

федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Санкт-Петербургский национальный  
исследовательский университет информационных технологий, механики и  
оптики»

  
На правах рукописи

**Краснов Александр Юрьевич**

**Траекторное управление мобильными роботами в условиях наличия  
внешних возмущений и подвижных препятствий**

05.13.01 - Системный анализ, управление и обработка информации (в  
технических системах) (технические науки)

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель  
к.т.н., доцент  
Чепинский Сергей Алексеевич

Санкт-Петербург – 2017

## Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Обзор существующих решений и анализ моделей мобильных роботов</b>	<b>10</b>
1.1 Обзор методов траекторного управления . . . . .	10
1.2 Анализ математических моделей колесных мобильных роботов .	14
1.3 Обобщенная постановка задачи . . . . .	44
<b>2 Траекторное управление возмущенным объектом</b>	<b>47</b>
2.1 Синтез траекторного управления возмущенным объектом . . . .	49
2.2 Синтез траекторного управления возмущенным объектом без измерения линейных скоростей . . . . .	56
2.3 Примеры . . . . .	62
2.4 Выводы по главе . . . . .	64
<b>3 Траекторное управление при наличии препятствий</b>	<b>65</b>
3.1 Траекторное управление плоским движением при наличии внеш- него подвижного объекта . . . . .	66
3.2 Траекторное управление пространственным движением при на- личии внешнего подвижного объекта . . . . .	75
3.3 Выводы по главе . . . . .	85
<b>4 Эксперименты</b>	<b>87</b>
4.1 Техническое описание мобильного робота «Robotino» . . . . .	87
4.2 Математическая модель мобильного робота «Robotino» . . . . .	91
4.3 Реализация движения вдоль геометрических примитивов . . . .	92
4.4 Реализация алгоритмов траекторного управления в условиях наличия внешнего подвижного объекта . . . . .	94

4.5 Выводы по главе . . . . .	96
<b>Заключение</b>	<b>98</b>
<b>Список литературы</b>	<b>101</b>

## Введение

**Актуальность темы исследования.** В последние десятилетия интенсивное развитие науки и техники привело к существенному прогрессу в области мехатроники и робототехники. В частности, прогресс в таких областях, как разработка электроприводов, различных сенсоров, датчиков и измерительных устройств, а также технологии энергосбережения и энергоэффективности обеспечили интенсивное развитие и внедрение мобильных роботов, многие из которых являются частично либо полностью автономными. В мобильных роботах как в наземной, так и в морской и авиационной сферах применения активно стали внедряться интегрированные системы управления движением, позволяющие автоматизировать некоторые задачи. Одним из основных режимов работы автономных мобильных роботов является движение вдоль наперед заданной траектории с обеспечением желаемой скорости. Прогресс в области техники ведет за собой повышению требований к таким системам и ставит новые задачи перед разработчиками систем траекторного управления.

**Степень разработанности темы.** К настоящему времени существует большое количество научных результатов, связанных с синтезом алгоритмов траекторного управления. Значительная часть из них ставит задачу траекторного управления как задачу слежения, где траектория задается параметрически в явном виде. Однако, с точки зрения повышения точности одним из самых перспективных направлений развития являются методы траекторного управления на основе стабилизации геометрических многообразий в пространстве выходов объекта управления, так как данные методы обеспечивают свойство инвариантности предписанной траектории. Развитию таких методов траекторного управления с применением аппарата дифференциальной геометрии и преобразования исходной модели объекта управления к задачно ориентированным координатам в присутствии внешних возмущений и подвижных препятствий посвящена данная работа.

**Цель диссертационной работы.** Целью диссертационной работы является разработка новых алгоритмов траекторного управления мобильными робототехническими системами на основе стабилизации целевых многообразий в пространстве выходов объекта управления при условии наличия неизмеряемых возмущающих воздействий и наличия стационарных и подвижных препятствий в рабочем пространстве мобильного робота. А также проведение экспериментальных исследований полученных алгоритмов на базе мобильного робота «Robotino» производства компании «Festo Didactics».

В процессе достижения поставленной цели решены следующие задачи:

1. Разработан алгоритм траекторного управления относительно заданной в неявном виде траектории при наличии неизмеряемых возмущающих воздействий, не требующий измерения линейных скоростей.

2. Разработаны алгоритмы траекторного управления плоским движением при наличии в рабочем пространстве мобильного робота подвижных препятствий.

3. Разработаны алгоритмы траекторного управления пространственным движением при наличии в рабочем пространстве мобильного робота подвижных препятствий.

4. Решена задача разработки алгоритмов траекторного управления мобильной робототехнической системой «Robotino» производства фирмы «Festo Didactics». Проведены эксперименты на реальном мобильном роботе.

**Методы исследования.** При получении теоретических результатов использовались метод функций Ляпунова, методы дифференциальной и аналитической геометрии, различные методы классической механики, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории динамических систем, линейной алгебры. Экспериментальные результаты были получены с использованием современного программного обеспечения – пакетов Matlab и Simulink, системы автоматизированных вычислений Mathcad, среда для программирования роботов ROS (Robot Operating System); технического оснащения – ро-

бототехнической установки «Robotino» производства фирмы «Festo Didactics», оснащенной системой локальной навигации NorthStar, предоставленной кафедрой Систем Управления и Информатики Университета ИТМО.

**Научная новизна.** В рамках работы развивались методы синтеза регуляторов на основе методологий преобразования к задачно-ориентированным координатам, разработанной И.В. Мирошником [11, 12, 13, 50, 51, 53, 54, 55]. На основании проведенных исследований были разработаны методы синтеза законов управления плоским траекторным движением для мобильных роботов при наличии неизмеряемых внешних возмущений и препятствий в рабочем пространстве мобильного робота. Разработаны версии описанных регуляторов, не требующие измерения вектора линейных скоростей. Также были получены законы управления для решения задачи траекторного управления движением в трехмерном пространстве при наличии подвижных объектов в рабочем пространстве объекта управления.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Теоретическая значимость полученных результатов заключается в том, что разработанные алгоритмы траекторного управления без прямых измерений скоростей и при наличии внешних неизмеряемых возмущений могут быть эффективно применены для широкого класса мобильных роботов. Применение полученных алгоритмов позволит значительно ослабить требования к априорной информации о свойствах среды функционирования объекта управления; значительно снизить затраты на разработку и использование измерительной техники для получения необходимых данных при реализации систем управления, повысить надежность системы благодаря устранению дополнительных помех, вызванных использованием датчиков переменных состояния или вычислителей производных выходной регулируемой переменной. Предлагаемые алгоритмы управления движением подкреплены строгим аналитическим доказательством устойчивости замкнутой системы. Практическая значимость полученных методов управления механическими системами обусловлена разви-

тием промышленных робототехнических систем. Полученные методы могут быть полезны при проектировании алгоритмов управления станками с числовым программным управлением, шагающими роботами, летательными аппаратами и другими робототехническими устройствами, решающими в процессе своей работы траекторные задачи.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Алгоритм траекторного управления возмущенным объектом управления, не требующий измерения линейных скоростей.

2. Алгоритм траекторного управления плоским движением при наличии в рабочем пространстве мобильного робота препятствий и подвижных объектов.

3. Алгоритм траекторного управления движением в трехмерном пространстве при наличии в рабочем пространстве мобильного робота препятствий и подвижных объектов.

Степень достоверности полученных результатов, представленных в диссертационной работе, подтверждается строгостью доказательств утверждений, корректным использованием математического аппарата, представленными в диссертационной работе результатами экспериментальных исследований разработанных алгоритмов на основе мобильного робота «Robotino» производства компании «Festo Didactics», печатными работами, а также статьями в сборниках трудов международных конференций.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Основные результаты диссертации докладывались на 3 международных и 4 российских конференциях:

— V Всероссийский конгресс молодых ученых. Университет ИТМО, 2015. [2]

— 1st IFAC Conference on Modeling, Identification and Control of Nonlinear Systems, Saint Petersburg, Russia, 2015. (1-ая конференция по моделированию, идентификации и управлению нелинейными системами) [37]

- XLV научная и учебно-методическая конференция НИУ ИТМО, 2016
- XVIII конференция молодых ученых «Навигация и управление движением», 2016
- 21th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, 2016 (21-я Международная конференция по методам и моделям в автоматике и робототехнике) [36]
- XIX конференция молодых ученых «Навигация и управление движением», 2017
- 36th Chinese Control Conference, CCC, 2017 (36-я Китайская конференция по управлению) [22]

Работа выполнена на кафедре Систем управления и информатики Университета ИТМО, поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации (проект 14.Z50.31.0031, «Робастные и адаптивные системы управления, коммуникации и вычисления») и при государственной финансовой поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 074–U01 «Нелинейное и адаптивное управление сложными системами», Госзадание 2014/190 проект 2118 «Развитие методов адаптивного и робастного управления сложными нелинейными системами с применением к мехатронным и робототехническим приложениям»). Диссертационная работа поддержана грантом Правительства Санкт–Петербурга при выполнении проекта «Разработка и применение методов траекторного управления автономными мобильными роботами». Достоверность полученных в ходе выполнения диссертационной работы результатов также подтверждается строгостью доказательств утверждений и корректным использованием математического аппарата, а также результатами экспериментов, реализованных при помощи мобильного робота «Robotino» производства компании «Festo Didactics».

**Личный вклад.** Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Соискателем был разработан алгоритм траекторного управле-



ния плоским движением мобильных роботов при наличии внешних неизмеряемых возмущений. Соискателем также был разработан алгоритм траекторного управления мобильными роботами при наличии в рабочем пространстве робота (на заданной траектории движения) статических и/или подвижных препятствий. Разработанные алгоритмы траекторного управления были апробированы соискателем на базе мобильного робота «Robotino» производства компании «Festo Didactics».

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах, включая 4 статьи в журналах, входящих в перечни ВАК [14, 15, 16, 17], 1 статью в сборнике трудов конференции, входящую в РИНЦ [2], и 4 статьи в сборниках трудов конференций, индексируемых в системе цитирования Scopus [22, 28, 36, 37].

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 109 страниц, включая 42 рисунка и 7 таблиц. Библиография включает 67 наименований.

# 1 Обзор существующих решений и анализ моделей мобильных роботов

## 1.1 Обзор методов траекторного управления

Задачи управления пространственным движением механических систем можно условно разделить на две подгруппы. К первой подгруппе относятся задачи обеспечения заданного положения в пространстве. К таким системам, например, относятся системы динамического позиционирования надводных судов, системы стабилизации положения приемных антенн и другие аналогичные технические системы. Общим условием для них является то, что эти практические задачи формулируются с теоретической точки зрения как задачи стабилизации. В противовес этой подгруппе есть круг задач, в которых необходимо обеспечить заданное движение в пространстве. Эти задачи формулируются уже как задачи слежения. Такая классификация позволяет выделить отличительные особенности подходов. Задачи слежения подразумевают под собой наличие некоторого эталонного сигнала, который должен быть повторен. Для задач управления пространственным движением таким сигналом является желаемая траектория движения — кривая в пространстве, по которой должен перемещаться объект управления. Так как в качестве объектов управления выступают механические системы, передвигающиеся в трехмерном пространстве, то их можно условно назвать многоканальными динамическими системами. В работе в качестве объектов управления рассмотрен один из простейших классов механических систем — мобильные системы. Это могут быть мобильные роботы, беспилотные летательные аппараты, интегрированные системы управления движением авиационного и морского назначения и т.п. Далее будут рассмотрены основные результаты, полученные в области синтеза алгоритмов траекторного управления и приведен анализ математических моделей объектов управления.

Теперь рассмотрим основные методы построения алгоритмов управления

траекторным движением. Вообще говоря, исторически сложилось, что первоначально траекторные задачи формулировались как задачи слежения. Точка, которая характеризовала желаемое положение, двигалась вдоль заданной траектории, а регулятор вырабатывал управляющее воздействие, чтобы свети невязку между текущим положением и заданным к нулю. В зависимости от того, как параметризовалась желаемая траектория движения, выделилось два направления развития. Для первой группы характерна параметризация траектории временем [3, 48, 63, 64], то есть траектория движения задавалась в виде

$$S : x(t), y(t), z(t).$$

В работе [18] было показано, что такая формулировка задачи может привести к ухудшению качества регулирования при наличии у объекта управления неустойчивой нуль-динамики. Эти ограничения можно преодолеть, если параметризовать желаемую траекторию каким-либо параметром, к примеру, ее длиной. Таким образом, траектория движения задается в виде

$$S : x(s), y(s), z(s),$$

где  $s$  — некоторый параметр. Это определило не только развитие методов управления, но и сильно повлияло на методы планирования траекторий, так как для такого подхода желательно получить траекторию сразу в виде параметризованной параметрической кривой. На текущий момент этот подход остается доминирующим в области управления движением и получил множество различных вариаций. Одним из самых популярных стал подход, называемый LOS (Line-Of-Sight) [25, 27, 33, 34], основанный на формализации действий рулевого при управлении судном. Кроме того, довольно широко используется понятие виртуального транспортного средства [45, 46]. Виртуальное транспортное средство связано с движением реального объекта управления через некоторые абстрактные связи. Этот метод легко реализует движение вдоль полиномиальных кривых, которые обеспечивают лучшее планирование и более точное следование траектории. Подход к построению систем

управления в виде следящей системы достаточно хорош, он имеет низкую алгоритмическую сложность, хорошее качество регулирования, но не обеспечивает свойства инвариантности траектории. Чтобы добиться этого свойства появились альтернативные подходы к задаче синтеза законов управления траекторным движением. Этот подход основан на стабилизации геометрических многообразий в пространстве выходов объекта управления. Такой подход формулирует задачу траекторного управления как задачу стабилизации аттрактора в пространстве выходов, описываемого уравнением заданной кривой (см. рисунок 1). Именно поэтому такие методы работают с представлением траектории движения в виде неявных кривых [24, 29, 39, 62, 65, 67], задающих уравнение связи выходов.

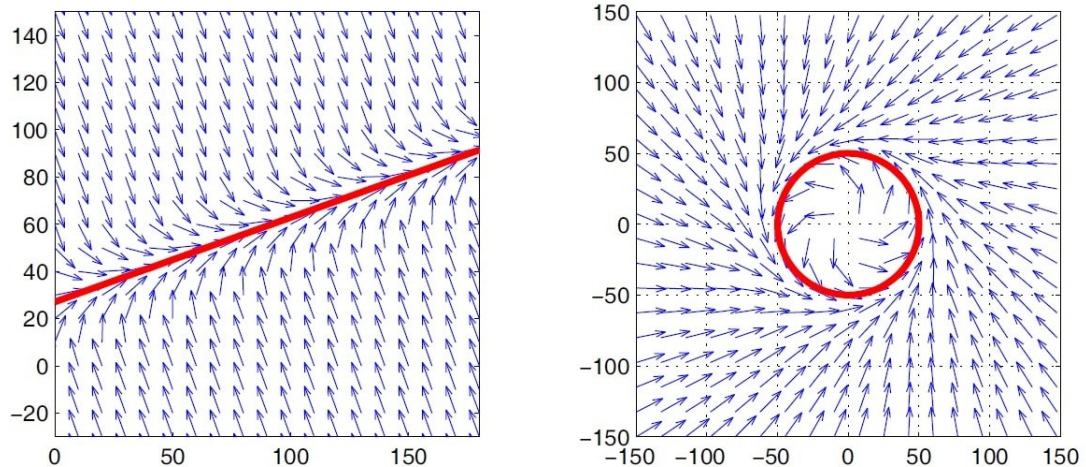


Рисунок 1 — Желаемая траектория как аттрактор.

Первоначально такая постановка задачи была сделана в работе [23], где она использовалась для стабилизации колебаний. Данный подход нашел развитие в работах таких отечественных авторов, как А. А. Колесников [10], предложивший концепцию синергетического анализа и синтеза объектов управления, и И. В. Мирошник [1, 11, 12, 35, 50, 51, 52, 53], разработавшего методологию на основе дифференциально-геометрического подхода и метода преобразования моделей к задачно ориентированным координатам, которая

получила развитие в работах [4, 5, 6, 7, 8, 43, 44]. Именно данный подход был взят за основу тех результатов, которые получены в этой работе [2, 14, 15, 16, 17, 22, 36, 37, 28]. Из последних актуальных зарубежных работ можно выделить работы канадских ученых [19, 20, 38, 49, 56] в области построения траекторных регуляторов на основе трансверсальной линеаризации. При определенных условиях, данный подход дает такие же результаты, как и метод задачно ориентированных координат. Он базируется на преобразовании исходной динамики объекта управления на трансверсальную и тангенциальную компоненты и дальнейшем независимым управлением каждой частью. Еще одним развивающимся направлением является стабилизация множеств на основе пассивации [30, 31, 32, 40, 42, 61], а также на основе методов векторного поля [47, 66].

Второй задачей, рассматриваемой в работе является задача траекторного управления при наличии в рабочей области робота статических либо подвижных препятствий [13], являющаяся естественным расширением обыкновенной задачи траекторного управления. Данная задача в случае подвижного препятствия отличается тем, что траектория задается в подвижном базисе связанном с целью, которую необходимо отслеживать. Подобным образом можно формализовать различные актуальные задачи, стоящие перед учеными и инженерами. К примеру, задача объезда нестационарных препятствий, задача сопровождения летательным аппаратом наземного объекта, разнообразные задачи управления многоагентными системами при рассмотрении относительной динамики и т.п. Вообще говоря, задача управление относительно внешних подвижных объектов в последнее время становится все более актуальной, так как современное развитие мобильной робототехники и разнообразных датчиков позволяют конструировать реальные системы такого типа и на них появляется спрос в промышленности. Как правило, для решения таких задач также используются, в основном, методы синтеза регуляторов, как следящей системы [41, 57, 58, 60], но также находят свое место методы

основанные на стабилизации многообразий [4, 5, 13, 59].

## 1.2 Анализ математических моделей колесных мобильных роботов

Данный раздел посвящен анализу математических моделей колесных мобильных роботов [21, 26]. Колесный мобильный робот является колесным транспортным средством, которое способно к автономному движению (без внешнего водителя), потому что оно оборудовано приводами, которые приводятся в действие бортовым компьютером.

Цель этого раздела — дать общее и унифицированное описание проблем моделирования колесных мобильных роботов. В литературе имеются некоторые примеры вывода кинематических и / или динамических моделей мобильных роботов для некоторых конкретных прототипов. Здесь принимается более общая точка зрения и рассматривается общий класс колесных мобильных роботов с произвольным числом колес разных типов и конструкций приводов. Цель состоит в том, чтобы указать структурные свойства кинематической и динамической моделей с учетом ограничений подвижности мобильных роботов. Введя понятия степени мобильности и степени управляемости, будет показано, что, несмотря на множество возможных конструкций роботов и конфигураций колес, все множество колесных мобильных роботов можно разделить на пять классов.

### Описание робота

Без существенной потери общности и с целью максимального упрощения математических выкладок будем предполагать, что изучаемые мобильные роботы состоят из жесткой тележки, снабженной недеформируемыми колесами и движущейся в горизонтальной плоскости. Положение робота в плоскости описывается следующим образом (рис 2). Произвольная инерциальная

опорная система координат  $b$  фиксируется в плоскости движения, а система координат  $m$  прикрепляется к мобильному роботу. Положение робота может

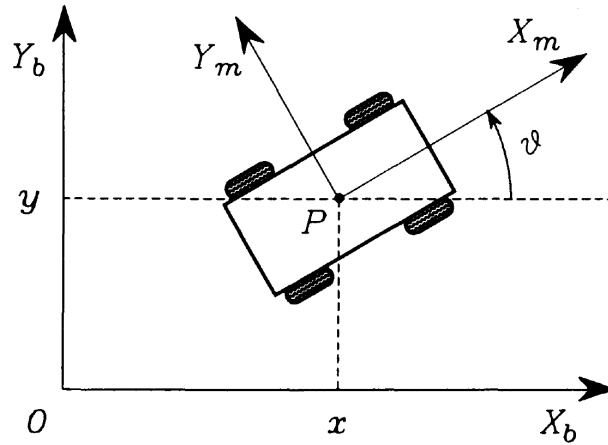


Рисунок 2 — Координаты положения.

быть описано в терминах двух координат  $x, y$  начала  $P$  подвижной системы координат и угла ориентации  $\vartheta$  подвижной системы координат относительно опорной системы координат с началом в точке  $O$ . Отсюда, положение робота задается при помощи  $(3 \times 1)$  вектора

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \vartheta \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

и поворотной матрицы, характеризующей ориентацию опорной системы координат относительно подвижной системы координат вида

$$R(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Предположим, что во время движения плоскость каждого колеса остается вертикальной, а колесо вращается вокруг своей (горизонтальной) оси, ориентация которой по отношению к тележке может быть фиксированной или переменной. Будем различать два основных класса идеализированных колес,

а именно обычные колеса и шведские колеса. В каждом случае предполагается, что контакт между колесом и землей сводится к одной точке плоскости.

Для обычного колеса контакт между колесом и землей должен удовлетворять как условиям чистой прокатки, так и нескользким движением. Это означает, что скорость точки контакта равна нулю и что две компоненты, параллельные плоскости колеса и ортогональные этой плоскости, равны нулю.

Для шведского колеса только одна составляющая скорости точки контакта колеса с землей должна быть равна нулю вдоль движения. Направление этой нулевой компоненты скорости априорно произвольно, но фиксировано относительно ориентации колеса.

Теперь получим в явном виде выражения ограничений для различных типов колес.

### Фиксированные колеса

Центр зафиксированного колеса  $A$  является фиксированной точкой на тележке (рисунок 3). Положение точки  $A$  в подвижной системе координат характеризуется при помощи полярных координат, т.е. расстояния  $l$  от точки  $A$  до точки  $P$  и угла  $\alpha$ . Ориентация плоскости колеса относительно  $l$  описывается постоянным углом  $\beta$ . Угол поворота колеса вокруг своей (горизонтальной) оси обозначен как  $\varphi$ , а радиус колеса обозначен как  $r$ . Положение

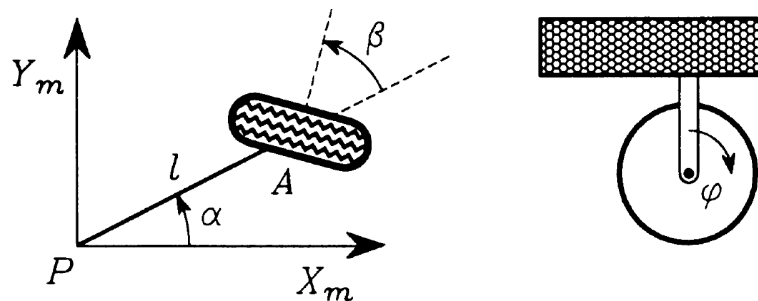


Рисунок 3 — Зафиксированное или рулевое колесо.

колеса, таким образом, характеризуется четырьмя константами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $l$ ,  $r$ , а его движение — переменным углом  $\varphi(t)$ . При таком описании компоненты



скорости точки контакта колеса легко рассчитывается и могут быть выведены следующие два ограничения:

- в плоскости колеса

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & l \cos \beta \end{bmatrix} R(\vartheta)\dot{\xi} + r\dot{\varphi} = 0; \quad (1.3)$$

- в плоскости, ортогональной плоскости колеса

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & l \sin \beta \end{bmatrix} R(\vartheta)\dot{\xi} = 0. \quad (1.4)$$

## Рулевые колеса

Рулевое колесо таково, что движение плоскости колеса относительно тележки — это поворот вокруг вертикальной оси, проходящей через центр колеса (рисунок 3). Описание такое же, как и для неподвижного колеса, за исключением того, что теперь угол  $\beta$  не является постоянным, а изменяется с течением времени. Положение колеса характеризуется тремя константами:  $l$ ,  $\alpha$ ,  $r$ , а его движение относительно тележки — двумя переменными углами  $\beta(t)$  и  $\varphi(t)$ . Ограничения имеют тот же вид, что и выше, т.е.

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & l \cos \beta \end{bmatrix} R(\vartheta)\dot{\xi} + r\dot{\varphi} = 0, \quad (1.5)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & l \sin \beta \end{bmatrix} R(\vartheta)\dot{\xi} = 0. \quad (1.6)$$

## Направляющие колеса

Направляющее колесо — это колесо, которое может менять ориентацию относительно тележки, но вращение плоскости колеса происходит вокруг вертикальной оси, которая не проходит через центр колеса (рисунок 4). В этом случае описание конфигурации колеса требует больше параметров. Центр колеса обозначен  $B$  и соединен с тележкой твердым стержнем от точки  $A$  к точке  $B$  постоянной длины  $d$ , который может вращаться вокруг фиксированной

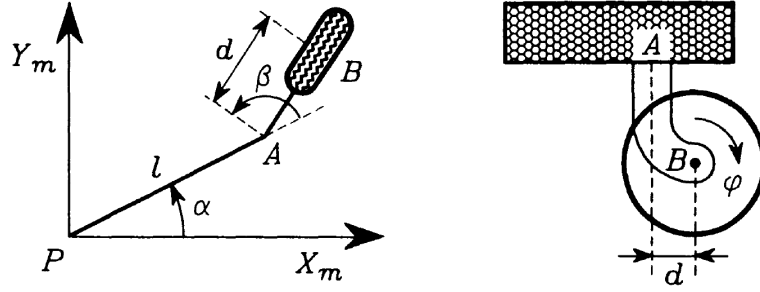


Рисунок 4 — Направляющее колесо.

вертикальной оси, проходящей через точку  $A$ . Сама точка  $A$  зафиксирована на тележке, ее положение характеризуется двумя полярными координатами  $l$  и  $\alpha$ . Вращение стержня по отношению к тележке представлено углом  $\beta$  и плоскость колеса выровнена с  $d$ .

Положение колеса описывается четырьмя константами  $\alpha$ ,  $l$ ,  $r$ ,  $d$ , а его движение — двумя переменными углами  $\beta(t)$  и  $\varphi(t)$ . При таких обозначениях ограничения имеют следующий вид:

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & l \cos \beta \end{bmatrix} R(\vartheta)\dot{\xi} + r\dot{\varphi} = 0, \quad (1.7)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & d + l \sin \beta \end{bmatrix} R(\vartheta)\dot{\xi} + d\dot{\beta} = 0. \quad (1.8)$$

### Шведские колеса

Положение шведского колеса относительно тележки описывается, как и в случае фиксированного колеса, тремя постоянными параметрами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $l$ . Дополнительный параметр, необходимый чтобы охарактеризовать направление нулевого компонента скорости точки контакта относительно плоскости колеса, представлен углом  $\gamma$  (рисунок 5). Выражение для ограничений на движение имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \beta + \gamma) & \cos(\alpha + \beta + \gamma) & l \cos(\beta + \gamma) \end{bmatrix} R(\vartheta)\dot{\xi} + r \cos \gamma \dot{\varphi} = 0. \quad (1.9)$$

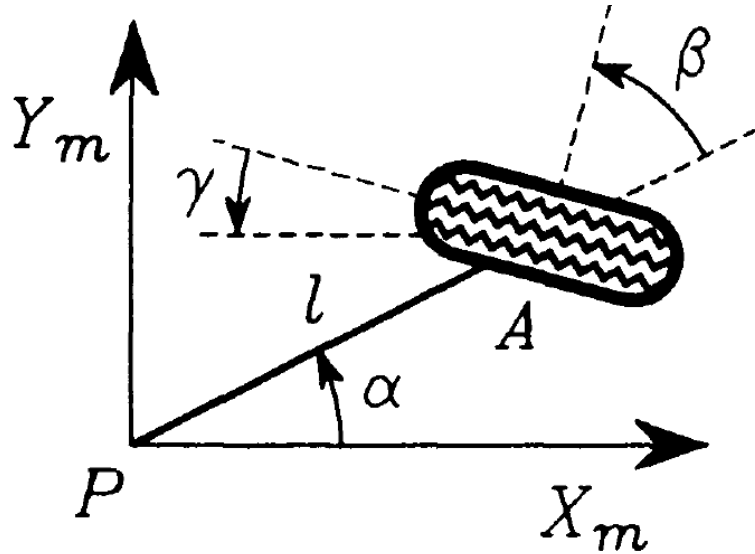


Рисунок 5 — Шведское колесо.

