технический вестник ИТМО. — 2016. — № 3. — С. 565–567.
63. Clarke, D.W. On the design of adaptive notch filters [Text] / D.W. Clarke // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. — 2001. — Vol. 15, no. 7. — P. 715–744.
64. Уонем, М. Линейные многомерные системы: геометрический подход [Текст] / М. Уонем. — М. : Наука, 1980. — С. 376.
65. Бобцов, А.А. Адаптивная идентификация частоты смещенного синусоидального сигнала [Текст] / А.А. Бобцов, А.С. Кремлев // Известия вузов. Приборостроение. — 2005. — Т. 48, № 3. — С. 22–26.
66. Bobtsov, A. Algorithm of parameters identification of polyharmonic function [Text] / A. Bobtsov, A. Lyamin, D. Romasheva // IFAC Proceedings Volumes. — 2002. — Vol. 35, no. 1. — P. 439–443.

67. Bodson, M. Adaptive algorithms for the rejection of sinusoidal disturbances with unknown frequency [Text] / M. Bodson, S.C. Douglas // *Automatica*. — 1997. — Vol. 33, no. 12. — P. 2213–2221.
68. Hou, M. Amplitude and frequency estimator of a sinusoid [Text] / M. Hou // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2005. — Vol. 50, no. 6. — P. 855–858.
69. Hsu, L. A globally convergent frequency estimator [Text] / L. Hsu, R. Ortega, G. Damm // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1999. — Vol. 44, no. 4. — P. 698–713.
70. Marino, R. Global estimation of n unknown frequencies [Text] / R. Marino, P. Tomei // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2002. — Vol. 47, no. 8. — P. 1324–1328.
71. Mojiri, M. An adaptive notch filter for frequency estimation of a periodic signal [Text] / M. Mojiri, A.R. Bakhshai // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2004. — Vol. 49, no. 2. — P. 314–318.
72. Obregon-Pulido, G. A globally convergent estimator for n-frequencies [Text] / G. Obregon-Pulido, B. Castillo-Toledo, A. Loukianov // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2002. — Vol. 47, no. 5. — P. 857–863.
73. Xia, X. Global frequency estimation using adaptive identifiers [Text] / X. Xia // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2002. — Vol. 47, no. 7. — P. 1188–1193.
74. Никифоров, В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений [Текст] / В.О. Никифоров. — СПб. : Наука, 2003. — С. 282.

75. Никифоров, В.О. Наблюдатели внешних возмущений. 1. Объекты с известными параметрами [Текст] / В.О. Никифоров // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 10. — С. 13–24.
76. Никифоров, В.О. Наблюдатели внешних возмущений. 2. Объекты с неизвестными параметрами [Текст] / В.О. Никифоров // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 11. — С. 40–48.
77. Бобцов, А.А. Синтез наблюдателя в задаче компенсации конечномерного квазигармонического возмущения [Текст] / А.А. Бобцов, А.С. Кремлев // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2005. — № 3. — С. 5–11.
78. Бобцов, А.А. Алгоритм управления по выходу с компенсацией гармонического возмущения со смещением [Текст] / А.А. Бобцов // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 8. — С. 25–32.
79. Marino, R. Adaptive stabilization of linear systems with outputs affected by unknown sinusoidal disturbances [Text] / R. Marino, G. Santosuosso, P. Tomei // European Control Conference. — Greece : [s. n.], 2007. — P. 129–134.
80. Marino, R. Output regulation for linear minimum phase systems with unknown order exosystem [Text] / R. Marino, P. Tomei // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2007. — Vol. 52, no. 10. — P. 2000–2005.
81. Nikiforov, V.O. Adaptive servocompensation of input disturbances [Text] / V.O. Nikiforov // Proc. 13th World IFAC Congr. — 1996. — P. 175–180.
82. Nikiforov, V.O. Adaptive controller rejecting uncertain deterministic disturbances in SISO systems [Text] / V.O. Nikiforov // European Control Conference. — Bruxelles : [s. n.], 1997.
83. Ben-Amara, F. Robust adaptive sinusoidal disturbance rejection in linear continuous-time systems [Text] / F. Ben-Amara, P.T. Kabamba, A.G. Ulsoy //