### Ограничения на мобильность робота

Рассмотрим теперь обобщенного мобильного робота, оснащенного  $N$  колесами четырех описанных выше классов. Будем использовать следующие 4 индекса для определения количественных соотношений этих 4 классов:  $f$  для фиксированных колес,  $s$  для рулевых колес,  $c$  для направляющих колес и  $sw$  для шведских колес. Количество колес каждого типа обозначим  $N_f$ ,  $N_s$ ,  $N_c$ ,  $N_{sw}$ , тогда общее число колес  $N = N_f + N_s + N_c + N_{sw}$ .

Конфигурация робота полностью описывается следующими векторами координат:

- координаты положения  $\xi(t) = [x(t) \ y(t) \ \vartheta(t)]^T$ , характеризующие положение на плоскости;
- ориентационные координаты  $\beta(t) = [\beta_s^T(t) \ \beta_c^T(t)]^T$ , характеризующие ориентацию рулевых и направляющих колес соответственно;
- вращательные координаты  $\varphi(t) = [\varphi_f(t) \ \varphi_s(t) \ \varphi_c(t) \ \varphi_{sw}(t)]^T$ , характеризующие вращение колес вокруг своих горизонтальных осей.

Полный набор координат положения, ориентационных и вращательных координат  $\xi$ ,  $\beta_s$ ,  $\beta_c$ ,  $\varphi$  в дальнейшем будем называть конфигурационными координатами. Очевидно, что общее число конфигурационных координат равно  $N_f + 2N_s + 2N_c + N_{sw} + 3$ .

При данных обозначениях ограничения могут быть записаны в общем матричном виде

$$J_1(\beta_s, \beta_c)R(\vartheta)\dot{\xi} + J_2\dot{\varphi} = 0, \quad (1.10)$$

$$C_1(\beta_s, \beta_c)R(\vartheta)\dot{\xi} + C_2\dot{\beta}_c = 0. \quad (1.11)$$

В выражении (1.10) матрица  $J_1(\beta_s, \beta_c)$  имеет вид

$$J_1(\beta_s, \beta_c) = \begin{bmatrix} J_{1f} \\ J_{1s}(\beta_s) \\ J_{1c}(\beta_c) \\ J_{1sw} \end{bmatrix},$$

где  $J_{1f}$ ,  $J_{1s}$ ,  $J_{1c}$  и  $J_{1sw}$  — матрицы размерности  $(N_f \times 3)$ ,  $(N_s \times 3)$ ,  $(N_c \times 3)$  и  $(N_{sw} \times 3)$  соответственно, форма которых выводится напрямую из ограничений (1.3), (1.5), (1.7) и (1.9) соответственно. В частности,  $J_{1f}$  и  $J_{1sw}$  — константы, в то время как  $J_{1s}$  и  $J_{1c}$  зависят от времени через  $\beta_s(t)$  и  $\beta_c(t)$  соответственно. Далее,  $J_2$  — постоянная матрица размерности  $(N \times N)$ , диагональными элементами которой являются радиусы колес, за исключением радиусов шведских колес, которые домножаются на  $\cos \gamma$ .

В выражении (1.11) матрицы  $C_1(\beta_s, \beta_c)$  и  $C_2$  имеют вид

$$C_1(\beta_s, \beta_c) = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1s}(\beta_s) \\ C_{1c}(\beta_c) \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{2c} \end{bmatrix},$$

где  $C_{1f}$ ,  $C_{1s}$  и  $C_{1c}$  — матрицы размерности  $(N_f \times 3)$ ,  $(N_s \times 3)$  и  $(N_c \times 3)$  соответственно, форма которых выводится напрямую из ограничений (1.4), (1.6 и (1.8) соответственно. В частности,  $C_{1f}$  — константа, в то время как  $C_{1s}$

и  $C_{1c}$  зависят от времени. Далее,  $C_{2c}$  — диагональная матрица, диагональные элементы которой равны  $d \sin \gamma$  для  $N_c$  направляющих колес.

Введем следующее допущение о конфигурации шведских колес. Для каждого шведского колеса выполняется  $\gamma \neq \pi/2$ . Значение  $\gamma = \pi/2$  соответствует направлению нулевого компонента скорости, перпендикулярному к плоскости колеса. На такое колесо накладываются ограничения, аналогичные нескользящему ограничению для обычных колес, следовательно, теряется преимущество при применении шведских колес.

Рассмотрим теперь первые  $(N_f + N_s)$  нескользящих ограничений из (1.11) в явном виде:

$$C_{1f}R(\vartheta)\dot{\xi} = 0, \quad (1.12)$$

$$C_{1s}(\beta_s)R(\vartheta)\dot{\xi} = 0. \quad (1.13)$$

Эти ограничения требуют, чтобы вектор  $R(\vartheta)\dot{\xi} \in \mathcal{N}(C_1^*(\beta_s))$ , где

$$C_1^*(\beta_s) = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1s}(\beta_s) \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Очевидно, что  $\text{rank}(C_1^*(\beta_s)) \leq 3$ . Если  $\text{rank}(C_1^*(\beta_s)) = 3$ , то  $R(\vartheta)\dot{\xi} = 0$  и любое движение на плоскости невозможно. Обобщая, ограничения на мобильность робота связаны с рангом матрицы  $C_1^*$ . Этот вопрос будет подробно рассмотрен ниже.

Но прежде стоит заметить, что условия (1.12) и (1.13) имеют интересную геометрическую интерпретацию. В каждый момент времени движение робота можно рассматривать как мгновенное вращение вокруг мгновенного центра вращения (МЦВ), положение которого относительно тележки может изменяться во времени. Следовательно, в каждый момент времени вектор скорости любой точки тележки ортогонален прямой линии, соединяющей эту точку и МЦВ. В частности, это относится к центрам фиксированных и рулевых колес. Это означает, что в каждый момент времени горизонтальные оси вращения всех неподвижных и рулевых колес пересекаются в МЦВ. Этот факт

иллюстрируется на рисунок 7.5 и эквивалентен условию  $\text{rank}(C_1^*(\beta_s)) \leq 2$ . Очевидно, что ранг матрицы  $C_1^*(\beta_s)$  зависит от конструкции мобильного ро-

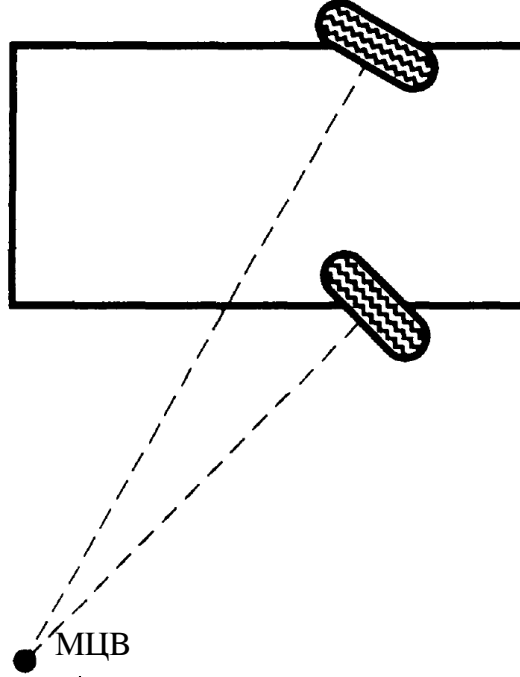


Рисунок 6 — Мгновенный центр вращения.

бота. Определим степень мобильности  $\delta_m$  мобильного робота как

$$\delta_m = \dim(\mathcal{N}(C_1^*(\beta_s))) = 3 - \text{rank}(C_1^*(\beta_s)).$$

Изучим случай, когда  $\text{rank}(C_{1f}) = 2$ , что предполагает, что робот оснащен как минимум 2 фиксированными колесами и, если их больше 2, то их оси пересекаются в МЦВ, положение которого относительно тележки фиксировано. В таком случае ясно, что единственное возможное движение — это вращение робота вокруг фиксированного МЦВ. Очевидно, что такое ограничение на практике неприемлемо, а значит, предположим, что  $\text{rank}(C_{1f}) \leq 1$ . Более того, предположим, что структура робота невырождена в следующем смысле. Мобильный робот является невырожденным, если

$$\text{rank}(C_{1f}) \leq 1 \quad \text{rank}(C_1^*(\beta_s)) = \text{rank}(C_{1f}) + \text{rank}(C_{1s}(\beta_s)) \leq 2.$$

Это предположение эквивалентно следующим условиям.

- Если робот оснащен более чем одним фиксированным колесом ( $N_f > 1$ ), тогда все они расположены на одной общей оси.
- Центры рулевых колес не лежат на общей оси фиксированных колес.
- Число  $\text{rank}(C_1^*(\beta_s)) \leq 2$  — это число рулевых колес, которые могут быть ориентированы независимо с целью направить робота. Назовем это число степенью управляемости

$$\delta_s = \text{rank}(C_1^*(\beta_s)).$$

Число рулевых колес  $N_s$  и их тип, очевидно, определяются разработчиком робота. Если мобильный робот оснащен более чем  $\delta_s$  рулевыми колесами ( $N_s > \delta_s$ ), движение дополнительных колес должно быть скоординировано, чтобы гарантировать наличие МЦВ в каждый момент времени.

Следовательно, только пять неособых структур представляют практический интерес, что вытекает из следующих условий.

- Степень мобильности  $\delta_m$  удовлетворяет неравенству

$$1 \leq \delta_m \leq 3. \quad (1.15)$$

Верхняя граница очевидна, в то время как нижняя граница означает, что рассматриваются только случаи, когда движение возможно, т.е.  $\delta_m \neq 0$ .

- Степень управляемости  $\delta_s$  удовлетворяет неравенству

$$0 \leq \delta_s \leq 2. \quad (1.16)$$

Верхняя граница может быть достигнута только для роботов, не имеющих фиксированных колес ( $N_f = 0$ ), в то время как нижняя граница соответствует роботам без рулевых колес ( $N_s = 0$ ).

Таблица 1 — Степени мобильности и управляемости для реализуемых колесных мобильных роботов.

$\delta_m$	3	2	2	1	1
$\delta_s$	0	0	1	1	2

- Выполняется следующее неравенство:

$$2 \leq \delta_m + \delta_s \leq 3. \quad (1.17)$$

Случай  $\delta_m + \delta_s = 1$  неприемлем, так как соответствует вращению робота вокруг фиксированного МЦВ, как было показано выше. Случаи  $\delta_m \geq 2$  и  $\delta_s = 2$  исключены, потому что, в соответствии с предположением, введенным выше,  $\delta_s = 2$  предполагает  $\delta_m = 1$ .

Таким образом, существует только пять типов колесных мобильных роботов, соответствующих пяти первым значениям  $\delta_m$  и  $\delta_s$ , которые удовлетворяют неравенствам (1.15), (1.16) и (1.17), в соответствии с таблицей 1.

В дальнейшем каждый тип структуры будет обозначаться с использованием наименования вида «робот типа  $\delta_m, \delta_s$ ». Ниже кратко представлены основные конструктивные характеристики для каждого типа мобильного робота.

**Робот типа (3,0).** В этом случае

$$\delta_m = \dim(\mathcal{N}(C_1^*(\beta_s))) = 3 \quad \delta_s = 0.$$

Мобильные роботы данного типа не имеют фиксированных ( $N_f = 0$ ) и рулевых колес ( $N_s = 0$ ). Они оснащены только направляющими и/или шведскими колесами. Такие роботы называются омнидирекционными, потому что они обладают полной мобильностью на плоскости, что означает, что они могут двигаться в каждый момент времени в любом направлении без переори-



ентации. Напротив, остальные четыре типа роботов обладают ограниченной мобильностью (степень мобильности меньше, чем 3).

**Робот типа (2,0).** В этом случае

$$\delta_m = \dim(\mathcal{N}(C_1^*(\beta_s))) = \dim(\mathcal{N}(C_{1f})) = 2 \quad \delta_s = 0.$$

Мобильные роботы данного типа не имеют рулевых колес ( $N_s = 0$ ). Они оснащены одним или несколькими фиксированными колесами, расположенными на одной общей оси, иначе  $\text{rank}(C_{1f})$  будет больше 1. Мобильность робота ограничена в том смысле, что для любой допустимой траектории  $\xi(t)$  скорость  $\dot{\xi}(t)$  ограничена принадлежностью к двумерному распределению, натянутому на векторные поля  $R^T(\vartheta)s_1$  и  $R^T(\vartheta)s_2$ , где  $s_1$  и  $s_2$  — два постоянных вектора, охватывающих  $\mathcal{N}(C_{1f})$ .

**Робот типа (2,1).** В этом случае

$$\delta_m = \dim(C_1^*(\beta_s)) = \dim(\mathcal{N}(C_{1s}(\beta_s))) = 2 \quad \delta_s = 1.$$

Такие роботы не имеют фиксированных колес ( $N_f = 0$ ) и оснащены как минимум одним рулевым колесом ( $N_s \geq 1$ ). Если имеется более одного рулевого колеса, их ориентация должна быть скоординирована так, чтобы  $\text{rank}(C_{1s}^*(\beta_s)) = \delta_s = 1$ . Скорость  $\dot{\xi}(t)$  ограничена принадлежностью к двумерному распределению, натянутому на векторные поля  $R^T(\vartheta)s_1(\beta_s)$  и  $R^T(\vartheta)s_2(\beta_s)$ , где  $s_1(\beta_s)$  и  $s_2(\beta_s)$  — два вектора, охватывающих  $\mathcal{N}(C_{1f})$  и параметризованных углом  $\beta_s$  одного произвольно выбранного рулевого колеса.

**Робот типа (1,1).** В этом случае

$$\delta_m = \dim(\mathcal{N}(C_1^*(\beta_s))) = 1 \quad \delta_s = 1.$$

Такие роботы оснащены одним или несколькими фиксированными колесами, расположенными на одной общей оси, а также одним или несколькими рулевыми колесами с условием, что центр одного из них не лежит на оси фиксированных колес — иначе, согласно допущению, введенному выше, структура станет особой — и что их ориентация скоординирована так,

чтобы  $\text{rank}(C_{1s}^*(\beta_s)) = \delta_s = 1$ . Скорость  $\dot{\xi}(t)$  ограничена принадлежностью к одномерному распределению, параметризованному углом ориентации одного произвольно выбранного рулевого колеса. Мобильные роботы, сконструированные на основе модели обычного автомобиля (часто называемые автомобилеподобными роботами) относятся к данному классу.

**Робот типа (1,2).** В этом случае

$$\delta_m = \dim(\mathcal{N}(C_{1s}^*(\beta_s))) = \dim \mathcal{N}(C_{1s}(\beta_s)) = 1 \quad \delta_s = 2.$$

Такие роботы не имеют фиксированных колес ( $N_f = 0$ ) и оснащены как минимум двумя рулевыми колесами ( $N_s \geq 2$ ). Если имеется более двух рулевых колес, их ориентация должна быть скоординирована так, чтобы  $\text{rank}(C_{1s}^*(\beta_s)) = \delta_s = 2$ . Скорость  $\dot{\xi}(t)$  ограничена принадлежностью к одномерному распределению, параметризованному углами ориентации двух произвольно выбранных рулевых колес.

Чтобы избежать бесполезных нотационных осложнений, с этого момента будем предполагать, что степень управляемости точно равна числу рулевых колес, т.е.

$$\delta_s = N_s.$$

Это, безусловно, большое ограничение с точки зрения проектирования робота. Однако для математического анализа поведения мобильных роботов в этом предположении нет потери общности, зато это значительно упрощает технический вывод. Действительно, для роботов, имеющих избыток рулевых колес ( $\delta_s < N_s$ ), всегда можно с помощью соответствующих (но, возможно, утомительных) манипуляций свести ограничения (1.13) до минимального подмножества  $\delta_s$  независимых ограничений, соответствующих  $\delta_s$  колесам, которые были выбраны в качестве главных рулевых колес робота и игнорировать другие рулевые колеса при анализе.

## Трехколесные роботы

В этом разделе представлены шесть практических примеров мобильных роботов, иллюстрирующие пять типов компоновки, представленных выше. Сосредоточим свое внимание на мобильных роботах с тремя колесами.

Как было показано в разделе 1.2, колеса мобильного робота описываются, по крайней мере, шестью характеристическими константами, а именно тремя углами  $\alpha, \beta, \gamma$  и тремя длинами  $l, r, d$ . Для каждого примера последовательно приведем таблицу с численными значениями этих характеристических констант и представления различных матриц  $J$  и  $C$ , входящих в математические выражения ограничений (1.10) и (1.11). Однако, предположим, что радиусы  $r$  и расстояния  $d$  одинаковы для всех колес во всех примерах. Следовательно, будем определять только параметры  $\alpha, \beta, \gamma, l$ .

**Робот типа (3, 0) со шведскими колесами.** Робот оснащен тремя шведскими колесами, расположенными на вершинах треугольной тележки (см. рисунок 7). Характеристические константы представлены в таблице 2.

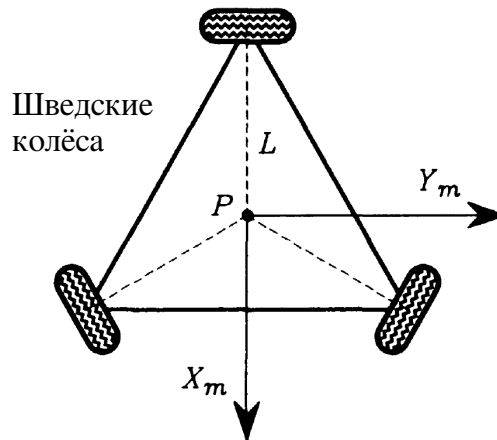


Рисунок 7 — Мобильный робот типа (3,0) со шведскими колесами.

Ограничения имеют вид (1.10), где

$$J_1 = J_{1sw} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 & L \\ 0 & -1 & L \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & L \end{pmatrix},$$

Таблица 2 — Характеристические константы мобильного робота типа (3,0) со шведскими колесами.

Колеса	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$l$
$1_{sw}$	$\pi/3$	0	0	$L$
$2_{sw}$	$\pi$	0	0	$L$
$3_{sw}$	$5\pi/3$	0	0	$L$

$$J_2 = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}.$$

**Робот типа (3, 0) с направляющими колесами.** Робот оснащен тремя направляющими колесами (см. рисунок 8). Характеристические константы

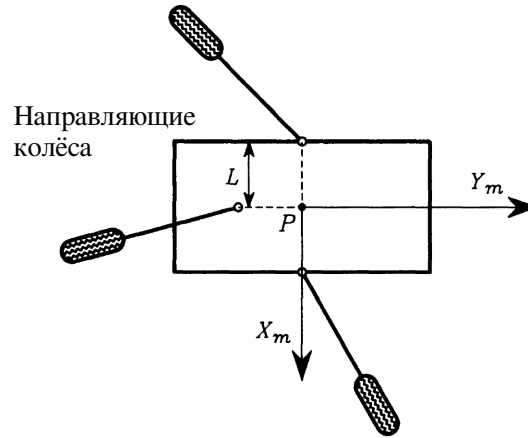


Рисунок 8 — Мобильный робот типа (3,0) со направляющими колесами.

представлены в таблице 3. Ограничения имеют вид (1.10) и (1.11), где

$$J_1 = J_c(\beta_c) = \begin{pmatrix} -\sin \beta_{c1} & \cos \beta_{c1} & L \cos \beta_{c1} \\ \sin \beta_{c2} & -\cos \beta_{c2} & L \cos \beta_{c2} \\ \cos \beta_{c3} & \sin \beta_{c3} & L \cos \beta_{c3} \end{pmatrix},$$

Таблица 3 — Характеристические константы мобильного робота типа (3,0) с направляющими колесами.

Колеса	$\alpha$	$\beta$	$l$
$1_c$	0	—	$L$
$2_c$	$\pi$	—	$L$
$3_c$	$3\pi/2$	—	$L$

$$J_2 = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix},$$

$$C_1 = C_{1c}(\beta_c) = \begin{pmatrix} \cos \beta_{c1} & \sin \beta_{c1} & d + L \sin \beta_{c1} \\ -\cos \beta_{c2} & -\sin \beta_{c2} & d + L \sin \beta_{c2} \\ \sin \beta_{c3} & -\cos \beta_{c3} & d + L \sin \beta_{c3} \end{pmatrix},$$

$$C_2 = C_{2c} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

**Робот типа (2, 0).** Робот оснащен двумя фиксированными колесами, расположенными на одной оси, и одним направляющим колесом (см. рисунок 9), и его обычно называют одноколесным роботом. Характеристические константы представлены в таблице 4. Ограничения имеют вид (1.10) и (1.11), где

$$J_1 = \begin{pmatrix} J_{1f} \\ J_{1c}(\beta_{c3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & L \\ 0 & -1 & L \\ \cos \beta_{c3} & \sin \beta_{c3} & L \cos \beta_{c3} \end{pmatrix},$$

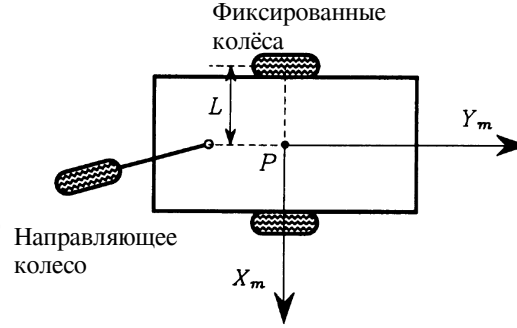


Рисунок 9 — Мобильный робот типа (2,0).

Таблица 4 — Характеристические константы мобильного робота типа (2,0).

Колеса	$\alpha$	$\beta$	$l$
$1_f$	0	0	$L$
$2_f$	$\pi$	0	$L$
$3_c$	$3\pi/2$	—	$L$

$$J_2 = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{1f} \\ C_{1c}(\beta c3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \sin \beta c3 & -\cos \beta c3 & d + L \sin \beta c3 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ C_{2c}(\beta c3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}.$$

**Робот типа (2, 1).** Робот оснащен одним рулевым и двумя направляющими колесами (см. рисунок 10). Характеристические константы представлены в таблице 5.

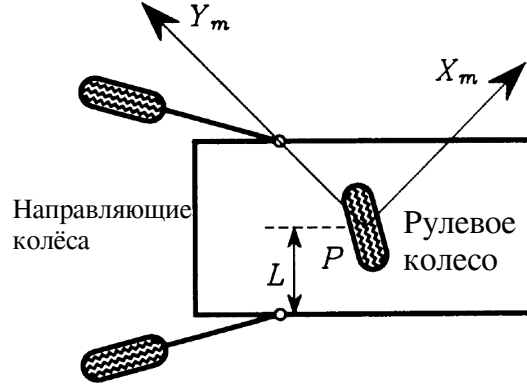


Рисунок 10 — Мобильный робот типа (2,1).

Таблица 5 — Характеристические константы мобильного робота типа (2,1).

Колеса	$\alpha$	$\beta$	$l$
$1_s$	0	—	0
$2_c$	$\pi/2$	—	$L\sqrt{2}$
$3_c$	$\pi$	—	$L\sqrt{2}$

Ограничения имеют вид (1.10) и (1.11), где

$$J_1 = \begin{pmatrix} J_{1s}(\beta_{s1}) \\ J_{1c}(\beta_{c2}, \beta_{c3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \beta_{s1} & \cos \beta_{s1} & 0 \\ -\cos \beta_{c2} & -\sin \beta_{c2} & \sqrt{2}L \cos \beta_{c2} \\ \sin \beta_{c3} & \cos \beta_{c3} & \sqrt{2}L \cos \beta_{c3} \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{1s}(\beta_{s1}) \\ C_{1c}(\beta_{c2}, \beta_{c3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_{s1} & \sin \beta_{s1} & 0 \\ -\sin \beta_{c2} & \cos \beta_{c2} & d + \sqrt{2}L \sin \beta_{c2} \\ -\cos \beta_{c3} & -\sin \beta_{c3} & d + \sqrt{2}L \sin \beta_{c3} \end{pmatrix},$$

Таблица 6 — Характеристические константы мобильного робота типа (1,1).

Колеса	$\alpha$	$\beta$	$l$
$1_f$	0	0	$L$
$2_f$	$\pi$	0	$L$
$3_s$	$3\pi/2$	—	$L$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ C_{2c}(\beta s3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

**Робот типа (1, 1).** Робот оснащен двумя фиксированными колесами, расположенными на одной оси, и одним рулевым колесом (см. рисунок 11). Характеристические константы представлены в таблице 6.

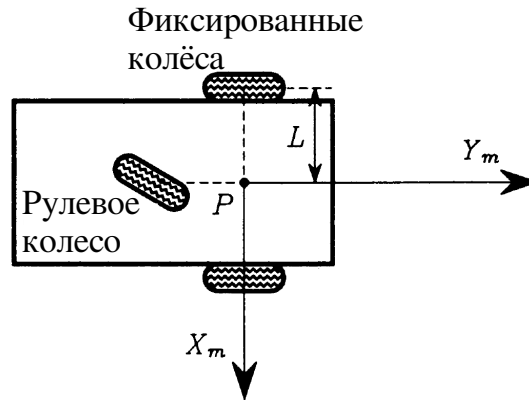


Рисунок 11 — Мобильный робот типа (1,1).

Ограничения имеют вид (1.10) и (1.11), где

$$J_1 = \begin{pmatrix} J_{1f} \\ J_{1s}(\beta s3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & L \\ 0 & -1 & L \\ \cos \beta_{s3} & \sin \beta_{s3} & L \cos \beta_{s3} \end{pmatrix},$$



Таблица 7 — Характеристические константы мобильного робота типа (1,2).

Колеса	$\alpha$	$\beta$	$l$
$1_s$	0	—	$L$
$2_s$	$\pi$	—	$L$
$3_c$	$3\pi/2$	—	$L$

$$J_2 = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{1f} \\ C_{1s}(\beta_{s3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \sin \beta_{s3} & -\cos \beta_{s3} & L \sin \beta_{s3} \end{pmatrix},$$

$$C_2 = 0.$$

**Робот типа (1, 2).** Робот оснащен двумя двумя рулевыми и одним направляющим колесами (см. рисунок 12). Характеристические константы пред-

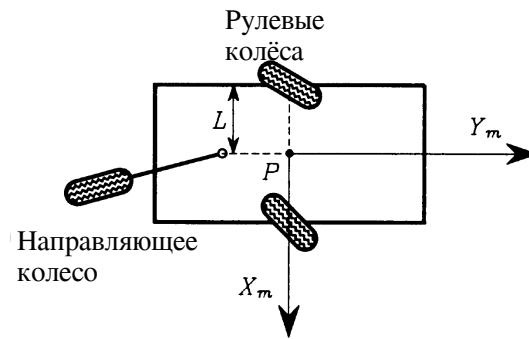


Рисунок 12 — Мобильный робот типа (1,2).

ставлены в таблице 7.

Ограничения имеют вид (1.10) и (1.11), где

$$J_1 = \begin{pmatrix} J_{1s}(\beta_{s1}, \beta_{s2}) \\ J_{1c}(\beta_{c3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \beta_{s1} & \cos \beta_{s1} & L \cos \beta_{s1} \\ \sin \beta_{s1} & -\cos \beta_{s2} & L \cos \beta_{s2} \\ \cos \beta_{c3} & \sin \beta_{c3} & L \cos \beta_{c3} \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{1s}(\beta_{s1}, \beta_{s2}) \\ C_{1c}(\beta_{c3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_{s1} & \sin \beta_{s1} & L \sin \beta_{s1} \\ -\cos \beta_{s2} & -\sin \beta_{s2} & L \sin \beta_{s2} \\ \sin \beta_{c3} & -\cos \beta_{c3} & d + L \sin \beta_{c3} \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ C_{2c}(\beta_{c3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}.$$

### Кинематическая модель положения

В данном разделе анализ мобильности, как описано в разделе 1.2, переформулируется в терминах пространства состояний, что будет полезно для дальнейших рассуждений.

Выше было показано, что, вне зависимости от типа мобильного робота, скорость  $\dot{\xi}(t)$  ограничена принадлежностью к распределению  $\Delta_c$ , определяемому как

$$\dot{\xi}(t) \in \Delta_c = \text{span}\{\text{col}(R^T(\vartheta)\Sigma(\beta_s))\} \forall t,$$

где столбцы матрицы  $\Sigma(\beta_s)$  формируют базис  $\mathcal{N}(C_1^*(\beta_s))$ , т.е.

$$\mathcal{N}(C_1^*(\beta_s)) = \text{span}\{\text{col}(R^T(\vartheta)\Sigma(\beta_s))\}.$$

Это эквивалентно следующей формулировке: для любых  $t$  существует переменный вектор  $\eta(t)$  такой, что

$$\dot{\xi} = R^T(\vartheta)\Sigma(\beta_s)\eta. \quad (1.18)$$

Размерность распределения  $\Delta_c$  и, следовательно, вектора  $\eta(t)$  — это степень мобильности  $\delta_m$  мобильного робота. Очевидно, что в случае, когда робот не имеет рулевых колес ( $\delta_s = 0$ ), матрица  $\Sigma$  является постоянной и выражение (1.18) сводится к

$$\dot{\xi} = R^T(\vartheta)\Sigma\eta. \quad (1.19)$$

В противном случае ( $\delta_s \geq 1$ ), матрица  $\Sigma$  явно зависит от ориентационных координат  $\beta_s$  и выражение (1.18) может быть дополнено следующим образом:

$$\dot{\xi} = R^T(\vartheta)\Sigma(\beta_s)\eta, \quad (1.20)$$

$$\dot{\beta}_s = \zeta. \quad (1.21)$$

Представление (1.19) (или (1.20) и (1.21)) можно рассматривать как представление пространства состояний системы, называемое кинематической моделью положения, с координатами положения  $\xi$  и (возможно) координатами ориентации  $\beta_s$  в качестве переменных состояния, в то время как  $\eta$  и  $\zeta$  — которые соответствуют скоростям — могут быть интерпретированы как управляющие входы, входящие в модель линейно. Тем не менее, эта интерпретация должна приниматься с некоторой осторожностью, поскольку истинными физическими управляющими входами мобильного робота являются крутящие моменты, обеспечиваемые приводами, а кинематическая модель пространства состояний на самом деле является только подсистемой общей динамической модели, которая будет рассмотрена ниже.

## Общие модели колесных мобильных роботов

В разделе 1.2 была введена классификация всех невырожденных колесных мобильных роботов в соответствии со значениями степени мобильности

$\delta_m$  и степенью управляемости  $\delta_s$ . Легко определить, к какому классу принадлежит конкретный мобильный робот, просто проверяя количество и конфигурацию фиксированных и рулевых колес. Различные примеры были приведены выше. В этом разделе подчеркнем, что для любого конкретного колесного мобильного робота, независимо от его конструктивных особенностей, всегда можно выбрать начало и ориентацию подвижной системы координат (см. рисунок 2), так что кинематическая модель положения робота принимает общую форму, которая уникальна для каждого класса и полностью определяется двумя характеристическими числами  $\delta_m$  и  $\delta_s$ . Другими словами, все роботы определенного типа могут быть описаны одной и той же кинематической моделью положения. Ниже представлены пять общих кинематических моделей положения.

**Робот типа (3,0).** Точка  $P$  и оси  $X_m$  и  $Y_m$  могут быть выбраны произвольно. Матрица  $\Sigma$  всегда может быть выбрана как  $3 \times 3$  единичная матрица. Кинематическая модель положения сводится к

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

где  $\eta_1$  и  $\eta_2$  — компоненты скорости мобильного робота вдоль осей  $X_m$  и  $Y_m$  соответственно, а  $\eta_3$  — угловая скорость мобильного робота.

**Робот типа (2,0).** Точка  $P$  может быть выбрана произвольным образом на оси фиксированных колес, в то время как ось  $X_m$  сонаправлена этой оси (см. рисунок 9). Матрица  $\Sigma$  выбирается как

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кинематическая модель положения (1.19) сводится к

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta & 0 \\ \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

где  $\eta_1$  — компонента скорости мобильного робота вдоль оси  $Y_m$ , а  $\eta_2$  — угловая скорость мобильного робота.

**Робот типа (2,1).** Точка  $P$  является центром рулевого колеса мобильного робота. Ориентация подвижной системы координат может быть выбрана произвольно; обратимся к выбору на рисунке 10. Матрица  $\Sigma(\beta_s)$  выбирается как

$$\Sigma = \begin{pmatrix} -\sin \beta_{s1} & 0 \\ \cos \beta_{s1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кинематическая модель положения (1.20) и (1.21) сводится к

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta + \beta_{s2}) & 0 \\ \cos(\vartheta + \beta_{s1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

$$\dot{\beta}_{s3} = \zeta_1. \quad (1.25)$$

где  $\eta_1$  — компонента скорости мобильного робота вдоль оси  $Y_m$ , а  $\eta_2$  — угловая скорость мобильного робота.

**Робот типа (1,1).** Точка  $P$  должна быть расположена на оси фиксированных колес на пересечении с нормалью, проходящей через центр рулевого колеса; ось  $X_m$  сонаправлена этой нормали (см. рисунок 11. Матрица  $\Sigma(\beta_s)$  выбирается как

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ L \sin \beta_{s3} \\ \cos \beta_{s3} \end{pmatrix}.$$

Кинематическая модель положения (1.20) и (1.21) сводится к

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L \sin \vartheta \sin \beta_{s3} \\ L \cos \vartheta \sin \beta_{s3} \\ \cos \beta_{s3} \end{pmatrix} \eta_1, \quad (1.26)$$

$$\dot{\beta}_{s3} = \zeta_1. \quad (1.27)$$

**Робот типа (1,2).** Точка  $P$  расположена в середине отрезка, соединяющего центры рулевых колес; Ось  $X_m$  сонаправлена с этим отрезком (см. рисунок 12). Матрица  $\Sigma(\beta_s)$  выбирается как

$$\Sigma = \begin{pmatrix} -2L \sin \beta_{s1} \sin \beta_{s2} \\ L \sin(\beta_{s1} + \beta_{s2}) \\ c \sin(\beta_{s2} - \beta_{s1}) \end{pmatrix}.$$

Кинематическая модель положения (1.20) и (1.21) сводится к

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L(\sin \beta_{s1} \sin(\vartheta + \beta_{s2}) + \sin \beta_{s2} \sin(\vartheta + \beta_{s1})) \\ L(\sin \beta_{s1} \sin(\vartheta + \beta_{s2}) + \sin \beta_{s2} \sin(\vartheta + \beta_{s1})) \\ \sin(\beta_{s2} - \beta_{s1}) \end{pmatrix} \eta_1, \quad (1.28)$$

$$\dot{\beta}_{s1} = \zeta_1. \quad (1.29)$$

$$\dot{\beta}_{s2} = \zeta_2. \quad (1.30)$$

## Мобильность, управляемость и маневренность

С этого момента удобно переписать кинематическую модель положения мобильного робота в компактной форме:

$$\dot{z} = B(z)u, \quad (1.31)$$

где либо (при  $\delta_s = 0$ )

$$z = \xi \quad B(z)R^T(\vartheta)\Sigma \quad u = \eta,$$

либо (при  $\delta_s > 0$ )

$$z = \begin{pmatrix} \xi \\ \beta_s \end{pmatrix} \quad B(z) = \begin{pmatrix} R^T(\vartheta)\Sigma(\beta_s) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

Эта кинематическая модель позволяет нам далее обсудить маневренность колесных мобильных роботов. Степень мобильности  $\delta_m$  является первым показателем маневренности. Он равен числу степеней свободы, которые можно напрямую манипулировать с входов  $\eta$ , без переориентации рулевых колес. Интуитивно это соответствует тому, сколько «степеней свободы» мобильный робот мог мгновенно получить из своей текущей конфигурации, не управляя никакими его колесами. Это число  $\delta_m$  не равно общему числу степеней свободы мобильного робота, которыми можно манипулировать с входов  $\eta$  и  $\zeta$ . На самом деле это число равно сумме  $\delta_M = \delta_m + \delta_s$ , которую будем называть степенью маневренности. Она включает в себя  $\delta_s$  дополнительных степеней свободы, доступных из входов  $\zeta$ . Но действие  $\zeta$  на координаты  $\xi$  косвенно, поскольку оно достигается только через координаты  $\beta_s$ . Это отражает тот факт, что изменение ориентации рулевого колеса не может быть достигнуто мгновенно.

Маневренность колесного мобильного робота зависит не только от  $\delta_M$ , но и от того, как эти  $\delta_M$  степеней свободы распределены на  $\delta_m$  и  $\delta_s$ . Поэтому для характеристики маневренности необходимы два индекса:  $\delta_M$  и  $\delta_m$  или, что то же самое,  $\delta_m$  и  $\delta_s$ , которые являются двумя индексами, идентифицирующими тип мобильного робота, как показано выше.

Два робота с одинаковым значением  $\delta_M$ , но разные  $\delta_m$ , не эквивалентны. Для роботов с  $\delta_M = 3$  можно свободно назначать положение МЦВ непосредственно из  $\eta$  для мобильных роботов типа (3,0) или по ориентации одного либо двух рулевых колес для мобильных роботов типов (2,1) и (1,2). Для роботов с  $\delta_M = 2$  МЦВ ограничивается принадлежностью к прямой линии (оси фиксированного колеса). Его положение на этой линии назначается либо непосредственно для мобильных роботов типа (2,0), либо путем ориентации

рулевого колеса для мобильных роботов типа (1,1).

Аналогично, два колесных мобильных робота с одинаковым значением  $\delta_m$ , но разными значениями  $\delta_M$ , не эквивалентны; мобильный робот с большим значением  $\delta_M$  является более маневренным. Сравним, к примеру, мобильного робота типа (1,1) и мобильного робота типа (1,2) с  $\delta_m = 1$  и, соответственно,  $\delta_M = 2$  и  $\delta_M = 3$ . Положение МЦВ для мобильного робота типа (1,2) может быть свободно выбран на плоскости просто при помощи ориентации двух рулевых колес, в то время как для мобильного робота типа (1,1) МЦВ ограничен принадлежностью к оси фиксированных колес, а его положение на этой оси определяется ориентацией рулевого колеса. Поскольку угол поворота рулевых колес обычно может изменяться очень быстро, особенно для небольших мобильных роботов, то, с практической точки зрения, мобильный робот типа (1,2) более маневренный, чем мобильный робот типа (1,1).

Очевидно, что идеальным в этом плане является омнидирекционный (все-направленный) мобильный робот, у которого  $\delta_m = \delta_M = 3$ .

## Неприводимость

В данном разделе обратимся к вопросу неприводимости кинематической модели пространства состояний (1.31). Модель пространства состояний приводима, если существует такое преобразование координат, что некоторые из новых координат тождественно равны нулю вдоль движения системы. Для нелинейных динамических систем без смещения как (1.31) приводимость зависит от инволютивной окрестности  $\bar{\Delta}$  распределения  $\Delta$ , выражающегося в локальных координатах как

$$\Delta(z) = \text{span}\{\text{col}(B(z))\}.$$

Известное следствие теоремы Фробениуса гласит, что система приводима только если  $\dim(\bar{\Delta}) < \dim(z)$ .

Ниже будет доказано, что кинематическая модель положения невырожденного мобильного робота всегда неприводима. Для достижения этого ре-



зультата, проанализируем сначала частный случай мобильного робота типа (1,1), кинематическая модель положения которого имеет вид

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\beta}_{s3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L \sin \vartheta \sin \beta_{s3} & 0 \\ L \cos \vartheta \sin \beta_{s3} & 0 \\ \cos \beta_{s3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \zeta_1 \end{pmatrix} = B(z)u. \quad (1.32)$$

В этом конкретном случае базис  $\bar{\Delta}(z)$  имеет вид

$$\bar{\Delta}(z) = \text{span}\{b_1(z), b_2(z), b_3(z), b_4(z)\},$$

где столбцы  $b_1(z)$  и  $b_2(z)$  матрицы  $B(z)$  имеют вид

$$b_1(z) = \begin{pmatrix} -L \sin \vartheta \sin \beta_{s3} \\ L \cos \vartheta \sin \beta_{s3} \\ \cos \beta_{s3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и

$$b_3(z) = \begin{pmatrix} L \sin \vartheta \sin \beta_{s3} \\ -L \cos \vartheta \sin \beta_{s3} \\ \sin \beta_{s3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_4(z) = \begin{pmatrix} L \cos \vartheta \\ L \sin \vartheta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что  $\text{rank}(B(z)) = \delta_m + \delta_s = 2$  и  $\dim(\bar{\Delta}(z)) = \dim(z) = 4$  на всем пространстве состояний. Отсюда следует, что кинематическая модель пространства состояний мобильного робота типа (1,1) неприводима.

Аналогичные рассуждения могут легко быть приведены и для других описанных выше типов мобильных роботов. Таким образом, можно заключить, что каждая кинематическая модель положения неприводима. Сформулируем это свойство формально.

Для кинематической модели положения (1.31) колесного мобильного робота матрица входов  $B(z)$  обладает полным рангом, т.е.

$$\text{rank}(B(z)) = \delta_m + \delta_s \quad \forall z,$$

и инволютивное распределение  $\bar{\Delta}(z)$  имеет постоянную максимальную размерность, т.е.

$$\dim(\bar{\Delta}(z)) = 3 + \delta_s \quad \forall z.$$

Как следствие, кинематическая модель положения колесного мобильного робота неприводима. Это не зависящее от координат свойство.

### Управляемость и стабилизируемость

В данном разделе будут проанализированы основные свойства управляемости и стабилизируемости обратной связью кинематической модели положения колесных мобильных роботов. Для начала изучим линейное приближение вокруг произвольной равновесной конфигурации  $\bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}^T & \bar{\beta}_s^T \end{pmatrix}^T$ . Равновесие означает, что мобильный робот находится в состоянии покоя с заданным постоянным положением  $\bar{\xi}$  и заданной постоянной ориентацией  $\bar{\beta}_s$  рулевых колес. Очевидно, что скорости равны нулю, т.е.  $\bar{u} = 0$ .

Ранг управляемости линейного приближения кинематической модели положения (1.31) вокруг равновесной конфигурации равен  $\delta_s + \delta_m$ .

Это свойство следует из факта, что линейное приближение вокруг ( $\bar{z} = 0, \bar{u} = 0$ ) может быть записано как

$$\frac{d}{dt}(z - \bar{z}) = B(\bar{z})u.$$

Отсюда следует, что матрица управляемости сводится к  $B(\bar{z})$ , чей ранг, как показано выше, равен  $\delta_s + \delta_m$  для всех  $\bar{z}$ .

Из этого следует, что линейное приближение кинематической модели положения омнидирекционных мобильных роботов (тип (3,0) с  $\delta_m = 3$  и  $\delta_s = 0$ ) полностью управляемо, поскольку  $\delta_m$  является размерностью вектора состояния в данном случае, в то время как для мобильных роботов с ограниченной мобильностью (типы (2,1), (2,0), (1,1) и (1,2) с  $\delta_m \leq 2$ ) оно таковым не является, поскольку  $\delta_m + \delta_s < 3 + \delta_s = \dim(z)$ .

Это свойство, тем не менее, как подсказывает физическая интуиция, не препятствует мобильным роботам с ограниченной мобильностью быть управляемыми. Можно сформулировать, что кинематическая модель положения (1.31) колесного мобильного робота управляема.

Действительно, для нелинейных динамических систем без смещения вида (1.31) сильная алгебра доступности совпадает с инволютивным распределением, которое было введено в разделе 1.2. Из изложенного выше следует, что условие ранга сильной доступности выполняется для всех  $z$  в пространстве конфигураций и, следовательно, система сильно доступна из любой конфигурации. Для системы без смещения сильная доступность подразумевает управляемость.

Практически это свойство означает, что мобильный робот всегда может быть выведен из любого начального положения  $\xi_0$  до любого конечного положения  $\xi_f$  за конечное время с использованием управляющих входных скоростей  $u = \begin{pmatrix} \eta^T & \zeta^T \end{pmatrix}^T$ .

Рассмотрим теперь вопрос существования такой обратной связи  $u(z)$ , которая могла бы стабилизировать мобильного робота в конкретной конфигурации  $z^*$ . Для омнидирекционных мобильных роботов ответ на данный вопрос очевиден. Например,

$$u(z) = B^{-1}(z)A(z - z^*),$$

где  $A$  — произвольная гурвицева матрица.  $u_z$  — это, очевидно, гладкий линеаризующий закон управления через обратную связь, который экспоненциально приводит мобильного робота к конфигурации  $z^*$ . Действительно, замкнутая система описывается свободно назначаемой линейной динамикой

$$\frac{d}{dt}(z - z^*) = A(z - z^*).$$

Следовательно, омнидирекционные мобильные роботы полностью линеаризуемы по состоянию и, тем самым, очень близки к полноприводным роботам-манипуляторам.

Для мобильных роботов с ограниченной мобильностью ситуация не столь радужна, поскольку, исходя из приведенного выше анализа, они определенно не полностью линеаризуемы по состоянию, ведь для этого необходима полная управляемость линейного приближения. Однако, для мобильных роботов с ограниченной мобильностью кинематическая модель положения (1.31) не стабилизируема непрерывной не зависящей от времени обратной связью по состоянию  $u(z)$ , но стабилизируема непрерывной зависящей от времени статической обратной связью по состоянию  $u(z, t)$ .

В самом деле, так называемое необходимое условие Брокетта не удовлетворяется непрерывной статической не зависящей от времени обратной связью по состоянию, поскольку отображение  $(z, u) \rightarrow B(z)u$  не находится в окрестности равновесия  $\bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}^T & \bar{\beta}_s^T \end{pmatrix}^T, u = 0$ . Стабилизируемость непрерывной зависящей от времени статической обратной связью по состоянию является специальным случаем общего случая стабилизируемости для систем без смещения. Систематическая процедура для синтеза таких стабилизирующих зависящих от времени регуляторов обратной связью может быть адаптирована, что применимо ко всем кинематическим моделям положения, потому что в каждом случае один столбец матрицы  $B(z)$  имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ .

Из приведенного анализа очевидно, что для разработки и последующей практической апробации алгоритмов траекторного управления наилучшим образом подходят роботы типа  $(3,0)$ , т.е. всенаправленные (омнидирекционные) роботы. Поэтому дальнейшие исследования будут проводиться, опираясь на математические модели, соответствующие данному классу объектов управления.

### 1.3 Обобщенная постановка задачи

В работе рассматривается круг задач траекторного управления, в которых необходимо обеспечить заданное движение объекта управления в пространстве. Так как в качестве объектов управления выступают механические

системы, передвигающиеся в пространстве, то их можно условно отнести к многоканальным динамическим системам. Если быть точнее, в работе в качестве объектов управления рассмотрен один из простейших классов механических систем — мобильные системы. Это могут быть мобильные роботы, беспилотные летательные аппараты, интегрированные системы управления движением авиационного и морского назначения и т.п.

В силу того, что задача траекторного управления ставится как задача слежения, предписанная траектория выступает в качестве сигнала, который системе необходимо воспроизвести с наилучшей возможной точностью. В работе используется неявное описание предписанных траекторий. При таком описании траектория  $S$ , в общем случае, задается как пересечение неявно заданных  $n$ -мерных поверхностей, описываемых набором из  $(n - 1)$  гладких функций:

$$\varphi_1(q) = 0 \cap \varphi_2(q) = 0 \cap \dots \cap \varphi_{n-1}(q) = 0, \quad (1.33)$$

где  $q$  —  $n$ -мерный вектор пространственных координат,  $\varphi_i(q)$  — гладкие функции, принимающие нулевое значение при всех  $q \in S$ . Для двумерного случая (см. рисунок 13) неявное описание предписанной траектории сводится к виду

$$\varphi(q) = 0, \quad (1.34)$$

где  $\varphi(q)$  — гладкая функция.

Введем в рассмотрение ортогональные отклонения, возникающие в результате нарушения условия (1.33):

$$e_1(q) = \varphi_1(q), e_2(q) = \varphi_2(q), \dots, e_{n-1}(q) = \varphi_{n-1}(q), \quad (1.35)$$

которые, очевидно, также принимают нулевые значения при всех  $q \in S$ .

Декомпозируем задачу траекторного управления на две подзадачи:

1. Геометрическая подзадача, состоящая в обнулении ортогональных отклонений  $e_i(q)$ ;

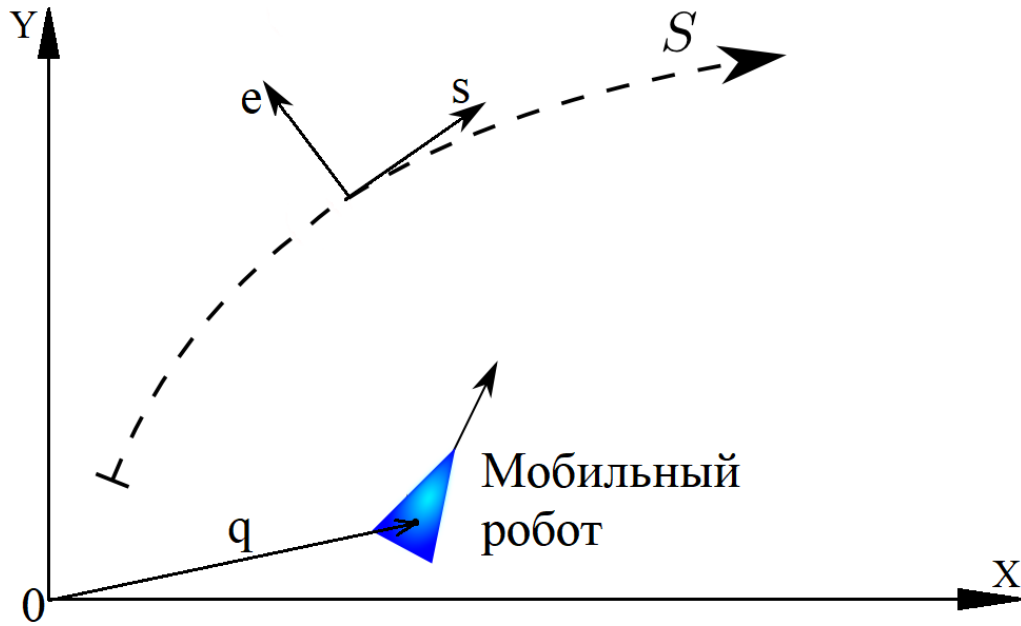


Рисунок 13 — Мобильный робот на плоскости и желаемая траектория  $S$

2. Кинематическая подзадача, состоящая в обеспечении желаемого режима движения путем поддержания желаемого значения скорости движения вдоль желаемой траектории траектории  $v^*$ .

## 2 Траекторное управление возмущенным объектом

В главе будем рассматривать задачу синтеза траекторного управления движением возмущенного объекта управления вдоль заданной траектории [15]. Введем в рассмотрение неподвижную (абсолютную) правостороннюю декартову систему координат  $XU$ , а также подвижную (с началом в центре масс  $C$  мобильного робота) правостороннюю декартову систему координат  $X_cU_c$ . Положение центра масс  $C$  в неподвижной системе координат будем описывать при помощи вектора координат  $q = [x, y]^T \in \mathbb{R}^2$ , характеризующих линейные перемещения в пространстве. Угловая ориентация связанной системы координат относительно неподвижной задается при помощи поворотной матрицы (матрицы вращения)  $R(\alpha) \in SO(2)$ , где  $\alpha$  — угол ориентации мобильного робота.

Рассмотрим математическую модель мобильного робота вида

$$\ddot{q} = \frac{F}{m}, \quad (2.1)$$

$$\dot{q} = R(\alpha)v, \quad (2.2)$$

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

$$\dot{\alpha} = \omega, \quad (2.4)$$

где  $q = [x, y]^T \in \mathbb{R}^2$  — вектор текущих декартовых координат объекта управления в абсолютной системе координат,  $m$  — масса объекта управления,  $F = [F_x, F_y]^T \in \mathbb{R}^2$  — вектор управляющих сил,  $v = [v_x, v_y]^T \in \mathbb{R}^2$  — вектор линейных скоростей объекта управления,  $R(\alpha) \in SO(2)$  — матрица поворота от связанной системы координат к абсолютной.

Решать задачу траекторного управления будем при помощи преобразования координат исходной модели объекта управления к задачно ориентированной форме. Суть данного действия заключается в том, что неявные представления поверхностей в пространстве задают линии уровня, таким образом,

ассоциируя себя с той или иной линией уровня можно определить текущее положение объекта управления относительно целевой поверхности.