- 36th IEEE Conference on Decision and Control. — Vol. 2. — USA : [s. n.], 1997. — P. 1878–1883.
84. Marino, R. Global adaptive compensation of noises with unknown frequency [Text] / R. Marino, P. Tomei // 39th IEEE Conference on Decision and Control. — Vol. 5. — Australia : [s. n.], 2000. — P. 4926–4927.
85. Adaptive rejection of unknown sinusoidal disturbances in linear SISO uncertain systems [Text] / B. Xian, N. Jalili, D.M. Dawson, Y. Fang // American Control Conference. — Vol. 5. — USA : [s. n.], 2002. — P. 4015–4020.
86. Marino, R. Robust adaptive compensation of biased sinusoidal disturbances with unknown frequency [Text] / R. Marino, G. L. Santosuosso, P. Tomei // Automatica. — 2003. — Vol. 39, no. 10. — P. 1755–1761.
87. Serrani, A. Semi-global nonlinear output regulation with adaptive internal model [Text] / A. Serrani, A. Isidori, L. Marconi // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2001. — Vol. 46, no. 8. — P. 1178–1194.
88. Nikiforov, V.O. Nonlinear servocompensation of unknown external disturbances [Text] / V.O. Nikiforov // Automatica. — 2001. — Vol. 37, no. 10. — P. 1647–1653.
89. Marino, R. Global compensation of unknown sinusoidal disturbances for a class of nonlinear nonminimum phase systems [Text] / R. Marino, G.L. Santosuosso [et al.] // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2005. — Vol. 50, no. 11. — P. 1816–1822.
90. Marino, R. Output regulation for a class of nonlinear systems with unknown sinusoidal disturbances [Text] / R. Marino, G.L. Santosuosso // 37th Conference on Decision and Control. — Vol. 44. — USA : [s. n.], 2005. — P. 3321.
91. Ларин, В.Б. Спектральные методы синтеза линейных систем с обратной связью [Текст] / В.Б. Ларин. — Киев : Наукова Думка, 1971. — С. 137.

92. Kucera, V. Stability of discrete linear control systems [Text] / V. Kucera // Preprints 6th IFAC World Congr. — 1975.
93. Youla, D. Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers – Part I: The single-input case [Text] / D. Youla, H. Jabr, J. Bongiorno // Automatic Control, IEEE Transactions on. — 1976. — Vol. 21, no. 3. — P. 3–14.
94. Anderson, B. From Youla–Kucera to identification, adaptive and nonlinear control [Text] / B. Anderson // Automatica. — 1998. — Vol. 34, no. 12. — P. 1485–1506.
95. Состояние и перспективы развития прецизионных электроприводов комплексов высокоточных наблюдений [Текст] / В.Н. Васильев, В.Д. Шаргородский, М.А. Садовников [и др.] // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. — 2008. — Т. 51, № 6.
96. Zhang, Fuzhen. The Schur complement and its applications [Text] / Fuzhen Zhang. — USA : Springer Science & Business Media, 2006. — Vol. 4. — P. 295.
97. Fedele, G. Non adaptive second-order generalized integrator for identification of a biased sinusoidal signal [Text] / G. Fedele, A. Ferrise // IEEE transactions on automatic control. — 2012. — Vol. 57, no. 7. — P. 1838–1842.
98. Adaptive regulation—rejection of unknown multiple narrow band disturbances (a review on algorithms and applications) [Text] / I. D. Landau, M. Alma, A. Constantinescu [et al.] // Control Engineering Practice. — 2011. — Vol. 19, no. 10. — P. 1168–1181.
99. Zhou, K. Essentials of robust control [Text] / K. Zhou, J.C. Doyle. — USA : Prentice Hall, 1998. — P. 411.