Неявное описание желаемой траектории  $S$  движения объекта управления траектории в неявном виде задается следующим выражением:

$$\varphi(q) = 0, \quad (2.5)$$

где  $\varphi(q)$  — гладкая функция, которая принимает нулевые значения при всех  $q \in S$ .

Введем в рассмотрение также ортогональное отклонение, возникающие в результате нарушения условия (2.5):

$$e(q) = \varphi(q), \quad (2.6)$$

которое, очевидно, также принимает нулевое значение при всех  $q \in S$ .

Обозначим с помощью переменной  $s$  локальную координату в виде

$$s = \psi(q), \quad (2.7)$$

где  $\psi(q)$  — гладкая функция. Вообще говоря, эта переменная соответствует длине желаемой траектории  $S$ . В данном случае интерес представляет не столько сама локальная координата  $s$ , сколько ее производная  $\dot{s}$ , характеризующая касательную скорость движения вдоль желаемой траектории. Найдем преобразование координат от текущего базиса к задачно ориентированному через якобиан вида

$$\Upsilon(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi(q)}{\partial y} & -\frac{\partial \varphi(q)}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi(q)}{\partial x} & \frac{\partial \varphi(q)}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Тогда преобразование будет осуществляться по формуле

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \Upsilon(q)\dot{q} = \Upsilon(q)R(\alpha)v. \quad (2.9)$$

Соответственно, обратное преобразование имеет вид



$$\dot{q} = R(\alpha)\Upsilon^{-1}(q) \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Для того, чтобы обратное преобразование существовало, необходимо, чтобы выполнялось условие регулярности преобразования, которое выражается в виде условия  $\det \Upsilon \neq 0$ . Это условие выполняется для гладких кривых.

При помощи представленного преобразования будем осуществлять переход к задачно ориентированным координатам  $s$  и  $e$ . Далее будет рассмотрена процедура синтеза алгоритмов траекторного управления возмущенным объектом управления на основе описанного выше преобразования координат.

## 2.1 Синтез траекторного управления возмущенным объектом

Рассмотрим ситуацию, когда на объект управления, заданный в виде (2.1)–(2.4), действует неизменяемого постоянного возмущающего воздействия  $\delta = const$ . Тогда выражение (2.1) примет вид

$$\ddot{q} = \frac{F}{m} + \delta, \quad (2.11)$$

Классическая теория управления предлагает нам ряд методов борьбы с постоянными возмущениями, таких как включение в систему дополнительного интегрирующего или изодромного звена. Это позволяет повысить порядок астатизма системы и, как правило, нивелировать воздействие постоянных возмущений.

Применение первого метода (включение дополнительного интегрирующего звена) в данном случае не приводит к необходимому результату, что не позволяет рассматривать данный метод как эффективный в данном случае.

Применение второго метода (включение изодромного звена) демонстрирует уже существенно лучшую эффективность, желаемая скорость достигается

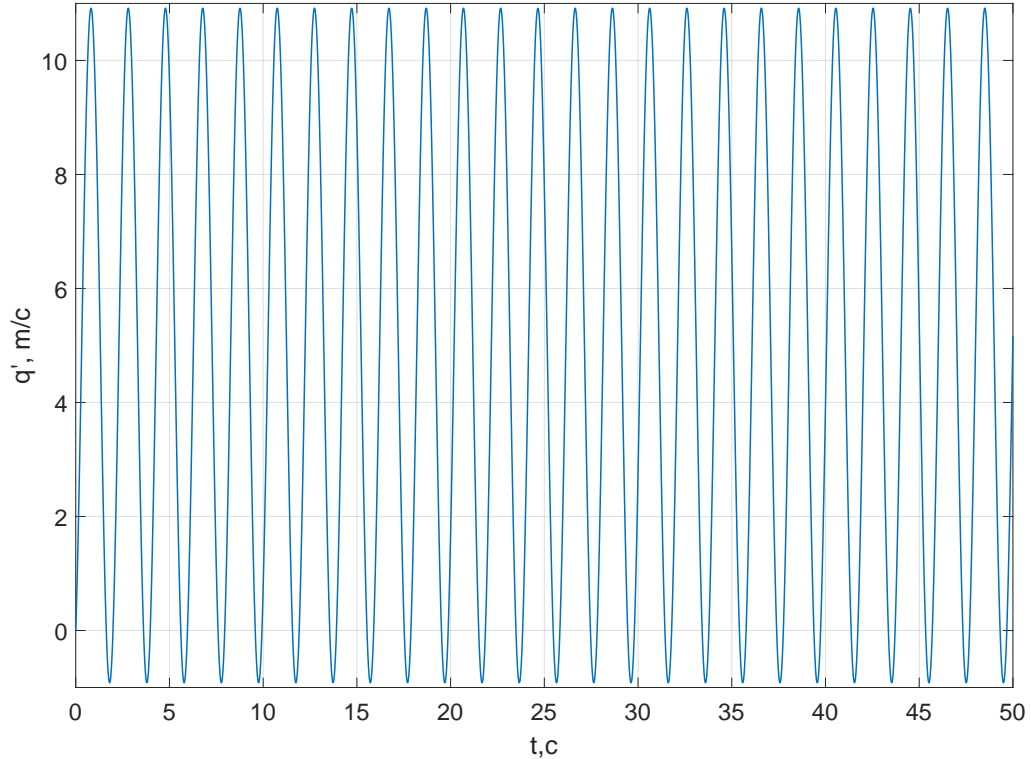


Рисунок 14 — График скорости  $\dot{q}(t)$  при добавлении в контур интегратора, желаемая скорость  $\bar{v} = 5\text{ м/с}$ , внешнее возмущение  $\delta = 10$ .

в достаточно короткое время порядка нескольких секунд. Здесь стоит отметить, что имеет место сходимость не точно к задаваемому значению, а к его некоторой малой окрестности, и значение продолжает колебаться в ней, не сходясь к константе.

Для облегчения расчетов и упрощения процедуры синтеза, задачу траекторного управления будем решать в два этапа. На первом этапе осуществим замыкание скоростной подсистемы при помощи локального регулятора. Это действие позволит понизить порядок исходной модели объекта управления на единицу, что существенно облегчит преобразование к задачно ориентированным координатам и последующий синтез законов управления, которые составляют второй этап решения задачи траекторного управления возмущенным объектом.

Замыкание внутреннего скоростного контура осуществляется с целью осу-

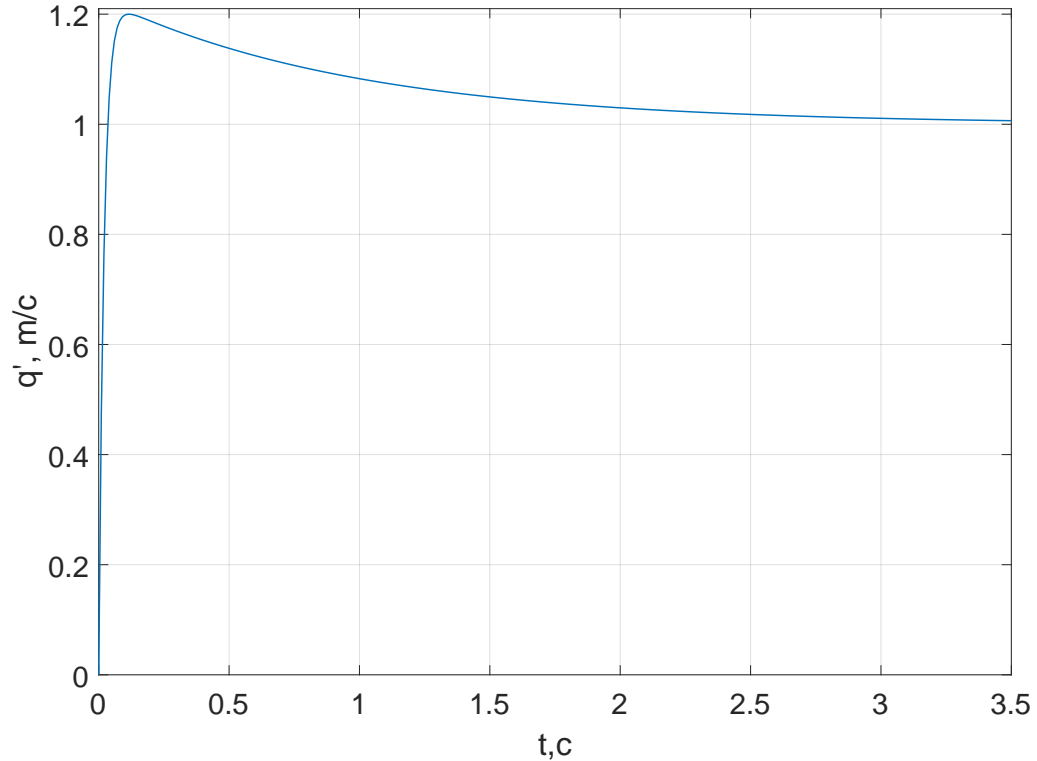


Рисунок 15 — График скорости  $\dot{q}(t)$  при добавлении в контур изодромного звена, желаемая скорость  $\bar{v} = 5\text{ м/с}$ , внешнее возмущение  $\delta = 10$ .

ществления задачи слежения объектом управления вида (2.1) за задающим сигналом  $\bar{v}$ , вид которого далее будет сконструирован, исходя из постановки задачи траекторного управления. Для того, чтобы этого добиться, необходимо обеспечить поддержание выполнения условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{q} - \bar{v}) = 0. \quad (2.12)$$

В [36] показано, что этого можно добиться (для невозмущенного объекта управления), выбрав закон управления вида

$$\frac{F}{m} = \dot{\bar{v}} - k_q(\dot{q} - \bar{v}). \quad (2.13)$$

Однако, если на объект управления будет воздействовать постоянное неизмеряемое возмущение  $\delta = \text{const}$ , регулятор (2.13) не будет обеспечивать выполнение целевого условия (2.12). Далее будет предложен метод решения за-

дачи замыкания скоростного контура в присутствии такого возмущения, в том числе при отсутствии измерения скорости  $\dot{q}$ .

При наличии непосредственного воздействия неизмеряемого внешнего возмущения на объект управления его модель принимает вид (2.11) и, с учетом регулятора (2.13), можно записать

$$\ddot{q} = \dot{\bar{v}} - k_q(\dot{q} - \bar{v}) + \delta.$$

Очевидно, что необходимо скомпенсировать неизвестное возмущение для обеспечения выполнения цели управления.

Чтобы осуществить поставленную задачу, рассмотрим функцию Ляпунова следующего вида:

$$V_1 = \frac{1}{2}(\dot{q} - \bar{v})^T(\dot{q} - \bar{v}) + \frac{1}{2}((\dot{q} - \bar{v}) - \gamma - \sigma)^T((\dot{q} - \bar{v}) - \gamma - \sigma) + \frac{1}{2}\sigma^T\sigma + \frac{1}{2}\dot{\sigma}^T\dot{\sigma}, \quad (2.14)$$

где  $\bar{v}$  — вектор желаемых скоростей,  $\gamma$  и  $\sigma$  — вспомогательные переменные. Найдем производную функции Ляпунова (2.14) по времени:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= (\dot{q} - \bar{v})^T(\ddot{q} - \dot{\bar{v}}) + ((\dot{q} - \bar{v}) - \gamma - \sigma)^T((\ddot{q} - \dot{\bar{v}}) - \dot{\gamma} - \dot{\sigma}) + \sigma^T\dot{\sigma} + \dot{\sigma}^T\dot{\sigma} = \\ &= (2(\dot{q} - \bar{v}) - \gamma - \sigma)^T \left( \frac{F}{m} - \dot{\bar{v}} \right) - \dot{\gamma}^T((\dot{q} - \bar{v}) - \gamma) + \dot{\sigma}^T((\dot{q} - \bar{v}) - \gamma - \dot{\sigma}). \end{aligned}$$

Введем управляющие воздействия и вспомогательные переменные в виде

$$\frac{F}{m} = \dot{\bar{v}} - k_q(2(\dot{q} - \bar{v}) - \gamma - \sigma), \quad (2.15)$$

$$\dot{\sigma} = ((\dot{q} - \bar{v}) - \gamma), \quad (2.16)$$

$$\dot{\gamma} = k_\gamma((\dot{q} - \bar{v}) - \gamma), \quad (2.17)$$

Подставив (2.15)–(2.17) в выражение для производной, получим

$$\dot{V}_1 = -k_q(2(\dot{q} - \bar{v}) - \gamma - \sigma)^T(2(\dot{q} - \bar{v}) - \gamma - \sigma) - k_\gamma((\dot{q} - \bar{v}) - \gamma)^T((\dot{q} - \bar{v}) - \gamma).$$

Возьмем вторую производную от функции Ляпунова (2.14) по времени:

$$\begin{aligned} \ddot{V}_1 &= -2k_q(2(\dot{q} - \bar{v}) - \gamma - \sigma)^T(2(\ddot{q} - \dot{\bar{v}}) - \dot{\gamma} - \dot{\sigma}) - 2k_\gamma((\dot{q} - \bar{v}) - \gamma)^T((\ddot{q} - \dot{\bar{v}}) - \dot{\gamma}) = \\ &= -2k_q(\dot{q} - \bar{v} - \gamma - \sigma)^T(-k_q(2(\dot{q} - \bar{v}) - \gamma - \sigma)) - \\ &\quad - 2k_\gamma((\dot{q} - \bar{v}) - \gamma)^T((-k_q(2(\dot{q} - \bar{v}) - \gamma - \sigma)) - \dot{\bar{v}}) - k_\gamma((\dot{q} - \bar{v}) - \gamma). \end{aligned}$$

Проанализируем полученные выражения. Для этого воспользуемся следствием из леммы Барбалата [9].

*Следствие.* Если дважды дифференцируемая функция на интервале  $[t_0, \infty)$  функция  $f(t)$  имеет конечный предел при  $t \rightarrow \infty$  и вторая производная на этом интервале ограничена, то производная  $\dot{f}(t)$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

В силу того, что функция Ляпунова (2.14) ограничена снизу нулем и  $\dot{V}_1 \leq 0$ , то функция  $V_1$  сходится к конечному пределу при  $t \rightarrow \infty$ . Из ограниченности функции  $V_1$  следует, что функции  $(\dot{q} - \bar{v})$ ,  $((\dot{q} - \bar{v}) - \gamma - \sigma)$ ,  $\sigma$  и  $\dot{\sigma}$  также ограничены. Отсюда следует, что и функции  $\dot{\gamma} = k_\gamma((\dot{q} - \bar{v}) - \gamma)$  и  $\ddot{\sigma} = ((\dot{q} - \bar{v}) - \gamma)$  ограничены, а значит  $\ddot{V}_1$  также ограничена, а  $\dot{V}_1$  асимптотически стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Следовательно, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (2(\dot{q} - \bar{v}) - \gamma - \sigma) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} ((\dot{q} - \bar{v}) - \gamma) &= 0. \end{aligned}$$

На основании вышеизложенного можно сделать вывод о том, что

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma &= (\dot{q} - \bar{v}). \end{aligned}$$

Таким образом, контур по скорости обладает свойством глобальной асимптотической устойчивости и выполняется соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{q} - \dot{\bar{v}}) = 0.$$

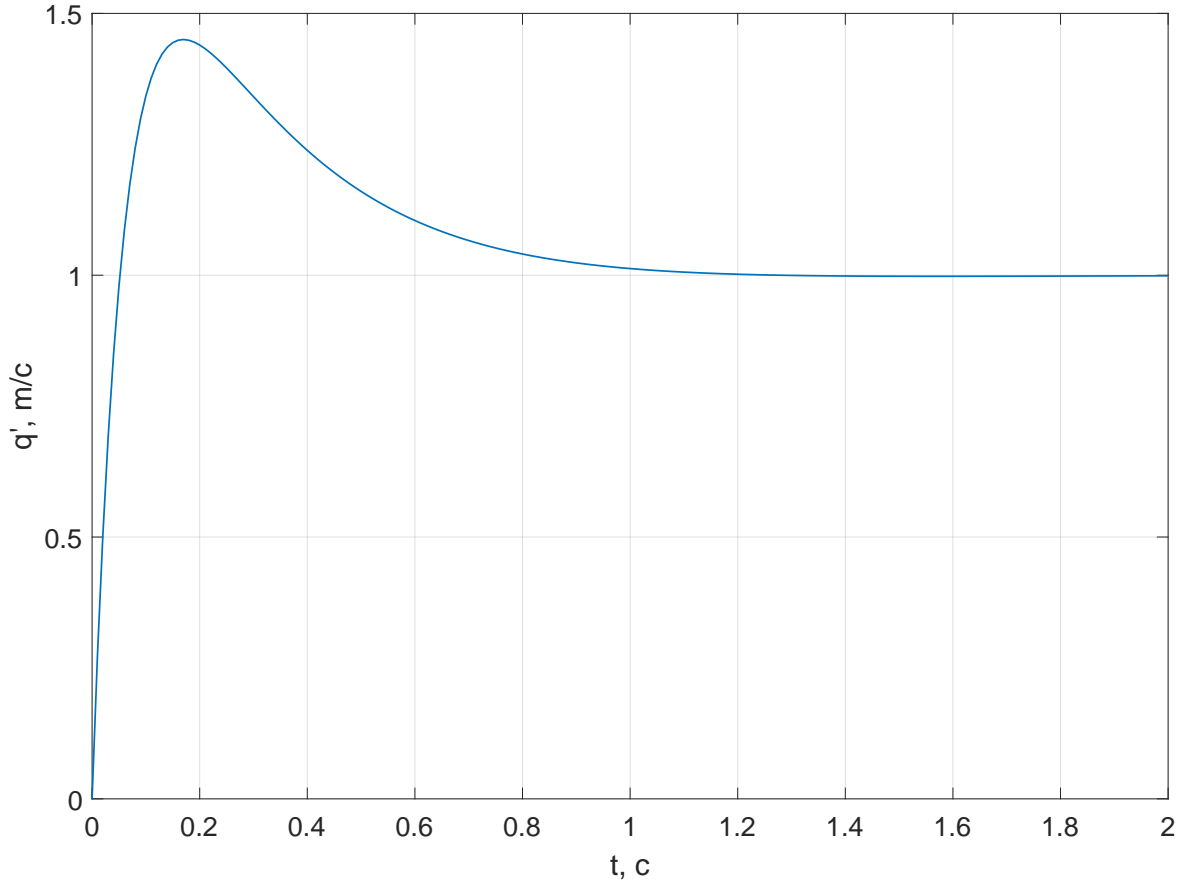


Рисунок 16 — График скорости  $\dot{q}(t)$  при законе управления вида (2.15)–(2.17), желаемая скорость  $\bar{v} = 1$  м/с, внешнее возмущение  $\delta = 10$ .

На рисунке 16 приведен график скорости  $\dot{q}(t)$  при законе управления вида (2.15)–(2.17). Как видно из рисунка, синтезированный закон управления позволяет обеспечить стабилизацию скоростной подсистемы с нулевой установившейся ошибкой при наличии внешнего постоянного неизмеряемого ограниченного возмущения, существенно превышающего по амплитуде желаемую скорость. При этом время переходного процесса  $t = 1.1$  с вдвое меньше аналогичного показателя при включении изодромного звена  $t = 2.2$  с при равенстве коэффициента  $k_q$  и коэффициента усиления изодромного звена.

После замыкания скоростного контура, модель системы вида (2.1) можно записать в редуцированной форме:

$$\dot{q} = \bar{v}. \quad (2.18)$$

Теперь будем формировать внутренний контур для решения поставленной задачи траекторного управления. Закон управления  $\bar{v}$  будем синтезировать в виде:

$$\bar{v} = u_e + u_s, \quad (2.19)$$

где  $u_e$  — компонент, обеспечивающий стабилизацию положения относительно желаемой траектории, тем самым решающий геометрическую подзадачу, а  $u_s$  — компонент, обеспечивающий желаемую скорость движения вдоль предписанной траектории, решая тем самым кинематическую подзадачу.

Осуществим теперь переход к задачно ориентированным координатам при помощи преобразования (2.8), определенного выше. Очевидно, что компонент  $u_s$  для решения кинематической подзадачи можно выбрать в следующем виде:

$$u_s = R(\alpha)\Upsilon^{-1}(q) \begin{bmatrix} v^* \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Тогда выражение (2.18) примет вид

$$\dot{q} = R(\alpha)\Upsilon^{-1}(q) \begin{bmatrix} v^* \\ 0 \end{bmatrix} + u_e.$$

Теперь осуществим синтез стабилизирующего закона управления  $u_e$ . Рассмотрим функцию Ляпунова  $V_e$  следующего вида:

$$V_e = \frac{k_e}{2} \varphi^2(q). \quad (2.21)$$

Найдем производную функции (2.21) по времени:

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &= k_e \varphi(q) \left( \frac{\partial}{\partial q} \varphi(q) \right)^T \dot{q} = k_e \varphi(q) \left( \frac{\partial}{\partial q} \varphi(q) \right)^T u_s + \\ &+ k_e \varphi(q) \left( \frac{\partial}{\partial q} \varphi(q) \right)^T \Upsilon^{-1}(q) \begin{bmatrix} V^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = k_e \varphi(q) \left( \frac{\partial}{\partial q} \varphi(q) \right)^T u_s. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что вторая половина получившегося выражения в силу ортогональности тождественно равна нулю. Теперь выберем  $u_e$  в виде

$$u_e = -k_e \varphi(q) \frac{\partial}{\partial q} \varphi(q), \quad (2.22)$$

где  $k_e$  — постоянный положительный коэффициент.

Тогда выражение для производной функции (2.21) примет вид

$$\dot{V}_e = -u_e^2 \leq 0,$$

что означает асимптотическую устойчивость точки  $e(q) = 0$ , решая тем самым геометрическую подзадачу, что, в совокупности с приведенным выше решением кинематической подзадачи, обеспечивает решение поставленной задачи траекторного управления мобильным роботом в условиях наличия внешнего постоянного неизмеряемого ограниченного возмущения.

## 2.2 Синтез траекторного управления возмущенным объектом без измерения линейных скоростей

Рассмотрим задачи, аналогичные представленным выше, при отсутствии возможности измерения скорости  $\dot{q}$ . Рассуждения будем строить аналогично предыдущему разделу.

Предыдущие рассуждения дополним, введя еще одну вспомогательную переменную  $\xi = q - p$ . При этом требуется обеспечить, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi = 0,$$



что, в свою очередь, повлечет за собой выполнение условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p = q. \quad (2.23)$$

Вновь воспользуемся методом функций Ляпунова. Введем вспомогательные переменные  $\beta = \delta - \sigma$  и  $\xi = q - p$ , где  $\sigma$  и  $p$  — вспомогательные переменные, поведение которых будет определено позднее. Теперь рассмотрим функцию Ляпунова следующего вида:

$$V_2 = \frac{1}{2}(\dot{q} - \bar{v})^T(\dot{q} - \bar{v}) + \frac{1}{2}((\dot{q} - \bar{v}) - \gamma - \sigma)^T((\dot{q} - \bar{v}) - \gamma - \sigma) + \frac{1}{2}\sigma^T\sigma + \frac{1}{2}\dot{\sigma}^T\dot{\sigma} + \frac{1}{2}\dot{\xi}^T\dot{\xi} + \frac{k_1}{2}\xi^T\xi + \frac{k_2}{2}(\xi - \eta)^T(\xi - \eta), \quad (2.24)$$

где  $\bar{v}$  — вектор желаемых скоростей,  $\gamma, \eta$  — вспомогательные переменные,  $k_1, k_2$  — постоянные положительные коэффициенты. Найдем производную функции Ляпунова (2.24) по времени:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= (\dot{q} - \bar{v})^T(\ddot{q} - \dot{\bar{v}}) + \dot{\beta}^T\dot{\beta} + k_1\beta^T\dot{\beta} + k_2(\beta - \gamma)^T(\dot{\beta} - \dot{\gamma}) + \\ &\quad + \dot{\xi}^T\dot{\xi} + k_3\xi^T\dot{\xi} + k_4(\xi - \eta)^T(\dot{\xi} - \dot{\eta}) = \\ &= (\dot{p} - \bar{v}) \left( \frac{F}{m} + \delta - \dot{\bar{v}} \right) + \dot{\beta}(-\dot{\sigma} + k_1\beta + k_2(\beta - \gamma)) - k_2\dot{\gamma}^T(\beta - \gamma) + \\ &+ \dot{\xi}^T \left( \frac{F}{m} + \delta - \dot{\bar{v}} \right) + \dot{\xi} \left( \frac{F}{m} + \delta - \dot{p} + k_3\xi + k_4(\xi - \eta) \right) - k_4\dot{\eta}^T(\xi - \eta) = \\ &= (\dot{p} - \bar{v}) \left( \frac{F}{m} + \delta - \dot{\bar{v}} \right) + \dot{\beta}(-\dot{\sigma} + k_1\beta + k_2(\beta - \gamma)) - k_2\dot{\gamma}^T(\beta - \gamma) + \\ &\quad + \dot{\xi}^T \left( \frac{2F}{m} + 2\delta - \dot{\bar{v}} - \dot{p} + k_3\xi + k_4(\xi - \eta) \right) - k_4\dot{\eta}^T(\xi - \eta). \end{aligned}$$

Введем управляющие воздействия и вспомогательные переменные в виде

$$\frac{F}{m} = \dot{\bar{v}} - k_q(2(\dot{p} - \bar{v}) - \gamma - \sigma), \quad (2.25)$$

$$\dot{\sigma} = k_1((\dot{p} - \bar{v}) - \gamma), \quad (2.26)$$

$$\dot{\gamma} = k_{\gamma} ((\dot{p} - \bar{v}) - \gamma), \quad (2.27)$$

$$\ddot{p} = \dot{\bar{v}} - k_p(\dot{p} - \bar{v}) + k_1\xi + k_2(\xi - \eta), \quad (2.28)$$

$$\dot{\eta} = k_{\eta} (\xi - \eta), \quad (2.29)$$

Подставив (2.25)–(2.29) в выражение для производной, получим

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -k_q(2(\dot{p} - \bar{v}) - \gamma - \sigma)^T(2(\dot{p} - \bar{v}) - \gamma - \sigma) - k_{\gamma}((\dot{p} - \bar{v}) - \gamma)^T((\dot{p} - \bar{v}) - \gamma) - \\ & - k_2k_{\eta}(\xi - \eta)^T(\xi - \eta) \leq 0. \end{aligned}$$

Возьмем вторую производную от функции Ляпунова (2.24) по времени:

$$\begin{aligned} \ddot{V}_2 = & -2k_q(2(\dot{p} - \bar{v}) - \gamma - \sigma)^T(2(\ddot{p} - \dot{\bar{v}}) - \dot{\gamma} - \dot{\sigma}) - 2k_{\gamma}((\dot{p} - \bar{v}) - \gamma)^T((\ddot{p} - \dot{\bar{v}}) - \dot{\gamma}) - \\ & - 2k_2k_{\eta}(\xi - \eta)^T(\dot{\xi} - \dot{\eta}) = -2k_q(\dot{p} - \bar{v})^T(-k_p(\dot{p} - \bar{v}) + k_3\xi + k_4(\xi - \eta)) - \\ & - 2k_2k_{\beta}(\beta - \gamma)^T(\dot{\beta} - \dot{\gamma}) - 2k_2k_{\eta}(\xi - \eta)^T(\dot{\xi} - \dot{\eta}). \end{aligned}$$

Проанализируем полученные выражения, рассуждая по аналогии с предыдущим разделом. Для этого вновь воспользуемся следствием из леммы Барбалата.

В силу того, что функция Ляпунова (2.24) ограничена снизу нулем и  $\dot{V}_2 \leq 0$ , то функция  $V_2$  сходится к конечному пределу при  $t \rightarrow \infty$ . Из ограниченности функции  $V_2$  следует, что функции  $(\dot{q} - \bar{v})$ ,  $((\dot{q} - \bar{v}) - \gamma - \sigma)$ ,  $\dot{\xi} = \dot{q} - \dot{p}$ ,  $\xi = q - p$  и  $(\xi - \eta)$  также ограничены. Отсюда следует, что и функции  $\dot{\gamma} = k_{\gamma} ((\dot{q} - \bar{v}) - \gamma)$ ,  $\dot{\sigma} = k_1((\dot{p} - \bar{v}) - \gamma)$  и  $\dot{\eta} = k_{\eta} (\xi - \eta)$  ограничены, значит, функция  $(\dot{\xi} - \dot{\eta})$  тоже ограничена, а значит  $\ddot{V}_2$  также ограничена, а  $\dot{V}_2$  асимптотически стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Следовательно, выполняются соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{p} - \bar{v}) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\beta - \gamma) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi - \eta) = 0.$$

На основании вышеизложенного можно сделать вывод о том, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma = (\dot{p} - \bar{v}).$$

Теперь продифференцируем выражение  $\dot{p} - \bar{v} = 0$  с использованием полученных выше результатов:

$$-k_1 \xi = 0,$$

из чего следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi = 0,$$

из чего, в свою очередь, следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \eta = 0.$$

Таким образом, контур по скорости обладает свойством глобальной асимптотической устойчивости и выполняются соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (q - p) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{q} - \dot{p}) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{q} - \bar{v}) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{p} - \bar{v}) = 0.$$

На рисунке 17 приведен график скорости  $\dot{q}(t)$  при замыкании внутреннего контура законом управления вида (2.25)–(2.29). Как видно из полученного результата, разработанный алгоритм управления успешно реализует задачу замыкания внутреннего скоростного контура. Теперь можно приступить к синтезу внешнего контура по положению.

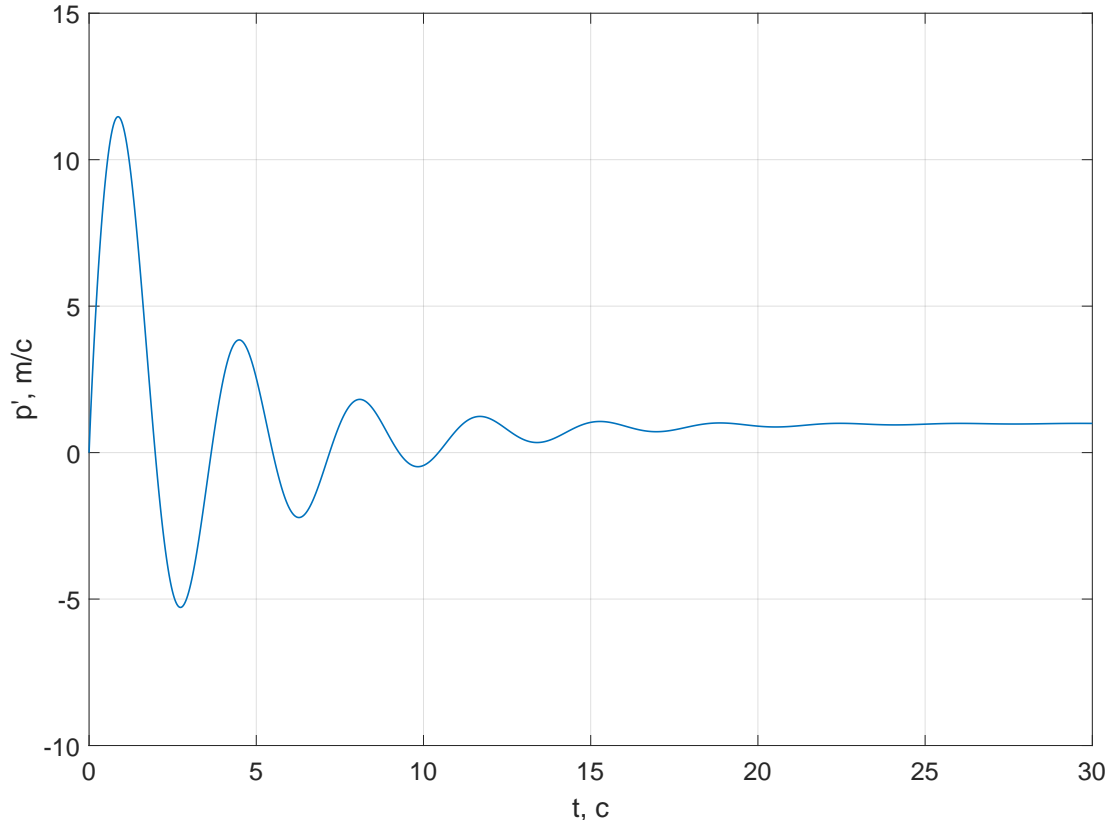


Рисунок 17 — График скорости  $\dot{q}(t)$  при законе управления вида (2.25)–(2.29), желаемая скорость  $\bar{v} = 1\text{ м/с}$ ,  $k_q = 5$ ,  $k_p = 5$ , внешнее возмущение  $\delta = 10$ .

После замыкания скоростного контура, модель системы вида (2.1) можно записать в редуцированной форме:

$$\dot{q} = \bar{v}. \quad (2.30)$$

Теперь будем формировать внутренний контур для решения поставленной задачи траекторного управления. Закон управления  $\bar{v}$  будем синтезировать в виде:

$$\bar{v} = u_e + u_s, \quad (2.31)$$

где  $u_e$  — компонент, обеспечивающий стабилизацию положения относительно желаемой траектории, тем самым решающий геометрическую подзадачу, а  $u_s$

— компонент, обеспечивающий желаемую скорость движения вдоль предписанной траектории, решая тем самым кинематическую подзадачу.

По аналогии проделанным в предыдущем разделе, осуществим теперь преобразование координат к задачно ориентированной форме и решим задачу траекторного управления. Очевидно, что компонент  $u_s$  для решения кинематической подзадачи можно выбрать в следующем виде:

$$u_s = R(\alpha)\Upsilon^{-1}(p) \begin{bmatrix} v^* \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Тогда выражение (2.30) примет вид

$$\dot{p} = R(\alpha)\Upsilon^{-1}(p) \begin{bmatrix} v^* \\ 0 \end{bmatrix} + u_e.$$

Теперь осуществим синтез стабилизирующего закона управления  $u_e$ . Рассмотрим функцию Ляпунова  $V_e$  следующего вида:

$$V_e = \frac{k_e}{2}\varphi^2(p). \quad (2.33)$$

Найдем производную функции (2.33) по времени:

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &= k_e\varphi(p) \left( \frac{\partial}{\partial p}\varphi(p) \right)^T \dot{p} = k_e\varphi(p) \left( \frac{\partial}{\partial p}\varphi(p) \right)^T u_s + \\ &+ k_e\varphi(p) \left( \frac{\partial}{\partial p}\varphi(p) \right)^T \Upsilon^{-1}(p) \begin{bmatrix} V^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = k_e\varphi(p) \left( \frac{\partial}{\partial p}\varphi(p) \right)^T u_s. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что вторая половина получившегося выражения в силу ортогональности тождественно равна нулю. Теперь выберем  $u_e$  в виде

$$u_e = -k_e\varphi(p) \frac{\partial}{\partial p}\varphi(p), \quad (2.34)$$

где  $k_e$  — постоянный положительный коэффициент.

Тогда выражение для производной функции (2.33) примет вид

$$\dot{V}_e = -u_e^2 \leq 0,$$

что означает асимптотическую устойчивость точки  $e(p) = 0$ , решая тем самым геометрическую подзадачу, что, в совокупности с приведенным выше решением кинематической подзадачи обеспечивает решение поставленной задачи траекторного управления мобильным роботом в условиях наличия внешнего постоянного неизменяемого ограниченного возмущения.

## 2.3 Примеры

Рассмотрим в качестве примера моделирование движения вдоль типовых желаемых траекторий: прямой линии и окружности.

В случае прямой линии задачно ориентированные координаты и якобиан задаются следующим образом:

$$\varphi(q) = -\sin \alpha^* x + \cos \alpha^* y + \varphi_0 = 0,$$

$$\psi(q) = \cos \alpha^* x + \sin \alpha^* y + \psi_0,$$

$$\Upsilon(q) = \begin{bmatrix} \cos \alpha^* & \sin \alpha^* \\ -\sin \alpha^* & \cos \alpha^* \end{bmatrix}.$$

Результаты моделирования движения вдоль прямой линии представлены на рисунках 18 и 19. Моделирование проводилось при следующих параметрах:  $\alpha^* = \pi/6$ , желаемая скорость  $v^* = 1$ , амплитуда возмущения  $\delta = 10$ , коэффициенты регулятора  $k_q = 10, k_1 = 0.1, k_2 = 10, k_3 = 0.2, k_4 = 5, k_{gamma} = 3, k_{eta} = 3, k_e = 3$ .

В случае окружности задачно ориентированные координаты и якобиан задаются следующим образом:

$$\varphi(q) = \frac{1}{2R}(R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2) = 0,$$

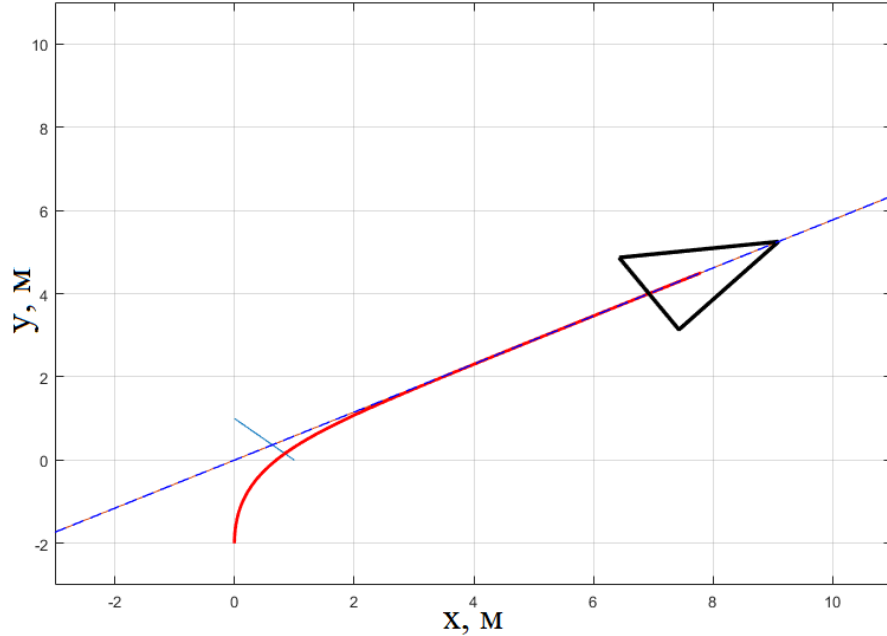


Рисунок 18 — Результаты моделирования движения объекта управления вдоль прямой линии.

$$\psi(q) = R \arctan \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

$$\Upsilon(q) = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} -(y - y_0) & (x - x_0) \\ -(x - x_0) & -(y - y_0) \end{bmatrix}.$$

Результаты моделирования движения вдоль окружности представлены на рисунках 20 и 21. Моделирование проводилось при следующих параметрах:  $x_0 = 4, y_0 = 4, R = 5$ , желаемая скорость  $v^* = 0.1$ , амплитуда возмущения  $\delta = 10$ , коэффициенты регулятора  $k_q = 10, k_1 = 0.1, k_2 = 10, k_3 = 0.2, k_4 = 5, k_{\text{gamma}} = 3, k_{\text{eta}} = 3$ .

Из представленных графиков видно, что синтезированные законы управления являются работоспособными и обеспечивают следование наперед заданной траектории с нулевым установившимся ортогональным отклонением при наличии неизмеряемого постоянного внешнего возмущения.

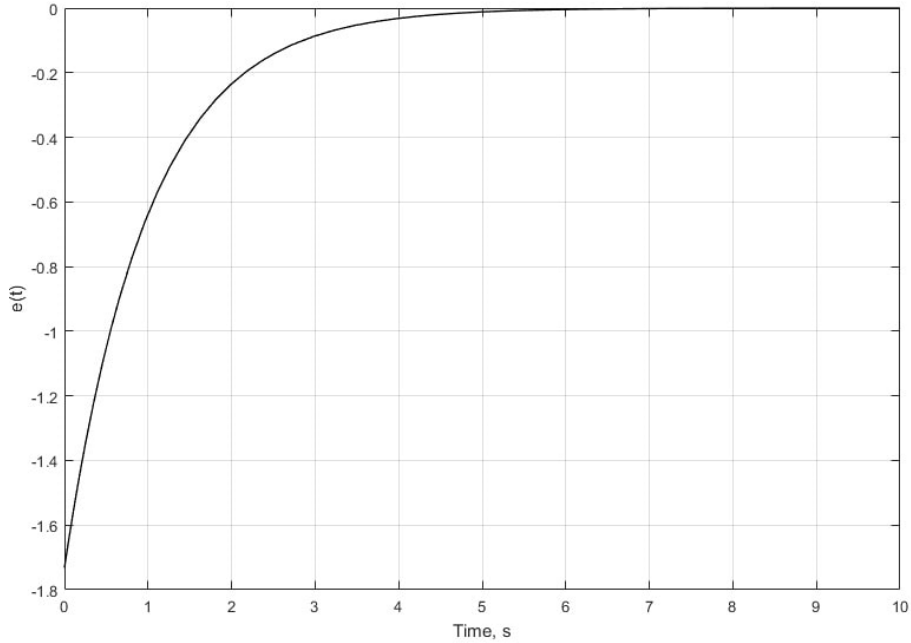


Рисунок 19 — Ортогональное отклонение при перемещении объекта управления вдоль прямой линии.

## 2.4 Выводы по главе

В данной главе был представлен метод синтеза алгоритмов траекторного управления возмущенным объектом управления, а также решена аналогичная задача в расширенной постановке, предполагающей недоступность для измерения производных выходной переменной (линейных скоростей). Синтезированные регуляторы построены на основе принципа стабилизации многообразий в пространстве выходов объекта управления, позволяющих обеспечить траектории движения свойство инвариантности, что позволяет добиться большей точности движения. Работоспособность синтезированных алгоритмов управления подтверждена результатами численного моделирования.



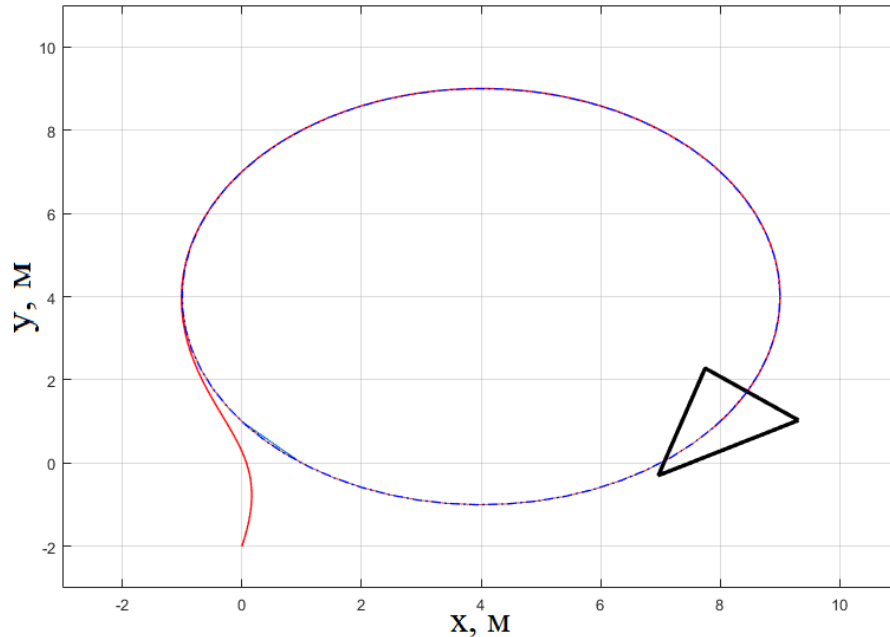


Рисунок 20 — Результаты моделирования движения объекта управления вдоль окружности.

### 3 Траекторное управление при наличии препятствий

Наличие на желаемой траектории движения мобильного робота стационарных препятствий требует временной смены траектории с целью избежания столкновения с препятствием [16]. Проблема избежания столкновения с препятствием — проблема планирования пути и может быть решена несколькими различными способами. Например, существуют стратегии «объезда» и «отъезда» предотвращения столкновений. В первом случае мобильный робот перемещается по новой (обычно — круговой) траектории вокруг препятствия, а после избежания столкновения возвращается к исходной желаемой траектории. Во втором случае мобильный робот перемещается вдоль новой траектории вокруг препятствия, как и раньше, но после устранения столкновения он не возвращается к исходной желаемой траектории, а движется по новой. Выбор конкретного метода зависит от постановки задачи управления траекторией для конкретного случая. Для решения проблемы, рассмотрен-

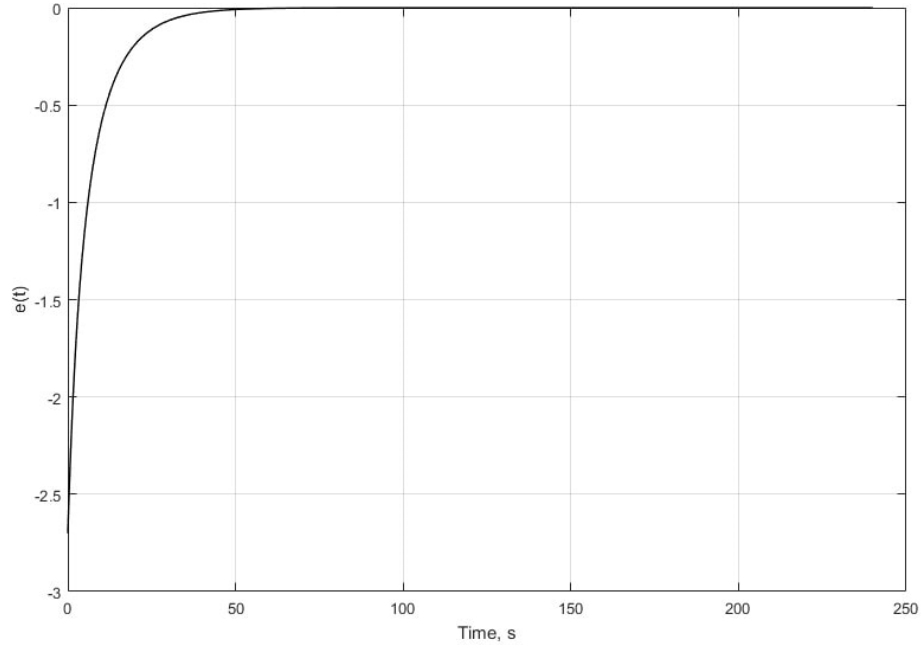


Рисунок 21 — Ортогональное отклонение при перемещении объекта управления вдоль окружности.

ной в настоящей работе, необходимо следовать точно заданной траектории, поэтому следует выбрать стратегию «объезд». Траектория объезда задается, как правило, в виде круговой границы некоторой окрестности препятствия.

### 3.1 Траекторное управление плоским движением при наличии внешнего подвижного объекта

Положения робота в абсолютной плоской декартовой системе координат  $XU \in R^2$  (см. рисунок 22) характеризуется парой  $(q, \alpha)$  или

$$q, T(\alpha),$$

где  $q = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T \in XU$  вектор декартовых координат центра масс робота  $C$ ,  $\alpha$  — скалярный угол ориентации робота,  $T$  ортогональная матрица перехода от абсолютной системы координат к связанной с роботом системе координат

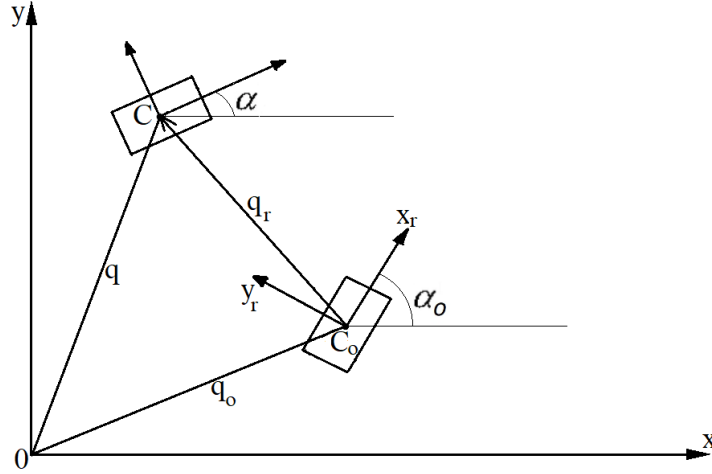


Рисунок 22 — Мобильный робот и внешний подвижный объект

с началом в центре масс робота, конструируемая в виде:

$$T(\alpha) = \begin{bmatrix} \tau_1^T(\alpha) \\ \tau_2^T(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \in SO(2)$$

Положение подвижного внешнего объекта (см. рисунок 22) в абсолютной системе координат описывается парой  $(q_o, \alpha^o)$  или

$$q_o, T(\alpha^o),$$

где  $q_o = [x_o \ y_o]^T \in XY$  вектор декартовых координат центра масс подвижного объекта  $C^o$ ,  $\alpha^o$  скалярный угол ориентации подвижного объекта,  $T_o \in SO(2)$  ортогональная матрица перехода от абсолютной системы координат к связанной с подвижным объектом системе координат с началом в центре масс подвижного объекта.

Динамика мобильного робота в абсолютной системе координат описывается выражениями

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = R^T(\alpha) \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

$$A \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = R^T(\alpha) \begin{bmatrix} F \\ M \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

где  $v \in R^2$  скорость робота в связанной системе координат,  $\omega \in R^1$  угловая скорость робота,

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} T(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix},$$

где  $m$  масса робота,  $J$  момент инерции робота,  $F \in R^2$  вектор управляющих сил,  $M \in R^1$  управляющий момент.

Описание внешнего подвижного объекта в абсолютной системе координат имеет вид

$$\dot{y}_o = v_o, \quad (3.3)$$

$$\dot{T}(\alpha_o) = \omega_o E T(\alpha_o), \quad (3.4)$$

где  $v_o$  и  $\omega_o$  мгновенные линейная и угловая скорости объекта управления в абсолютной системе координат,

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in SO(2).$$

Матричное выражение (3.4) может быть записано в явной форме

$$\dot{\alpha}_o = \omega_o. \quad (3.5)$$

Теперь определим относительное положение робота в подвижной системе координат с началом в центральной точке внешнего объекта  $C_0$ . Ее нетрудно определить, зная характеристики движения робота и внешнего объекта:

$$q_r = T(\alpha_o)(q - q_o), \quad (3.6)$$

$$T(\alpha_r) = T(\alpha)T^T(\alpha_o), \quad (3.7)$$

или, в явном виде

$$\alpha_r = \alpha - \alpha_o. \quad (3.8)$$

Дважды продифференцируем выражения (3.6) и (3.8):

$$\dot{q}_r = \omega_o E x + T(\alpha_o) (\dot{q} - \dot{q}_o), \quad (3.9)$$

$$\dot{\alpha}_r = \omega - \omega_o, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_r = & (\omega_o)^2 x + 2\omega_o E T(\alpha_o) (\dot{q} - \dot{q}_o) + \\ & + \frac{1}{m} T(\alpha_o) T^T(\alpha) F, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\ddot{\alpha}_r = \frac{1}{J} M. \quad (3.12)$$

Зададим желаемую траекторию движения робота в подвижной системе координат в неявном виде

$$\varphi(q_r) = 0, \quad (3.13)$$

Введем соответствующую локальную координату (длину траектории, см. рисунок 23) в виде

$$s = \psi(q_r), \quad (3.14)$$

где  $\varphi(q_r)$  и  $\psi(q_r)$  гладкие функции.

Воспользуемся ортогональным представлением кривых (см. [51]) для которого функции  $\varphi$  и  $\psi$  выбираются такие, что на кривой  $S$ , матрица Якоби

$$\Upsilon(q_r) = \begin{bmatrix} \partial\psi/\partial q_r \\ \partial\varphi/\partial q_r \end{bmatrix}$$

ортогональна. Тогда, обозначив  $\Upsilon^*(q_r) = \Upsilon(q_r) |_{q_r \in S}$ , можно записать

$$M^*(q_r) = T(\alpha_r^*) \in SO(2),$$

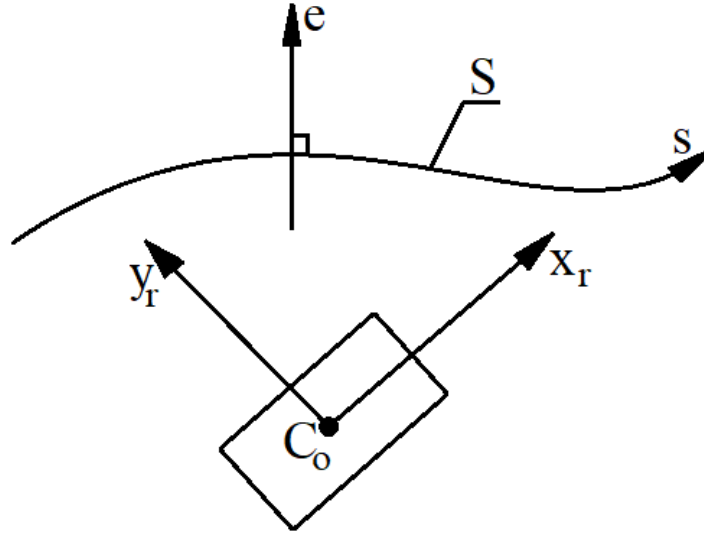


Рисунок 23 — Желаемая траектория  $S$  и задачно ориентированные координаты  $(s, e)$

где  $T(\alpha_r^*)$  поворотная матрица подвижного базиса (базиса Френе),  $\alpha_r^*$  зависящий от  $s$  угол, определяющий ориентацию базиса Френе в абсолютной системе координат.