100. Поляк, Б.Т. Робастная устойчивость и управление [Текст] / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. — М. : Наука, 2002. — С. 303.
101. Bodson, M. Rejection of periodic disturbances of unknown and time-varying frequency [Text] / M. Bodson // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. — 2005. — Vol. 19, no. 2-3. — P. 67–88.
102. Francis, B.A. The internal model principle of control theory [Text] / B.A. Francis, W.M. Wonham // Automatica. — 1976. — Vol. 12, no. 5. — P. 457–465.
103. Benchmark on adaptive regulation—rejection of unknown/time-varying multiple narrow band disturbances [Text] / I. D. Landau, A. C. Silva, T. Airimitoie [et al.] // European Journal of control. — 2013. — Vol. 19, no. 4. — P. 237–252.
104. Мирошник, И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы [Текст] / И.В. Мирошник. — СПб. : Питер, 2005. — С. 336.
105. Умнов, А.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Текст] / А.Е. Умнов. — М. : МФТИ, 2011. — С. 544.
106. Шафаревич, И.Р. Линейная алгебра и геометрия [Текст] / И.Р. Шафаревич, А.О. Ремизов. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. — С. 512.
107. Хабалов, В.В. Моделирование и идентификация систем. Учебное пособие по курсам "Моделирование систем" "Идентификация и диагностика систем"[Текст] / В.В. Хабалов. — СПб. : СПбГИТМО (ТУ), 2001. — С. 90.
108. Льюнг, Л. Идентификация систем. Теория для пользователя [Текст] / Л. Льюнг. — М. : Наука, 1991. — С. 432.
109. Åström, K. Adaptive Control [Text] / K. Åström, B. Wittenmark. — 2 edition. — USA : Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1994.

110. Методы адаптивного и робастного управления нелинейными объектами в приборостроении [Текст] / А.А. Бобцов, В.О. Никифоров, А.А. Пыркин [и др.]. — СПб. : НИУ ИТМО, 2013. — С. 277.
111. Andrieu, V. On the Existence of a Kazantzis–Kravaris/Luenberger Observer [Text] / V. Andrieu, L. Praly // SIAM Journal on Control and Optimization. — 2006. — Vol. 45, no. 2. — P. 432–456.
112. Cheng, D. On feedback equivalence to port controlled Hamiltonian systems [Text] / D. Cheng, A. Astolfi, R. Ortega // Systems & control letters. — 2005. — Vol. 54, no. 9. — P. 911–917.
113. Isidori, A. Nonlinear control systems [Text] / A. Isidori. — USA : Springer Science & Business Media, 2013. — P. 549.
114. Annaswamy, A.M. Adaptive control of continuous time systems with convex/concave parametrization [Text] / A.M. Annaswamy, F.P. Skantze, A. Loh // Automatica. — 1998. — Vol. 34, no. 1. — P. 33–49.
115. Grip, H. F. Estimation of states and parameters for linear systems with nonlinearly parameterized perturbations [Text] / H. F. Grip, A. Saberi, T.A. Johansen // Systems & Control Letters. — 2011. — Vol. 60, no. 9. — P. 771–777.
116. Immersion and invariance adaptive control of nonlinearly parameterized nonlinear systems [Text] / X. Liu, R. Ortega, H. Su, J. Chu // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2010. — Vol. 55, no. 9. — P. 2209–2214.
117. On adaptive control of nonlinearly parameterized nonlinear systems: Towards a constructive procedure [Text] / X. Liu, R. Ortega, H. Su, J. Chu // Systems & Control Letters. — 2011. — Vol. 60, no. 1. — P. 36–43.