Как показано в [12], такая матрица удовлетворяет известному уравнению Френе

$$\frac{dT(\alpha_r^*)}{ds} = S(\xi)T(\alpha_r^*) \quad (3.15)$$

где  $\xi = \xi(s)$  кривизна траектории. Принимая во внимание, что

$$\frac{dT(\alpha_r^*(s))}{dt} = \frac{dT(\alpha_r^*(s))}{ds} \frac{ds}{dt},$$

можно записать

$$\dot{T}(\alpha_r^*) = \dot{s}\xi(s)ET(\alpha_r^*). \quad (3.16)$$

Матричное выражение (3.16) может быть приведено к явной форме

$$\dot{\alpha}_r^* = \dot{s}\xi. \quad (3.17)$$

Теперь угловая ориентация робота относительно подвижной кривой  $S$  можно записать в виде

$$\alpha_r = \alpha_r^* + \Delta\alpha, \quad (3.18)$$

или в матричной форме:

$$T(\alpha_r) = T(\Delta\alpha)T(\alpha_r^*), \quad (3.19)$$

где  $\Delta\alpha$  вектор желаемого разворота относительно кривой,  $T(\Delta\alpha) \in SO(2)$ .

Будем рассматривать задачу траекторного управления движением робота относительно подвижного объекта как задачу поддержания голономных соотношений между выходами системы  $q$  и  $\alpha$  заданных в виде (3.13), (3.19) и (3.6), (3.8). Она дополняется описанием желаемого режима продольного движения робота, устанавливаемого, как правило, в виде желаемой скорости  $\dot{s}^*(t)$ .

Нарушение условия (14) определяется величиной ортогонального отклонения

$$e = \varphi(q_r). \quad (3.20)$$

Нарушение условия (3.18), определяется величиной угловой ошибки

$$\delta = \alpha_r - \alpha_r^* - \Delta\alpha \quad (3.21)$$

или

$$T(\delta) = T(\alpha_r)T^T(\alpha_r^*)T^T(\Delta\alpha). \quad (3.22)$$

Таким образом, задача траекторного управления состоит в нахождении (для замкнутой системы) таких входов  $F$  и  $M$  которые обеспечивают выполнение следующих подзадач:

1. стабилизация движения робота вдоль желаемой кривой  $S$ , что подразумевает обнуление величины ортогонального отклонения  $e$ ;
2. стабилизация желаемой ориентации робота относительно желаемой кривой, что подразумевает поддержание взаимной ориентации базисов  $T(\alpha_r)$  и  $T(\alpha_r^*)$ , или обнуление величины угловой ошибки  $\delta$ ;

3. поддержание желаемого режима продольного движения робота, основываясь на простейшей эталонной модели

$$\dot{s}^* = v_s^*. \quad (3.23)$$

Предлагаемая процедура синтеза законов управления траекторным движением включает в себя преобразование исходной модели к задачно ориентированным координатам  $(s, e)$  и  $\delta$ , введение в рассмотрение виртуальных (задачно ориентированных) управляющих воздействий  $u_s, u_e$  и  $u_\delta$  соответствующих подзадачам 1–3 и синтез локальных регуляторов, решающих соответствующие подзадачи.

Сначала получим необходимые скоростные соотношения. Для этого продифференцируем уравнения (3.14), (3.20), (3.22) по времени, учитывая (3.9)–(3.12), (3.1)–(3.5) и (3.16) и получим, что для достаточно малых величин ортогонального отклонения  $e$  выполняется

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = T(\alpha_r^*) (T^T(\alpha_r)v + \omega^o E q_r - T(\alpha_o)v_o), \quad (3.24)$$

и

$$\dot{\delta} = -\dot{s}\xi(s) + \omega - \omega_o. \quad (3.25)$$

Еще раз продифференцируем выражения (3.24) и (3.25) по времени:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{e} \end{bmatrix} &= (\dot{s}\xi(s) + 2\omega_o) E \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{bmatrix} + (\omega_o)^2 T(\alpha_r^*)x \\ &+ \frac{1}{m} T(\alpha_r^*) T^T(\alpha_r) F, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\ddot{\delta} = \frac{1}{J} M - \frac{\partial \xi}{\partial s} \dot{s} - \ddot{s}\xi(s). \quad (3.27)$$

Введем виртуальные (локальные) законы управления  $u_s, u_e$  и  $u_\delta$  в виде

$$\begin{bmatrix} u_s \\ u_e \end{bmatrix} = (\omega_o)^2 T(\alpha_r^*) q_r + \frac{1}{m} T(\alpha_r^*) T^T(\alpha_r) F, \quad (3.28)$$



$$u_\delta = \frac{1}{J}M \quad (3.29)$$

Теперь подставим (3.28) и (3.29) в выражения (3.26)–(3.27) и запишем полученные выражения в покоординатной форме:

$$\ddot{s} - \dot{s}\xi(s)\dot{e} - 2\omega_o\dot{e} = u_s, \quad (3.30)$$

$$\ddot{e} + \dot{s}^2\xi(s)\dot{e} + 2\omega_o\dot{s} = u_e, \quad (3.31)$$

$$\ddot{\delta} + \frac{\partial\xi}{\partial s}\dot{s} + \ddot{s}\xi(s) = u_\delta. \quad (3.32)$$

Выберем локальные законы управления в виде

$$u_s = K_s\Delta V - \dot{s}\xi(s)\dot{e} - 2\omega_o\dot{e}, \quad (3.33)$$

$$u_e = K_{e1}e + K_{e2}\dot{e} + \dot{s}^2\xi(s)\dot{e} + 2\omega_o\dot{s}, \quad (3.34)$$

$$u_\delta = K_{\delta1}\delta + K_{\delta2}\dot{\delta} + \frac{\partial\xi}{\partial s}\dot{s} + \ddot{s}\xi(s), \quad (3.35)$$

где  $K_s, K_{e1}, K_{e2}, K_{\delta1}$  и  $K_{\delta2}$  — положительные постоянные коэффициенты.

Наконец, найдем результирующие законы управления, перейдя к первоначальным координатам:

$$F = mT(\alpha_r)T^T(\alpha_r^*) \left( \begin{bmatrix} u_s \\ u_e \end{bmatrix} - (\omega_o)^2 T(\alpha_r^*)q_r \right), \quad (3.36)$$

$$M = Ju_\delta. \quad (3.37)$$

Для иллюстрации работы предложенных алгоритмов рассмотрим две различные задачи, которые можно решать с помощью представленных выше законов управления.

В качестве первого примера приведем моделирование задачи движения вдоль предписанной траектории относительно подвижного объекта (см. рисунок 24). Желаемая траектория движения мобильного робота задана в форме окружности  $S^*$ , описанной в неявном виде как

$$\varphi(q_r) = x_r^2 + y_r^2 - R^2 = 0,$$

где радиус окружности  $R = 3$ . Желаемая скорость мобильного робота  $v^* = 0.7(\text{м/с})$ . Подвижный объект, относительно которого задана предписанная траектория мобильного робота, движется по прямолинейной траектории  $S_o$ , описанной в неявном виде как

$$\varphi_o(q_o) = -\sin \alpha^* x_o + \cos \alpha^* y_o + \varphi_0 = 0,$$

где  $\alpha^* = 0$  и  $\varphi_0 = 0$ , со скоростью  $\dot{q}_o^* = 0.1(\text{м/с})$ .

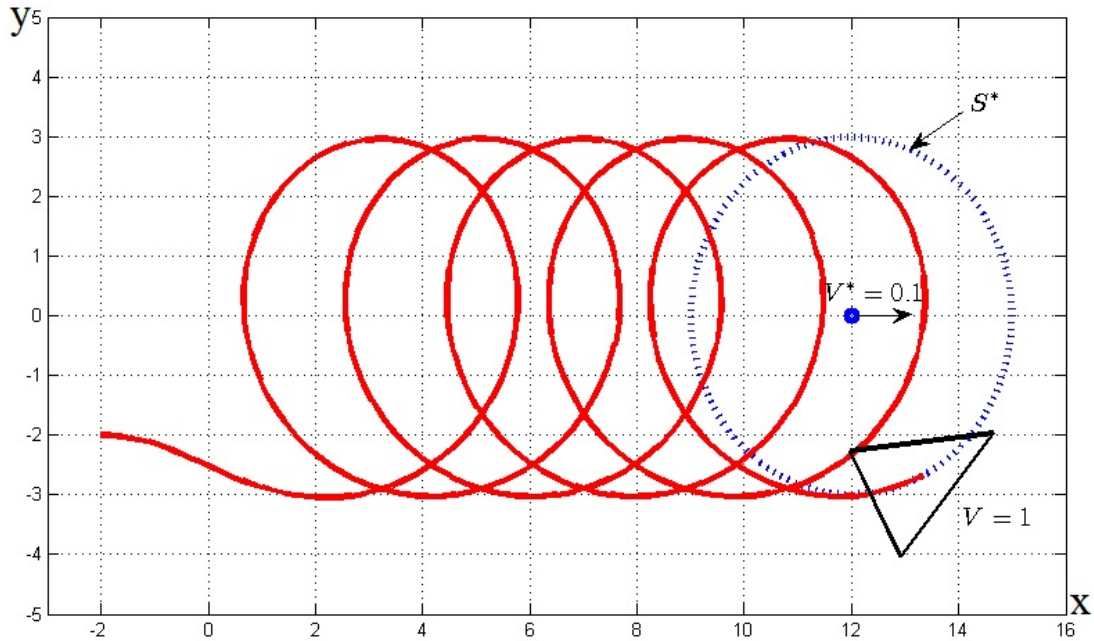


Рисунок 24 — Движение по круговой желаемой траектории, привязанной к внешнему подвижному объекту

Как видно из рисунка 24, мобильный робот точно следует заданному круговому пути, заданному в системе координат подвижного объекта.

В качестве второго примера приведем моделирование задачи избегания столкновения с подвижным препятствием при движении по заданной плоской траектории. Робот движется по желаемой траектории в виде прямой линии, заданной в неявном виде как

$$\varphi(q) = -\sin \alpha^* x + \cos \alpha^* y + \varphi_0 = 0, \quad (3.38)$$

где  $\alpha^* = \pi/3$  и  $\varphi_0 = 0$ . Желаемая скорость движения мобильного робота  $v^* = 1.5$  м/с. Подвижный внешний объект движется по прямолинейной траектории  $S_o$ , описанной в неявном виде как

$$\varphi_o(q_o) = -\sin \alpha^* x_o + \cos \alpha^* y_o + \varphi_0 = 0,$$

где  $\alpha^* = 0$  и  $\varphi_0 = 6$ , со скоростью  $\dot{q}_o^* = 0.1$  (м/с). По достижении мобильным роботом близкой окрестности внешнего подвижного объекта происходит переключение с желаемой траектории  $S$  на эквидистанту внешнего подвижного объекта  $S^*$  и мобильный робот следует по этой эквидистанте, которая задается в неявном виде как окружность

$$\varphi^*(q_r) = x_r^2 + y_r^2 - R^2 = 0, \quad (3.39)$$

где  $R = 3$  — радиус окружности с центром, совпадающим с центром масс внешнего подвижного объекта, образующей эквидистанту внешнего подвижного объекта. При повторном пересечении эквидистанты  $S^*$  с предписанной траекторией  $S$  мобильный робот возвращается на нее. Результаты моделирования описанной задачи представлены на рисунке 25.

На рисунке 25 черной пунктирной линией представлена желаемая траектория  $S$ , синей пунктирной линией — круговая граница окрестности внешнего подвижного объекта  $S^*$ , красной непрерывной линией — траектория движения объекта управления. Как видно из рисунка, разработанные алгоритмы успешно решают поставленную задачу движения мобильного робота вдоль желаемой траектории при наличии внешнего подвижного объекта.

## 3.2 Траекторное управление пространственным движением при наличии внешнего подвижного объекта

Рассмотрим теперь задачу траекторного управления движением в трехмерном пространстве [17] относительно внешнего подвижного объекта (см.

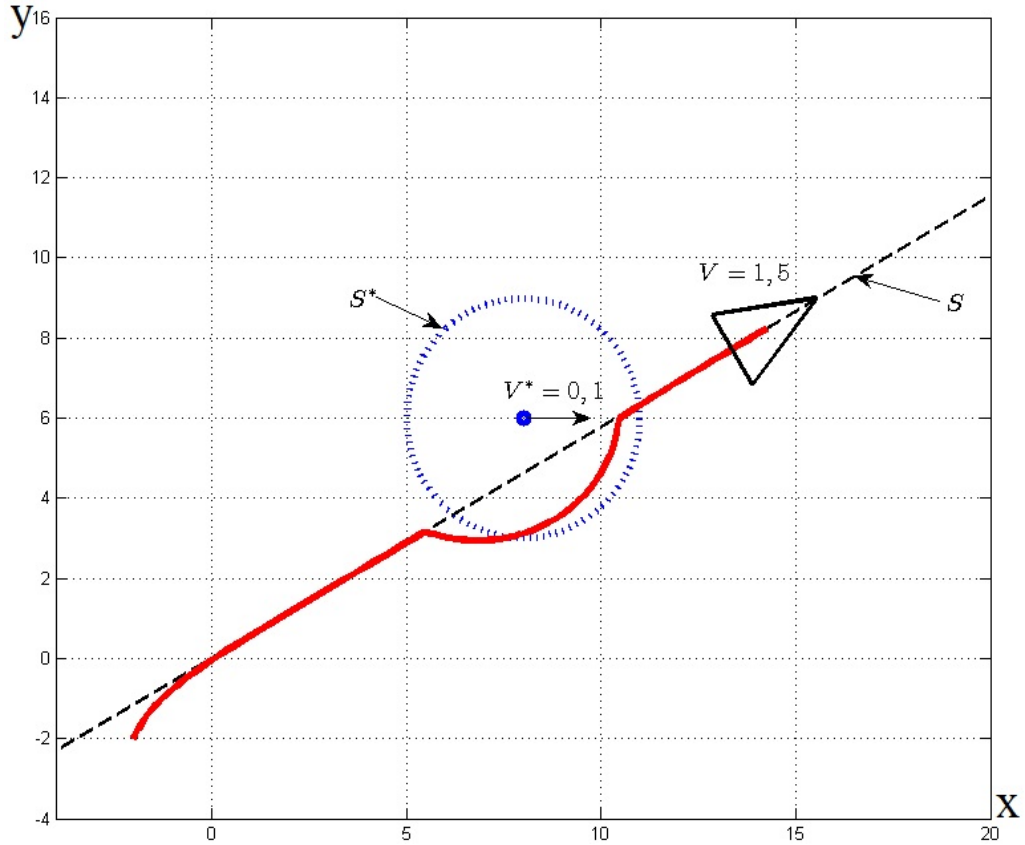


Рисунок 25 — Результаты моделирования движения мобильного робота вдоль желаемой траектории при наличии внешнего подвижного объекта.

рисунок 26)[37]. Рассмотрим модель движения неполноприводного объекта управления с однонаправленной тягой в пространстве:

$$\ddot{q} = g - \frac{f(t)}{m} \bar{n}(t), \quad (3.40)$$

$$\dot{R}(\alpha) = S(\omega(t))R(\alpha), \quad (3.41)$$

$$J\dot{\omega}(t) + \omega(t) \times J\omega(t) = M_c(t), \quad (3.42)$$

где  $q \in \mathbb{R}^3$  — вектор декартовых координат центра масс  $C$  в абсолютной инерциальной системе координат  $XYZ$ ,  $g \in \mathbb{R}_3$  — вектор ускорения свободного падения,  $m$  — масса объекта управления,  $f(t)$  — амплитуда управляющих сил,  $\bar{n}$  — вектор однонаправленного момента в абсолютной системе координат,  $R(\alpha) \in SO(3)$  — поворотная матрица от связанной с телом к абсолютной

системе координат,  $J$  — момент инерции объекта управления,  $\omega \in \mathbb{R}^3$  — вектор угловых скоростей в связанной системе координат,  $M_c \in \mathbb{R}^3$  — вектор управляющих моментов в связанной системе координат,  $S(\omega) \in SO(3)$  — кососимметрическая матрица вида

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

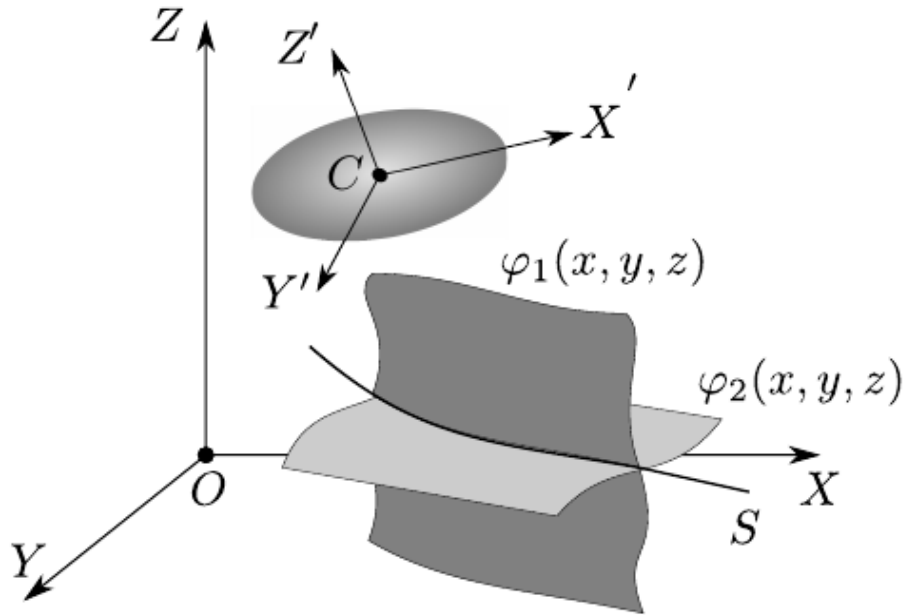


Рисунок 26 — Мобильный робот, внешний подвижный объект и желаемая траектория в трехмерном пространстве.

Желаемая траектория представлена сегментом гладкой кривой  $S$  (см. рисунок 26), описываемой как пересечение двух неявно заданных поверхностей:

$$\varphi_1(q) = 0 \cap \varphi_2(q) = 0, \quad (3.43)$$

где  $\varphi_1(q)$  и  $\varphi_2(q)$  — гладкие функции.

Тангенциальная скорость вдоль желаемой кривой определяется выражением

$$\dot{s} = (\nabla\varphi_1 \times \nabla\varphi_2)^T \dot{q}, \quad (3.44)$$

где  $\times$  – векторное произведение,  $\nabla f \in \mathbb{R}^3$  – градиент функции  $f$ , чьими компонентами являются частные производные функции  $f$ .

Стоит отметить, что описание кривой как гладкого геометрического объекта не единственно и выбор функций (3.43) неоднозначен. При выборе функций  $\varphi_1(q)$  и  $\varphi_2(q)$  будем руководствоваться условием регулярности [35], подразумевающим, что матрица Якоби вида

$$\Upsilon(q) = \begin{bmatrix} \nabla\varphi_1 \times \nabla\varphi_2 \\ \nabla\varphi_1 \\ \nabla\varphi_2 \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

невырождена для любого вектора  $q \in S$ , т. е.  $\det \Upsilon(q) \neq 0$ .

Задачу траекторного управления будем ставить как задачу поддержания голономных отношений между выходами системы, заданными в (3.43). Это дополняется описанием желаемого продольного движения точки центра масс объекта управления вдоль желаемой траектории  $S$ , обычно заданным с помощью скорости продольного движения  $\dot{s}^*$ .

Введем в рассмотрение ортогональные отклонения, вызываемые нарушением условия (3.43)

$$e_1 = \varphi_1(q), \quad (3.46)$$

$$e_2 = \varphi_2(q), \quad (3.47)$$

которые обнуляются на множестве  $S$ .

Следовательно, задача траекторного управления твердым телом относительно подвижного объекта состоит в нахождении управляющих воздействий, которые обеспечивают выполнение двух подзадач:

а) Геометрической подзадачи, а именно стабилизацию движения робота относительно кривой  $S$ , что предполагает асимптотическое обнуление векторов пространственных отклонений  $e_1$  и  $e_2$ ;

б) Кинематической подзадачи, а именно асимптотическое обнуление ошибки скорости  $\Delta s = \dot{s}^* - \dot{s}$ .

Введем теперь описание динамики движения внешнего подвижного объекта:

$$\ddot{q}_o = 0, \quad (3.48)$$

$$\dot{q}_o = R_o v_o, \quad (3.49)$$

$$\dot{\omega}_o = 0, \quad (3.50)$$

$$\dot{R}_o = R_o S(\omega_o), \quad (3.51)$$

где  $q_o$  – вектор координат центра внешнего подвижного объекта в инерциальной системе отсчета,  $v_o \in \mathbb{R}^3$  и  $\omega_o \in \mathbb{R}^3$  – векторы соответственно линейных и угловых скоростей внешнего подвижного объекта,  $R_o \in SO(3)$  – поворотная матрица от движущейся к абсолютной системе координат,  $S(\omega_o)$  – кососимметричная матрица.

Теперь определим положение, скорость и ускорение объекта управления в подвижной системе координат как

$$q_r = R_T^T(q - q_o), \quad (3.52)$$

$$\dot{q}_r = R_T^T(\dot{q} - \dot{q}_o) - S(\omega_o)q_r, \quad (3.53)$$

$$\ddot{q}_r = R_T^T\ddot{q} - 2S(\omega_o)\dot{q}_r - S^2(\omega_o)q_r. \quad (3.54)$$

Желаемую траекторию в подвижной системе координат будем задавать в виде

$$S : e_1(q_r) = \varphi_1(q_r) = 0 \cap e_2(q_r) = \varphi_2(q_r) = 0. \quad (3.55)$$

Практический пример подобной задачи представлен на рисунке 27. Объект управления в данном примере является БПЛА и сопровождает наземную

цель. В этом случае можно определить первую поверхность  $\varphi_1(q_r) = 0$  как плоскую траекторию вокруг цели. Вторая поверхность  $\varphi_2(q_r) = 0$  тогда будет представлять собой плоскость, параллельную земле.

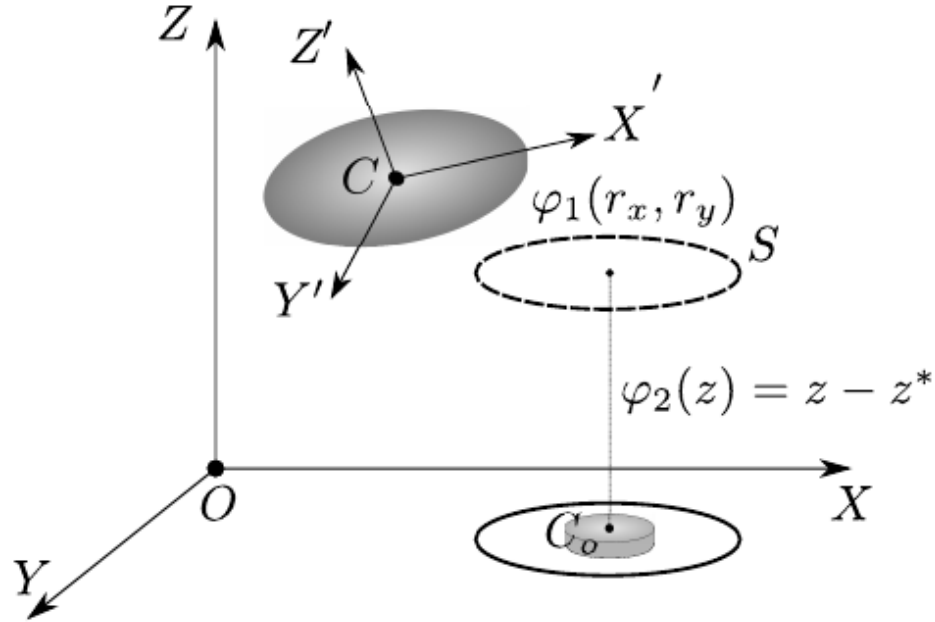


Рисунок 27 — Задача следования подвижной желаемой траектории.

Для синтеза законов управления вновь воспользуемся примененным ранее двухшаговым методом. На первом шаге сформируем внутренний контур по скоростям. Для управления угловой скоростью используем закон управления, выведенный в [13]:

$$M_c = \omega \times J\omega + J\dot{\omega}_d + k_\omega J(\omega - \omega_d), \quad (3.56)$$

где  $\omega_d \in \mathbb{R}^3$  – вектор желаемых угловых скоростей и  $k_\omega$  – положительная константа. Будем рассматривать  $\omega_d$  как новый управляющий вход и переписать выражение (3.42) в редуцированной форме:

$$\omega = \omega_d. \quad (3.57)$$

Рассмотрим функцию Ляпунова  $V_r$ , чтобы синтезировать внутренний управ-



ляющий контур для желаемых линейных скоростей:

$$V_r = \frac{1}{2}(\dot{q}_r - \bar{v})^T(\dot{q}_r - \bar{v}) + k_d \ln(2 - (R^T \bar{n})^T (R^T R_o \bar{n}_d)) \quad (3.58)$$

где  $\bar{v}$  – вектор желаемых скоростей,  $\bar{n}_d$  – вектор желаемой ориентации однонаправленного момента в движущейся системе координат,  $k_d$  – положительная константа. Найдем производную функции Ляпунова по времени:

$$\begin{aligned} \dot{V}_r &= (\dot{q}_r - \bar{v})^T (\ddot{q}_r - \dot{\bar{v}}) + \frac{k_d (R^T \bar{n})^T S^T (R^T R_o \bar{n}_d)}{2 - (R^T \bar{n})^T (R^T R_o \bar{n}_d)} (\omega - \omega_o) - \\ &\quad - \frac{k_d (R^T \bar{n})^T S^T (R^T R_o \bar{n}_d) S (R^T R_o \bar{n}_d)}{2 - (R^T \bar{n})^T (R^T R_o \bar{n}_d)} \frac{R^T R_o \dot{\bar{n}}_d}{|\bar{n}_d|} = \\ &= (\dot{q}_r - \bar{v})^T (R_o^T \ddot{q} - 2S(\omega_o) \dot{q}_r - S^2(\omega_o) q_r - \dot{u}) + \\ &\quad \gamma^T \left( \omega - \omega_o - \frac{S(R^T R_o \bar{n}_d)}{|\bar{n}_d|} \right) R^T R_o \dot{\bar{n}}_d = \\ &= (\dot{q}_r - \bar{v})^T (R_o^T g - \frac{f}{m} R_o^T \bar{n} - 2S(\omega_o) \dot{q}_r - S^2(\omega_o) q_r - \dot{u}) + \\ &\quad + \gamma^T \left( \omega - \omega_o - \frac{S(R^T R_o \bar{n}_d) R^T R_o \dot{\bar{n}}_d}{|\bar{n}_d|} \right), \end{aligned}$$

где  $\gamma^T = \frac{k_d (R^T \bar{n})^T S^T (R^T R_o \bar{n}_d)}{2 - (R^T \bar{n})^T (R^T R_o \bar{n}_d)}$  и  $|a|$  – евклидова норма вектора  $a$ . Теперь введем замену переменных вида

$$R_o^T g - 2S(\omega_o) \dot{q}_r - S^2(\omega_o) q_r - \dot{v} = \delta,$$

$$\delta = \frac{f_d}{m} \bar{n}_d,$$

где  $f_d = |\delta|$  и  $\bar{n}_d = \frac{\delta}{|\delta|}$ . Теперь, используя векторное равенство

$$a = S(b)S(a)b + (b^T a)b,$$

можно получить

$$\begin{aligned}
\dot{V}_r &= (\dot{q}_r - \bar{v})^T \left( \frac{f_d}{m} \bar{n}_d - \frac{f}{m} R_o^T \bar{n} \right) + \gamma^T \left( \omega - \omega_o - \frac{S(R^T R_o \bar{n}_d)}{|\bar{n}_d|} R^T R_o \dot{\bar{n}}_d \right) = \\
&= (\dot{q}_r - \bar{v})^T \left( \frac{f_d}{m} S(R_o^T \bar{n}) S(\bar{n}_d) R_o^T \bar{n} \right) + \frac{f_d}{m} \left( (R_o^T \bar{n})^T \bar{n}_d R_o^T \bar{n} - \frac{f}{m} R_o^T \bar{n} \right) + \\
&+ \gamma^T \left( \omega - \omega_o - \frac{S(R^T R_o \bar{n}_d)}{|\bar{n}_d|} R^T R_o \dot{\bar{n}}_d \right) = (\dot{q}_r - \bar{v})^T \left( \frac{f_d}{m} S(R_o^T \bar{n}) S(\bar{n}_d) R_o^T \bar{n} \right) + \\
&+ \frac{1}{m} (\dot{q}_r - \bar{v})^T (f_d ((R_o^T \bar{n})^T \bar{n}_d) - f) R_o^T \bar{n} + \gamma^T \left( \omega - \omega_o - \frac{S(R^T R_o \bar{n}_d)}{|\bar{n}_d|} R^T R_o \dot{\bar{n}}_d \right) = \\
&= \frac{f_d}{m} (\dot{q}_r - \bar{v})^T S(R_o^T \bar{n}) R_o^T R S(R^T R_o \bar{n}_d) R_o^T \bar{n} + \\
&+ \frac{1}{m} (\dot{q}_r - \bar{v})^T (f_d ((R_o^T \bar{n})^T \bar{n}_d) - f) R_o^T \bar{n} + \gamma^T \left( \omega - \omega_o - \frac{S(R^T R_o \bar{n}_d)}{|\bar{n}_d|} R^T R_o \dot{\bar{n}}_d \right) = \\
&= \frac{f_d (2 - (R^T \bar{n})^T (R^T R_o \bar{n}_d))}{m k_d} (\dot{q}_r - \bar{v})^T S(R_o^T \bar{n}) R_o^T \gamma + \\
&+ \frac{1}{m} (\dot{q}_r - \bar{v})^T (f_d ((R_o^T \bar{n})^T \bar{n}_d) - f) R_o^T \bar{n} + \gamma^T \left( \omega - \omega_o - \frac{S(R^T R_o \bar{n}_d)}{|\bar{n}_d|} R^T R_o \dot{\bar{n}}_d \right).
\end{aligned}$$

Выберем управляющие воздействия  $f$  и  $\omega = \omega_d$  в виде

$$f = f_d \cdot ((R_o^T \bar{n})^T \bar{n}_d) - k_v (\dot{q}_r - \bar{v}^T R_o^T \bar{n}), \quad (3.59)$$

$$\omega_d = \omega_o + \frac{S(R^T R_o \bar{n}_d)}{|\bar{n}_d|} R^T R_o \dot{\bar{n}}_d + \sigma - k_\gamma \gamma, \quad (3.60)$$

где  $k_v, k_\gamma$  — положительные константы, а  $\sigma$  имеет вид

$$\sigma = \frac{f_d (2 - (R^T \bar{n})^T (R^T R_o \bar{n}_d))}{m k_d} (\dot{q}_r - \bar{v})^T S(R_o^T \bar{n}) R_o^T R.$$

Тогда производная функции Ляпунова примет вид

$$\dot{V}_r = -k_v ((\dot{q}_r - \bar{v})^T R_o^T \bar{n})^2 - k_\gamma \gamma^T \gamma \leq 0. \quad (3.61)$$

Обеспечив, что  $|\delta| \neq 0$ ,  $S(R^T R_o \bar{n}_d) R^T \bar{n} \neq 0$  и используя идею, представленную в [42] можно доказать асимптотическую устойчивость точки  $\dot{q}_r - \bar{v} =$

$0, \bar{n} - \bar{n}_d = 0$ . Теперь можно переписать исходную систему (3.40) в редуцированной форме:

$$\dot{q} = \bar{v}. \quad (3.62)$$

Далее необходимо замкнуть внешний контур для решения траекторной задачи. Будем строить управление  $\bar{v}$  в виде

$$\bar{v} = u_e + u_s, \quad (3.63)$$

где  $u_e$  – компонент, обеспечивающий обнуление ортогональных отклонений, а  $u_s$  обеспечивает желаемую скорость вдоль траектории. Введем преобразование координат, используя матрицу Якоби (3.45):

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \Upsilon(q_r) \dot{q}_r. \quad (3.64)$$

Очевидно, что управление  $u_s$  можно выбрать в виде

$$u_s = \Upsilon^{-1}(q_r) \begin{bmatrix} s^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

Чтобы получить  $u_e$ , рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V_e = \frac{1}{2}e_1(q_r) + \frac{1}{2}e_2(q_r) = \frac{1}{2}\varphi_1(q_r) + \frac{1}{2}\varphi_2(q_r). \quad (3.66)$$

Производная функции (3.66) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &= (\varphi_1(q_r)\nabla\varphi_1(q_r) + \varphi_2(q_r)\nabla\varphi_2(q_r))\bar{v} = \\ &= (\varphi_1(q_r)\nabla\varphi_1(q_r) + \varphi_2(q_r)\nabla\varphi_2(q_r))^T u_s + (\varphi_1(q_r)\nabla\varphi_1(q_r) + \varphi_2(q_r)\nabla\varphi_2(q_r))^T u_e = \\ &= (\varphi_1(q_r)\nabla\varphi_1(q_r) + \varphi_2(q_r)\nabla\varphi_2(q_r))^T u_e. \end{aligned}$$

Как можно увидеть, компонент, связанный с  $u_s$  был исключен ввиду ортогональности. Теперь выберем  $u_s$  в виде

$$u_e = k_{e1}\varphi_1(q_r)\nabla\varphi_1(q_r) + k_{e2}\varphi_2(q_r)\nabla\varphi_2(q_r), \quad (3.67)$$

где  $k_{e1}, k_{e2}$  – положительные константы. Тогда производная примет вид

$$\dot{V}_e = -u_e^T u_e \leq 0,$$

то есть точка  $e_1(q_r) = 0, e_2(q_r) = 0$  обладает свойством асимптотической устойчивости.

Рассмотрим численный пример решения задачи реализации пространственного движения вдоль наперед заданной траектории относительно внешнего подвижного объекта. Представим желаемую траекторию  $S$  в виде пересечения цилиндра и плоскости:

$$\varphi_1 = x_r^2 + y_r^2 - 400 = 0 \cap \varphi_2 = z_r + y_r - 10 = 0.$$

Вид этой кривой представлен на рисунке 28. Предположим, что параметры объекта управления равны  $m = 1$  и  $J = I_{3 \times 3}$  – единичная матрица. Начальное положение центра масс объекта управления  $q_0 = [1, 1, 1]^T$  и начальная ориентация имеет вид

$$R(0) = \begin{bmatrix} 0.936293 & -0.275096 & 0.218351 \\ 0.289629 & 0.956425 & -0.036957 \\ -0.198669 & 0.0978434 & 0.97517 \end{bmatrix}.$$

Начальное положение внешнего подвижного объекта  $q_o0 = [0, 0, 0]^T$  и начальная ориентация

$$R_o(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вектор начальных скоростей внешнего подвижного объекта имеет вид  $v_o = [0.1, 0, 0.1]^T$ , а угловые скорости равны нулю. Параметры регулятора:  $k_e1 =$

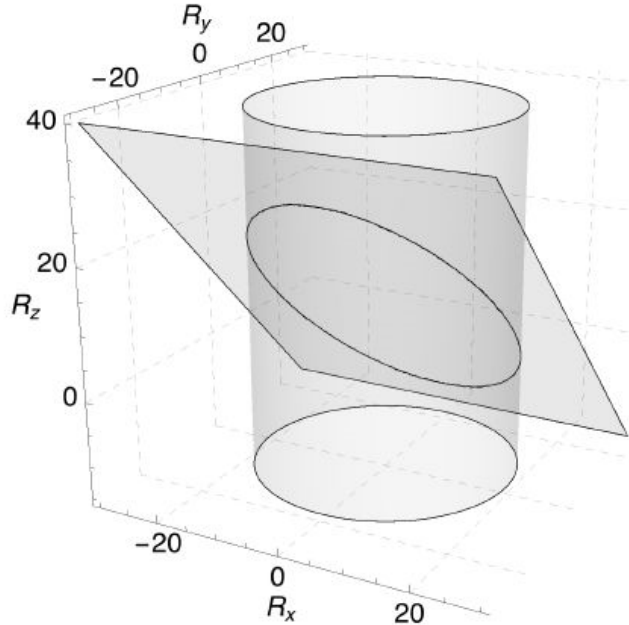


Рисунок 28 — Желаемая траектория как пересечение поверхностей

$$\varphi_1 = x_r^2 + y_r^2 - 400 = 0 \cap \varphi_2 = z_r + y_r - 10 = 0.$$

$0.1, k_e = 1, k_d = 10, k_\gamma = 1, k_v = 2, k_\omega = 50$ . Желаемая скорость вдоль заданной траектории  $\dot{s}^* = 30$ .

Результаты моделирования представлены на рисунках 29–31.

Рисунки 29–31 демонстрируют траекторию движения объекта управления в движущейся (связанной с подвижным объектом) и неподвижной системах координат. Как видно из полученных графиков, задача движения по круговой траектории, заданной в подвижной системе координат (иными словами, задача движения относительно подвижного объекта) решена успешно, ортогональные отклонения сходятся к нулю за короткие промежутки времени, что говорит об эффективности синтезированных законов управления.

### 3.3 Выводы по главе

В данной главе была решена задача синтеза алгоритмов траекторного управления движением на плоскости и в трехмерном пространстве при наличии внешних подвижных объектов. Синтез регуляторов основывается на

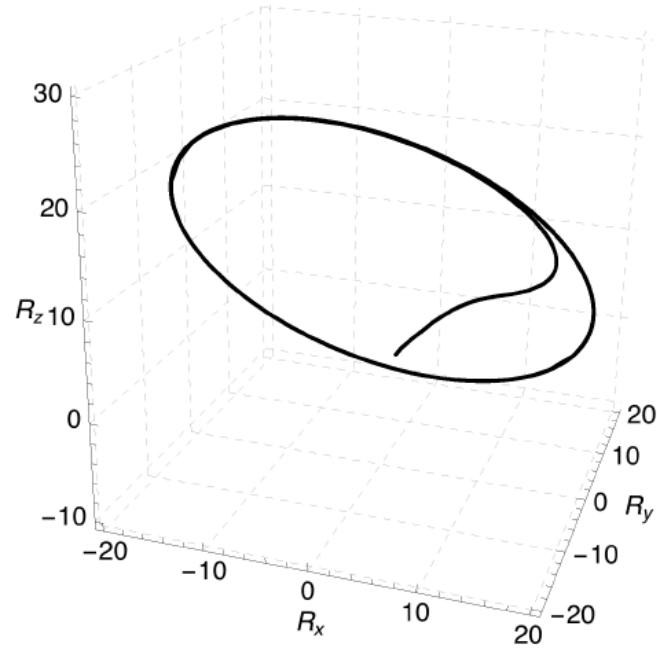


Рисунок 29 — Движение объекта управления в движущейся системе координат.

принципе стабилизации многообразий в пространстве выходов объекта управления, что позволяет обеспечить инвариантность желаемой траектории. Представлены и решены два вида задач, связанных с присутствием внешнего подвижного объекта: задача избежания столкновения с движущимся препятствием и задача следованию желаемой траектории, привязанной к подвижному объекту. Работоспособность синтезированных алгоритмов управления подтверждена результатами численного моделирования.

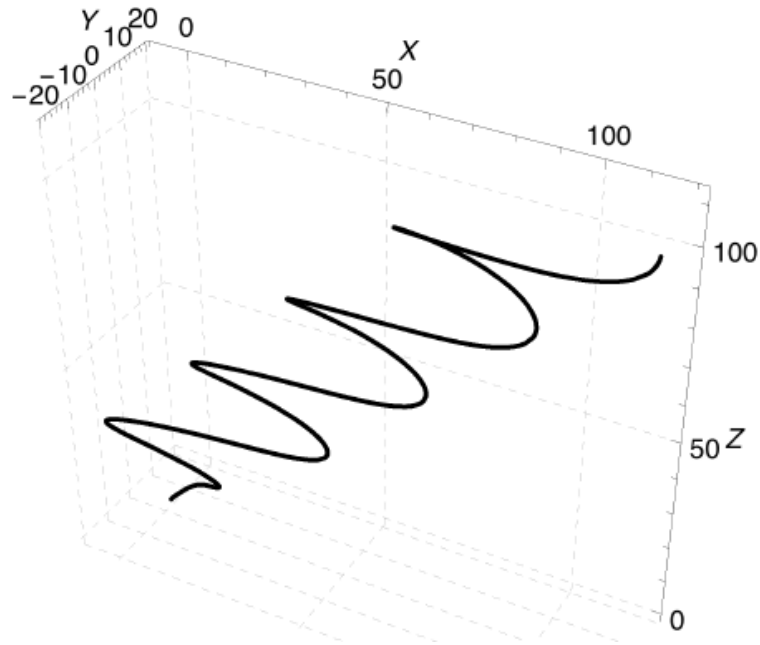


Рисунок 30 — Движение объекта управления в абсолютной системе координат.

## 4 Эксперименты

Ранее в работе были рассмотрены методы синтеза законов траекторного управления для мобильных робототехнических систем. В настоящей главе будут представлены результаты экспериментальной апробации предложенных алгоритмов на базе мобильного робота «Robotino» производства компании «Festo Didactics» [14, 36].

### 4.1 Техническое описание мобильного робота «Robotino»

В ходе работы над диссертацией была реализована система траекторного управления мобильного робота «Robotino» (см. рисунок 32), разработанного немецкой компанией «Festo Didactics». Данный мобильный робот, оснащенный набором из трех роликонесущих (шведских) колес (см. рисунок 33) с независимыми приводами, расположенных равномерно на платформе в виде окружности (см. рисунок 34), относится к типу (3,0), то есть обладает пол-

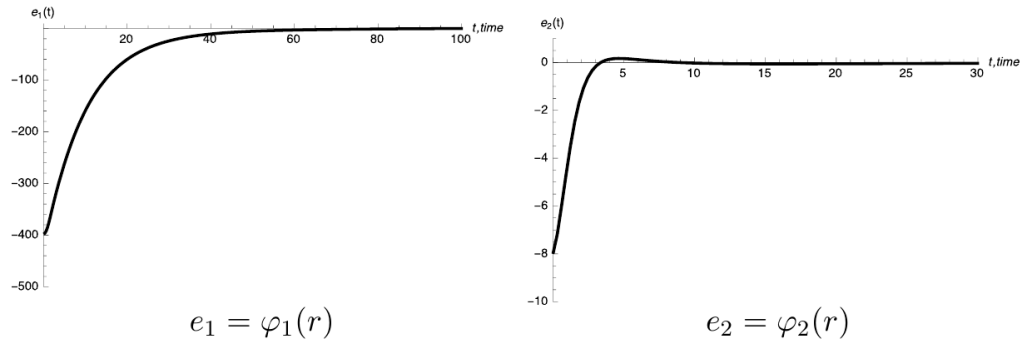


Рисунок 31 — Пространственные отклонения  $e_1 = \varphi_1(q_r)$  и  $e_2 = \varphi_2(q_r)$ .



Рисунок 32 — Мобильный робот «Robotino» фирмы «Festo Didactics».

ной мобильностью и является удобным средством проверки эффективности алгоритмов траекторного управления.

Мобильный робот «Robotino» производства компании «Festo Didactics» предоставляет два способа обеспечения обратной связи по положению, необходимой для реализации разработанных алгоритмов траекторного управления. Первый способ подразумевает получение данных одометрии, откуда можно считывать текущие значения координат, ориентации, линейных и угловой скоростей мобильного робота. Кроме того, в комплекте с роботом поставляется система локальной навигации «NorthStar» (см. рисунок 35). Для начала





Рисунок 33 — Роликонесущее (шведское) колесо.

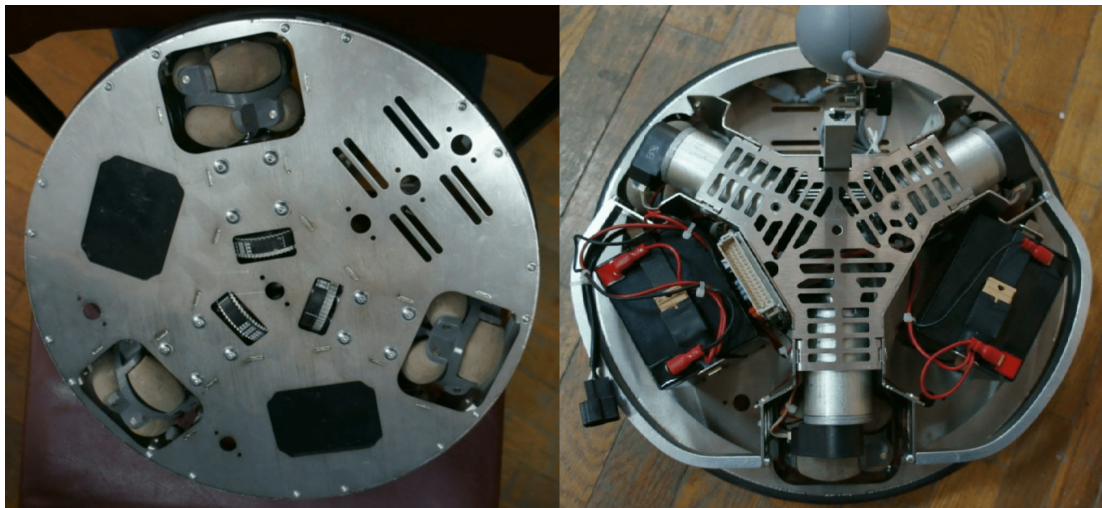


Рисунок 34 — Омнидирекционная платформа. Виды снизу (слева) и сверху (справа).

детальнее рассмотрим конструкцию робота.

Аппаратное обеспечение мобильного робота «Robotino» производства компании «Festo Didactics» состоит из следующих элементов:

1. Система питания — два свинцовых аккумулятора, обеспечивающих автономное питание.
2. Платформа с тремя двигателями постоянного тока с встроенным редуктором и ременной передачей на роликонесущие колеса.
3. Датчики углов поворота (оптические энкодеры), измеряющие угол по-

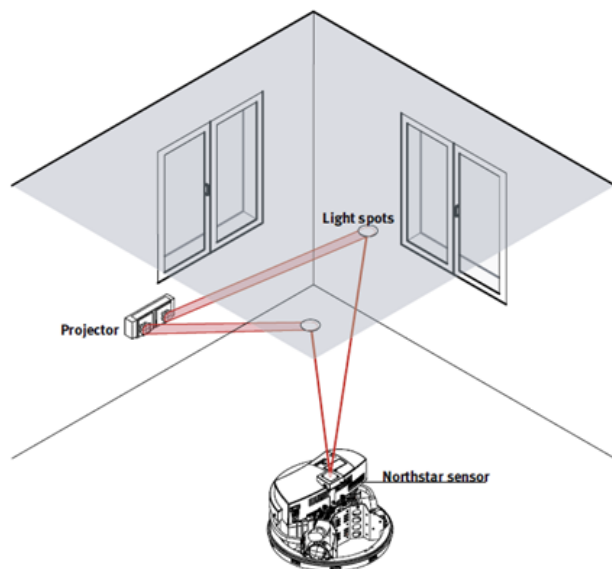


Рисунок 35 — Система локальной навигации «NorthStar».

ворота осей двигателя.

4. Беспроводная точка доступа для связи робота с компьютером и другими роботами.

5. Управляющее вычислительное устройство на базе процессора с AMD Geode.

Геометрические характеристики мобильного робота:

- Диаметр: 370 мм;
- Высота: 210 мм;
- Вес: 11 кг.

Характеристики электроприводов колес (см. рисунок 36):

- Номинальная скорость 3600 об.мин;
- Крутящий момент 3.8 Нсм;
- Диаметр колеса 80 мм;
- Передаточное отношение 16:1;

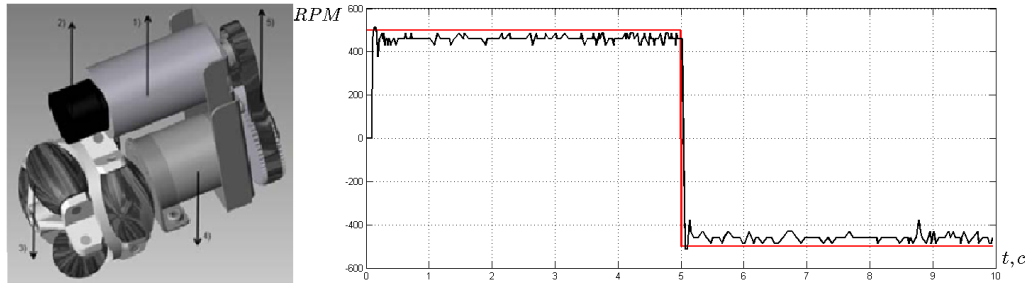


Рисунок 36 — Внешний вид и выходная характеристика электроприводов колес.

- Разрешение энкодера 2048 дел/об.

Программное обеспечение мобильного робота состоит из двух частей. К первой части относится внутреннее программное обеспечение на базе операционной системы Linux Ubuntu с расширением для работы в реальном времени RTAI. Ко второй части относится клиентское программное обеспечение, которое может быть запущено локально на роботе или удаленно, посредством беспроводной сети Wi-Fi, с компьютера разработчика. В описываемых экспериментальных исследованиях связь с роботом осуществляется при помощи набора плагинов, реализованных в операционной системе ROS (Robot Operating System) Lunar на базе Linux Ubuntu. Обработка полученных экспериментальных данных реализована в среде Matlab.

## 4.2 Математическая модель мобильного робота «Robotino»

Математическую модель мобильного робота будем рассматривать в виде (2.1)–(2.4). Так как данный мобильный робот относится к типу (3,0) и колеса расположены равномерно, справедливо следующее соотношение для скоро-

стей колес:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \frac{n}{R} \begin{bmatrix} -\sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} & L \\ 0 & -1 & L \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

где  $n$  — передаточное отношение,  $R$  — радиус колеса,  $L$  — расстояние от центра масс мобильного робота  $C$  до колеса.

Управляющее воздействие было сформировано в следующем виде:

$$\bar{v} = u_e + u_s,$$

$$u_s = R_O^I(\alpha) \Upsilon^{-1}(q) \begin{bmatrix} V^* \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$u_s = \frac{V^*}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi(q)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi(q)}{\partial y}\right)^2}} \begin{bmatrix} \cos \alpha \frac{\partial \varphi(q)}{\partial y} - \sin \alpha \frac{\partial \varphi(q)}{\partial x} \\ -\sin \alpha \frac{\partial \varphi(q)}{\partial y} - \cos \alpha \frac{\partial \varphi(q)}{\partial x} \end{bmatrix},$$

$$u_e = -k_e \varphi(q) \frac{\partial}{\partial q} \varphi(q),$$

Вообще говоря, предложенная ранее процедура синтеза предполагает двухшаговый алгоритм синтеза управляющих воздействий, но, в данном случае, внутренний контур по скорости уже замкнут встроенными в каждый привод ПИД-регуляторами, так что остается только рассчитать и подать управляющие сигналы, решающие кинематическую и геометрическую подзадачи. Далее рассмотрим реализации различных задач.

### 4.3 Реализация движения вдоль геометрических примитивов

Для реализации движения вдоль прямой линии выбрано геометрическое описание в виде нормальной формы:

$$\varphi(q) = -\sin \alpha^* x + \cos \alpha^* y + \varphi_0 = 0,$$

где  $\alpha^*$  — заданный угол наклона прямой,  $\varphi_0$  — заданное ортогональное смещение. В данном эксперименте были выбраны следующие параметры:  $\alpha^* = 0$ ,  $\varphi_0 = 0$ , желаемая скорость  $v^* = 300\text{мм/с}$ , амплитуда возмущения  $\delta = 10$ , коэффициенты регулятора  $k_q = 10, k_1 = 0.1, k_2 = 10, k_3 = 0.2, k_4 = 5, k_{\text{gamma}} = 3, k_{\text{eta}} = 3, k_e = 3$ .

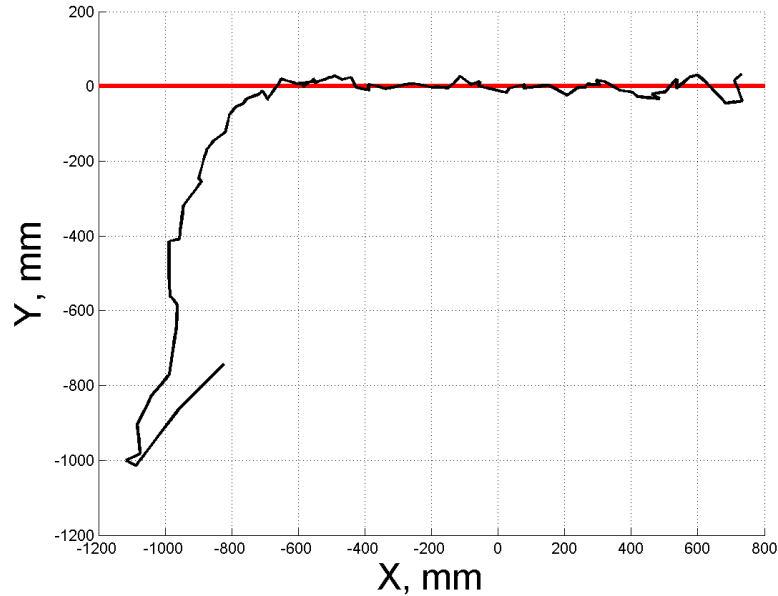


Рисунок 37 — Результаты моделирования движения объекта управления вдоль прямой линии.

Для реализации движения вдоль окружности выбрано геометрическое описание в виде нормальной формы:

$$\varphi(q) = \frac{1}{2R}(R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2) = 0.$$

В данном эксперименте были выбраны следующие параметры:  $x_0 = 4, y_0 = 4, R = 5$ , желаемая скорость  $v^* = 0.1$ , амплитуда возмущения  $\delta = 10$ , коэффициенты регулятора  $k_q = 10, k_1 = 0.1, k_2 = 10, k_3 = 0.2, k_4 = 5, k_{\text{gamma}} = 3, k_{\text{eta}} = 3, k_e = 3$ .