118. Tyukin, I. Adaptation and parameter estimation in systems with unstable target dynamics and nonlinear parametrization [Text] / I. Tyukin, D. Prokhorov, C. van Leeuwen // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2007. — Vol. 52, no. 9. — P. 1543–1559.
119. Loria, A. Explicit convergence rates for MRAC-type systems [Text] / A. Loria // Automatica. — 2004. — Vol. 40, no. 8. — P. 1465–1468.
120. Kailath, T. Linear systems [Text] / T. Kailath. — USA : Prentice Hall, 1980. — Vol. 156. — P. 682.
121. Walter, E. Identifiability of parametric models [Text] / E. Walter. — Oxford, UK : Pergamon Press, 1987. — P. 132.
122. Middleton, R.H. Adaptive computed torque control for rigid link manipulations [Text] / R.H. Middleton, G.C. Goodwin // Systems & Control Letters. — 1988. — Vol. 10, no. 1. — P. 9–16.
123. Analysis of electric machinery and drive systems [Text] / P. Krause, O. Wasynczuk, S. Sudhoff, S. Pekarek. — USA : John Wiley & Sons, 2013. — Vol. 75. — P. 613.
124. Meisel, J. Principles of electromechanical-energy conversion [Text] / J. Meisel. — USA : Krieger Pub, 1984. — P. 639.
125. Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: mechanical, electrical and electromechanical applications [Text] / R. Ortega, J. Perez, P. Nicklasson, H. Sira-Ramirez. — USA : Springer Science & Business Media, 2013. — P. 543.
126. Bobtsov, A. A new approach for estimation of electrical parameters and flux observation of permanent magnet synchronous motors [Text] / A. Bobtsov, A. Pyrkin, R. Ortega // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. — 2015.

127. Nam, K. AC Motor control and electric vehicle applications [Text] / K. Nam. — USA : CRC Press, 2010. — P. 449.
128. Estimation of rotor position and speed of permanent magnet synchronous motors with guaranteed stability [Text] / R. Ortega, L. Praly, A. Astolfi [et al.] // Control Systems Technology, IEEE Transactions on. — 2011. — Vol. 19, no. 3. — P. 601–614.
129. Malaizé, J. Globally convergent nonlinear observer for the sensorless control of surface-mount Permanent Magnet Synchronous machines [Text] / J. Malaizé, L. Praly, N. Henwood // 51st Conference on Decision and Control. — Hawaii, USA : [s. n.], 2012. — P. 5900–5905.
130. Chowdhary, G. Concurrent learning for convergence in adaptive control without persistency of excitation [Text] / G. Chowdhary, E. Johnson // Proc. 49th IEEE Conference on Decision and Control. — Atlanta, USA : [s. n.], 2010. — P. 3674–3679.
131. Efimov, D. Design of impulsive adaptive observers for improvement of persistency of excitation [Text] / D. Efimov, A. Fradkov // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. — 2015. — Vol. 29, no. 6. — P. 765–782.
132. Mishkov, R. Exact parameter estimation without persistent excitation in nonlinear adaptive control systems [Text] / R. Mishkov, S. Darmonski // Proc. 7th National Conference on Process Automation in the Food and Biotechnology Industries. — Vol. 60. — Plovdiv, Bulgaria : [s. n.], 2013. — P. 100–106.
133. Fast Compensation of Unknown Multiharmonic Disturbance for Nonlinear Plant with Input Delay [Text] / A. Pyrkin, A. Bobtsov, S. Kolyubin [et al.] // Proc. 11th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing. — Caen, France : [s. n.], 2013. — P. 546–551.

134. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц [Текст] / Ф.Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1967. — С. 475.
135. Ланкастер, П. Теория матриц [Текст] / П. Ланкастер. — М. : Наука, 1973.
136. Convergent dynamics, a tribute to Boris Pavlovich Demidovich [Text] / A. Pavlov, A. Pogromsky, N. van de Wouw, H. Nijmeijer // Systems & Control Letters. — 2004. — Vol. 52, no. 3–4. — P. 257 – 261.