Как можно увидеть из полученных графиков, задача следования заданной траектории при воздействии неизмеряемого возмущения выполняется,

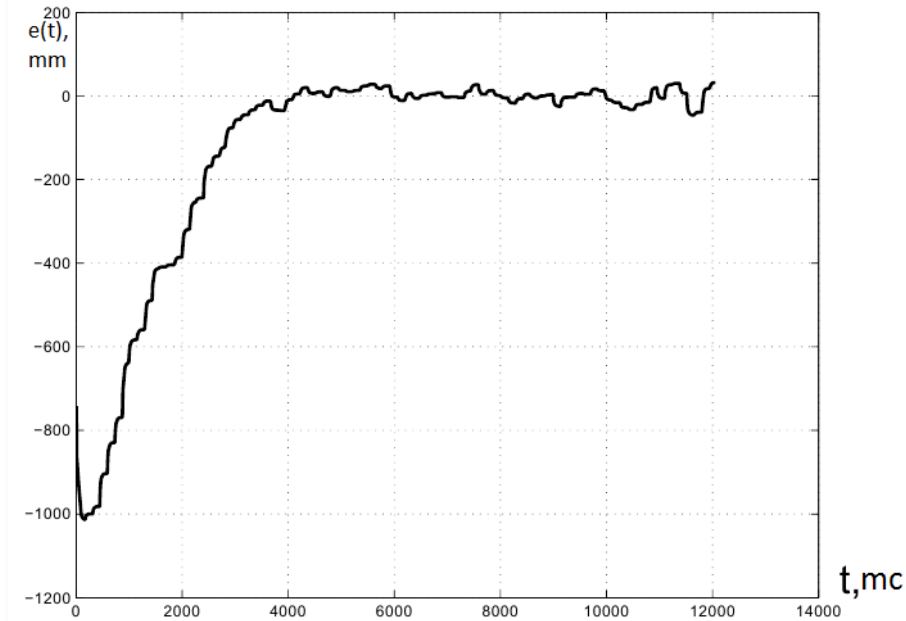


Рисунок 38 — Ортогональное отклонение при перемещении объекта управления вдоль прямой линии.

ортогональное отклонение сходится в окрестность нуля. Характерные колебания ортогонального отклонения (и, соответственно, положения робота относительно желаемой траектории) объясняются неидеальным подавлением возмущающего воздействия в реальной технической системе, а также погрешностью системы локальной навигации «NorthStar».

#### 4.4 Реализация алгоритмов траекторного управления в условиях наличия внешнего подвижного объекта

Теперь рассмотрим задачу избежания столкновения с подвижным препятствием. Кроме того, обратную связь по положению будем реализовывать посредством считывания данных одометрии.

Мобильный робот движется вдоль предписанной прямолинейной траектории  $S$  описанной в неявном виде как

$$\varphi(x) = -\sin \alpha^* x + \cos \alpha^* y + \varphi_0 = 0.$$

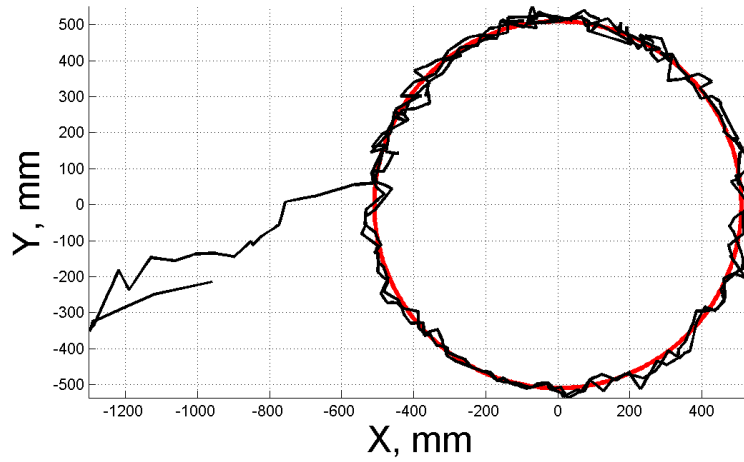


Рисунок 39 — Результаты моделирования движения объекта управления вдоль окружности.

Подвижный внешний объект движется по прямолинейной траектории  $S_o$ , описанной в неявном виде как

$$\varphi_o(x) = -\sin \alpha_o^* x + \cos \alpha_o^* y + \varphi_o 0 = 0.$$

Эквидистанта в виде окружности  $S^*$  с центром, совпадающим с центром масс внешнего подвижного объекта, описанной в относительных координатах в неявном виде как

$$\varphi^*(x) = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - R^2 = 0,$$

где  $(x_o, y_o)$  — координаты центра окружности (координаты центра масс подвижного объекта). Коэффициенты регулятора  $k_q = 10, k_1 = 0.1, k_2 = 10, k_3 = 0.2, k_4 = 5, k_{gamma} = 3, k_{eta} = 3, k_e = 3$ .

В первом эксперименте  $\alpha^* = 30^\circ, \varphi_0 = -2.575, \alpha_o^* = 0, \varphi_o 0 = -2.8, R = 0.7$ . Траектория движения мобильного робота и ортогональные отклонения от желаемой траектории и эквидистанты подвижного внешнего объекта представлены на рисунках 41 и 42.

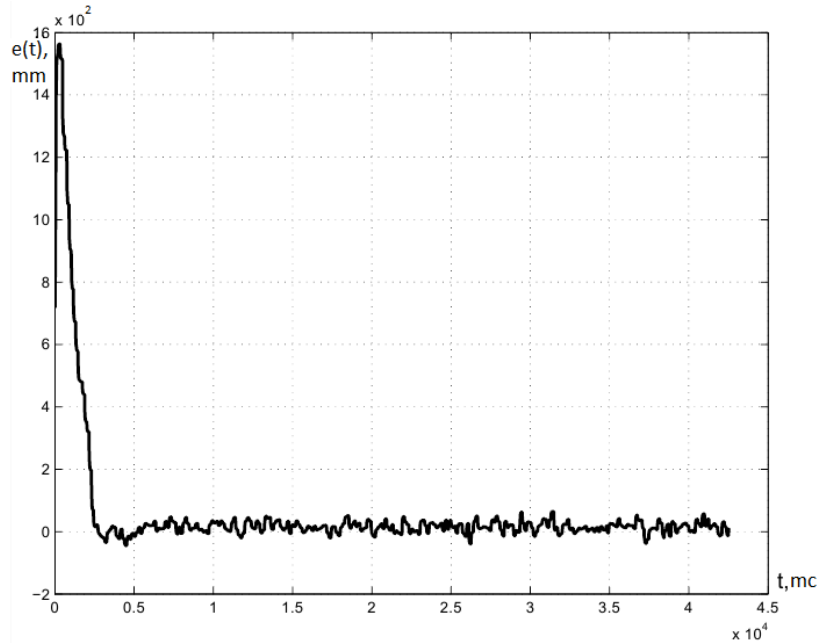


Рисунок 40 — Ортогональное отклонение при перемещении объекта управления вдоль окружности.

Из приведенных графиков видно, что разработанные алгоритмы управления позволяют эффективно решать задачу траекторного управления мобильным роботом при наличии в его рабочем пространстве подвижных объектов и осуществлять движение вдоль предписанной траектории, избегая при этом столкновения с подвижным внешним объектом.

## 4.5 Выводы по главе

В данной главе были представлены результаты экспериментальной апробации предложенных в диссертации алгоритмов траекторного управления. В качестве объекта управления выбран мобильный робот типа  $(3, 0)$  с роликонесущими колесами «Robotino» производства компаний «Festo Didactics». Рассмотрены задача движения вдоль геометрических примитивов, такие как прямая и окружность, при наличии неизмеряемого постоянного возмущения и задача следования желаемой траектории при наличии в рабочем пространстве мобильного робота подвижного препятствия и избежание столкновения



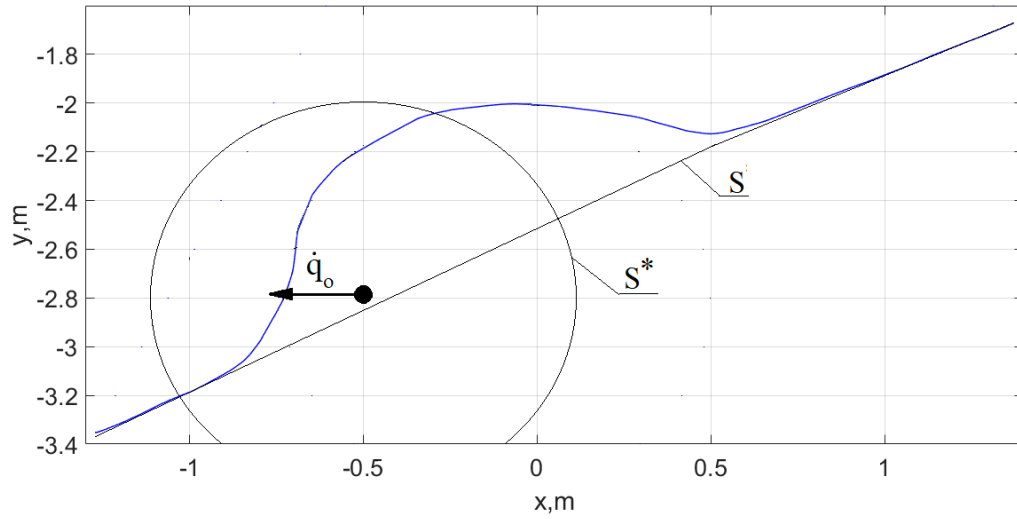


Рисунок 41 — Результаты моделирования движения объекта управления вдоль прямой при наличии подвижного препятствия.

с этим препятствием. Результаты экспериментов, представленные в виде графиков, показывают общую работоспособность предложенных теоретических выкладок и хорошее качество переходных процессов.

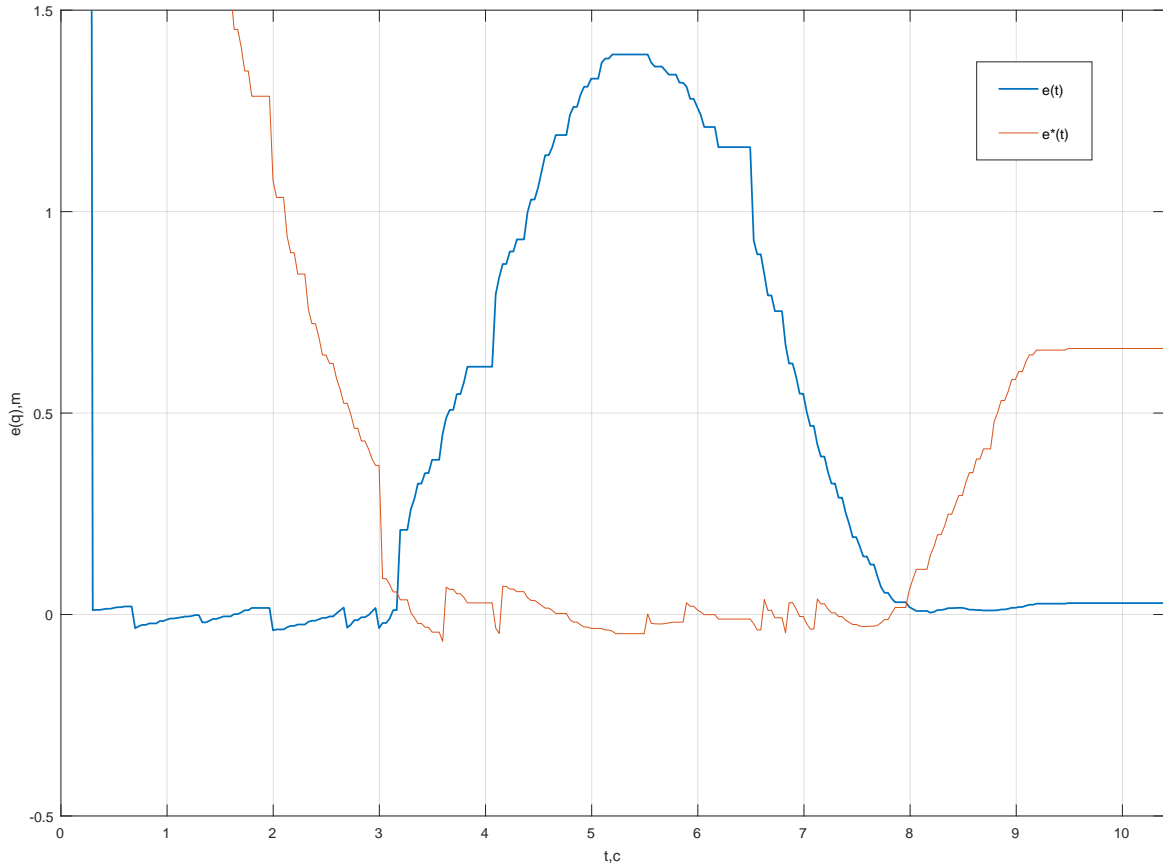


Рисунок 42 — Ортогональное отклонение от желаемой траектории и эквидистанты.

## Заключение

В диссертационной работе была решена задача управления движением многоканальными динамическими объектами, а именно задача следования контролируемым объектом вдоль аналитически заданной в пространстве траектории. Была предложена упрощенная методика планирования пути следования на основе базовых элементов, а также представлена процедура конструирования регуляторов, стабилизирующих движение вдоль неявно заданных кривых, описывающих желаемую траекторию.

В первой главе представлен обзор существующих методов решения задач траекторного управления движением мобильных роботов, проведено сравнение наиболее распространенных подходов, проанализированы их достоинства

и недостатки. Основным преимуществом подхода, развиваемого в работе, является обеспечение инвариантности траектории движения, что позволяет обеспечить большую точность следования по сравнению с решениями основанными на методе синтезе регуляторов как следящих систем. Также приведен анализ математических моделей колесных роботов и сделаны выводы о наиболее подходящих для разработки и тестирования алгоритмов траекторного управления конфигураций.

Во второй главе представлена аналитическая процедура конструирования стабилизирующих регуляторов, решающая поставленную траекторную задачу при наличии внешних неизменяемых постоянных возмущений, воздействующих на объект в случаях с и без измерения скорости. Исходная задача движения вдоль заданного пути следования декомпозирована на две независимые составляющие. Первая подзадача заключается в обеспечении заданной траекторной скорости. Она решается путем добавления прямой связи, задающей желаемый скоростной режим. Вторая подзадача заключается в устранении отклонений от заданной траектории. Для решения этой задачи был сформулирован и доказан ряд теорем с использованием метода функций Ляпунова, обеспечивающий асимптотическую устойчивость.

В третьей главе рассмотрены задачи траекторного управления при наличии внешних подвижных объектов в рабочем пространстве объекта управления. Был разработан алгоритм траекторного управления движением неполноприводного объекта управления относительно внешнего подвижного объекта. Приведены примеры использования разработанных алгоритмов для решения задачи избежания столкновения с движущимся препятствием и для движения вдоль траектории, заданной в базисе подвижного объекта.

В четвертой главе представлены результаты апробации предложенных алгоритмов управления. В качестве тестового объекта управления был выбран мобильный робот с роликонесущими колесами «Robotino» производства компании «Festo Didactics». Для реализации было выбрано несколько геометри-

ческих примитивов, таких как прямая и окружность. Также представлен ряд экспериментов с решением задачи траекторного управления при наличии в рабочем пространстве мобильного робота подвижного препятствия. Результаты экспериментов представлены в виде графиков, показывающих общую работоспособность предложенных теоретических выкладок и приемлемое качество переходных процессов.

Таким образом, в диссертационной работе была рассмотрена и решена задача траекторного управления движением мобильных роботов в условиях наличия неизмеряемых возмущений и препятствий на пути следования (в том числе подвижных). Предложены методы разработки регуляторов, решающих поставленную задачу. Теоретические результаты подкреплены практически экспериментами с мобильным роботом.

### Список литературы

- [1] Бурдаков, С.Ф. Системы управления движением колесных роботов : учеб. пособие / С.Ф. Бурдаков, И.В. Мирошник, Р.Э. Стельмаков; Серия «Анализ и синтез нелинейных систем». — СПб: Наука, 2001. — 227 с.
- [2] Власов С.М. Проектирование и разработка многозвенной робототехнической системы / С.М. Власов, А. Ю. Краснов, О. И. Борисов, В. С. Громов, В. В. Руденко // Сборник трудов IV Всероссийского конгресса молодых ученых / Университет ИТМО. — Санкт-Петербург, 2015. — С. 85–89
- [3] Довгоброд, Г. М. Упрощенное построение закона управления, обеспечивающего движение объекта по заданной криволинейной траектории / Г. М. Довгоброд, Л. М. Клячко // Гироскопия и навигация. — 2011. — № 3. — С. 24–33.
- [4] Капитанюк, Ю. А. Разработка системы траекторного управления мобильным роботом с роликонесущими колесами / Ю. А. Капитанюк, А. А. Капитонов, С. А. Чепинский, // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. — 2014. — № 2 (90). — С. 65–71.
- [5] Капитанюк, Ю. А. Траекторное управление твердым телом относительно подвижного объекта / Ю. А. Капитанюк, Д. А. Хвостов, С. А. Чепинский // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. — 2014. — № 2(90). — С. 60–64.
- [6] Капитанюк, Ю. А. Траекторное управление мобильным роботом в изменяющейся среде / Ю. А. Капитанюк, С. А. Чепинский // Материалы докладов XIV Конференции молодых ученых «Навигация и управление движением», под общей редакцией В.Г. Пешехонова и О.А. Степанова (научный редактор). — 2012. — С. 506–512.

- [7] Капитанюк, Ю. А. Задача управления многоканальной динамической системой по кусочно-гладкой траектории / Ю. А. Капитанюк, С. А. Чепинский // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. — 2013. — Т. 56, № 4. — С. 65—70.
- [8] Капитанюк, Ю. А. Управление мобильным роботом по заданной кусочно-гладкой траектории / Ю. А. Капитанюк, С. А. Чепинский // Гироскопия и навигация. — 2013. — № 2. — С. 42—52.
- [9] Ким, Д. П. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. — М. : Физматлит, 2004. — Т. 2. — 464 с.
- [10] Колесников, А. А. Синергетические методы управления сложными системами: механические и электромеханические системы. / А. А. Колесников [и др.] — М. : Едиториал УРСС/КомКнига, 2006. — 304 с.
- [11] Мирошник, И. В. Согласованное управление многоканальными системами. — Л. : Энергоатомиздат, 1990. — 128 с.
- [12] Мирошник, И. В. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами / И. В. Мирошник, В. О. Никифоров, А. Л. Фрадков — СПб. : Наука, 2000. — 562 с.
- [13] Мирошник, И. В. Управление пространственным движением относительно подвижных внешних объектов / И. В. Мирошник, К. А. Сергеев // Автомат. и телемех. — 2005. — № 4. — С. 70—83.
- [14] Реализация алгоритмов траекторного управления на базе мобильного робота с роликонесущими колесами / В. Цзянь, А. Ю. Краснов, Ю.А. Капитанюк, С.А. Чепинский, Ч. Ифань, Л. Хуэйминь // Гироскопия и навигация — 2016. — Т. 24. — № 3(94) — С. 131–142. (на англ. Path following control algorithms implemented in a mobile robot with omni wheels / W. Jian, A. J. Krasnov, Y. A. Kapitanuyuk, S. A. Chepinskiy, Y. Chen, H. Liu

- // Gyroscopy and Navigation. — 2016. — vol. 7, issue 4. — P. 353–359. (Scopus))
- [15] Траекторное управление мобильными роботами при наличии возмущающих воздействий / А. Ю. Краснов, С. А. Чепинский, Ч. Ифань, Л. Хуэйминь // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. — 2017. — Т. 60, № 9. — С. 842–849.
- [16] Траекторное управление движением робота при наличии подвижных препятствий. / А. Ю. Краснов, [и др.] // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. — 2017. — Т. 17, № 5. — С. 790–797.
- [17] Траекторное управление движением твердого тела в пространстве. / В. Цзянь, А. Ю. Краснов, Ю.А. Капитанюк, С.А. Чепинский, С. А. Холунин, Ч. Ифань, Л. Хуэйминь, Д. А. Хвостов // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. — 2017. — Т. 60, № 8. — С. 704–711.
- [18] Aguiar, A. P. Path-following for nonminimum phase systems removes performance limitations / A. P. Aguiar, J. P. Hespanha, P. V. Kokotovic // Automatic Control, IEEE Transactions on. — 2005. — Vol. 50, no. 2. — P. 234–239.
- [19] Akhtar, A. Path following for a car-like robot using transverse feedback linearization and tangential dynamic extension / A. Akhtar, C. Nielsen // CDC-ECE. — 2011. — P. 7974–7979.
- [20] Akhtar, A. Path following for a quadrotor using dynamic extension and transverse feedback linearization / A. Akhtar, S. L. Waslander, C. Nielsen // Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference on / IEEE. — 2012. — P. 3551–3556.

- [21] Angeles, J. Fundamentals of robotic mechanical systems: theory, methods, and algorithms / Mechanical engineering series. — Springer, 1997. — 512 pp.
- [22] Backstepping based trajectory tracking control for a four-wheel mobile robot with differential-drive steering / H. Yuyao, W. Jian, S. A. Chepinskiy, A. J. Krasnov, L. Shirong // 36th Chinese Control Conference (CCC). — 2017. — P. 4918–4923.
- [23] Banaszuk, A. Feedback linearization of transverse dynamics for periodic orbits / A. Banaszuk, J. Hauser // Systems & control letters. — 1995. — Vol. 26, no. 2. — P. 95–105.
- [24] Blaga, P. Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces. — Editura Risoprint, 2005. — 237 pp.
- [25] Breivik, M. Principles of guidance-based path following in 2d and 3d / M. Breivik, T. I. Fossen // Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05. 44th IEEE Conference on. — 2005. — P. 627–634.
- [26] Canudas de Wit, C. Theory of robot control / C. Canudas de Wit, B. Siciliano, G. Bastin. — Springer, 1996. — 392 pp.
- [27] Continuous-curvature path generation using fermat's spiral / A. M. Lekkas, A. R. Dahl, M. Breivik, T. I. Fossen // Modeling, Identification and Control. — 2013. — Vol. 34, no. 4. — P. 183–198.
- [28] Design of Failover Micro Aerial Vehicle with Tilting Rotors / D. A. Khvostov, S. A. Chepinskiy, A. Y. Krasnov, K. A. Khvostova, G. Shmigelsky // Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), 8th International Congress on. — 2016. — pp. 352–355.
- [29] Dongming, W. A simple method for implicitizing rational curves and surfaces // Journal of Symbolic Computation. — 2004. — Vol. 38, no. 1. — P. 899–914.



- [30] El-Hawwary, M. I. Reduction principles and the stabilization of closed sets for passive systems / M. I. El-Hawwary, M. Maggiore // Automatic Control, IEEE Transactions on. — 2010. — Vol. 55, no. 4. — P. 982–987.
- [31] El-Hawwary, M. I. Case studies on passivity-based stabilisation of closed sets / M. I. El-Hawwary, M. Maggiore // International Journal of Control. — 2011. — Vol. 84, no. 2. — P. 336–350.
- [32] El-Hawwary, M. I., Maggiore, M. Reduction theorems for stability of closed sets with application to backstepping control design / M. I. El-Hawwary, M. Maggiore // Automatica. — 2013. — Vol. 49, no. 1. — P. 214–222.
- [33] Fossen, T. I. Guidance and control of ocean vehicles. — Wiley, 1994. — 494 pp.
- [34] Fossen, T. I. Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control. — John Wiley & Sons, Ltd, 2011.
- [35] Fradkov, A. L. Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems. Mathematics and Its Applications / A. L. Fradkov, I. V. Miroshnik, V. O. Nikiforov. — Springer, 1999. — 510 pp.
- [36] Geometric path following control for an omnidirectional mobile robot / W. Jian, S. A. Chepinskiy, A. J. Krasnov, B. Zhang, H. Liu, Y. Chen, D. A. Khvostov // Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR), 2016 21st International Conference on. — Międzyzdroje, Poland, 2016. — P. 1063–1068.
- [37] Geometric path following control in a moving frame / W. Jian, Y. A. Kapitanyuk, S. A. Chepinskiy, L. Dongliang, A. J. Krasnov // IFAC-PapersOnLine. — 2015. — vol. 48(11). — P. 150–155.

- [38] Hladio, A. Path following for a class of mechanical systems / A. Hladio, C. Nielsen, D. Wang // Control Systems Technology, IEEE Transactions on. — 2013. — Vol. 21, no. 6. — P. 2380–2390.
- [39] Hobby, J. D. Numerically stable implicitization of cubic curves // ACM Trans. Graph. — 1991. — jul. — Vol. 10, no. 3. — P. 255–296.
- [40] Hua, M.D. Introduction to feedback control of underactuated vtol vehicles: A review of basic control design ideas and principles / M.D. Hua, T. Hamel, P. Morin, C. Samson // IEEE Control Systems Magazine. — № 33(1). — 61–75.
- [41] Hua, M. Homography-based visual servoing for autonomous underwater vehicles / M. Hua, G. Allibert, S. Krupinski, T. Hamel // Proceedings of the 19th IFAC World Congress (Cape Town, South Africa, 2014). — 2014. — P. 5726–5733.
- [42] Hua, M.D. Control of vtol vehicles with thrust-tilting augmentation / M.D. Hua, T. Hamel, P. Morin, C. Samson // Automatica. — 2015. — № 52. — 1–7.
- [43] Kapitanyuk, Y. A. Geometric path following control of a rigid body based on the stabilization of sets / Y. A. Kapitanyuk, S. A. Chepinskiy, A. A. Kapitonov // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline) — 2014. — Vol. 19. — pp. 7342–7347.
- [44] Kapitanyuk, Y. A. Control of mobile robot following a piecewise-smooth path / Y. A. Kapitanyuk, S. A. Chepinskiy // Gyroscopy and Navigation. — 2013. — Vol. 4, no. 4. — P. 198–203.
- [45] Lapierre, L. Non-linear path following with applications to the control of autonomous underwater vehicles / L. Lapierre, D. Soetanto, A. Pascoal // In

- Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on. — 2003. — Vol. 2. — P. 1256–1261.
- [46] Lapierre, L. Nonlinear path following control of an auv / L. Lapierre, D. Soetanto // Ocean engineering. — 2007. — Vol. 34(11). — P. 1734–1744.
- [47] Lawrence, D. A. Lyapunov vector fields for autonomous unmanned aircraft flight control / D. A. Lawrence, E. W. Frew, W. J. Pisano // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 2008. — Vol. 31(5). — P. 1220–1229.
- [48] Lee, T. Geometric tracking control of a quadrotor uav on  $se(3)$  / T. Lee, M. Leoky, N. H. McClamroch // Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on. — 2010. — P. 5420–5425.
- [49] Lekkas, A. Minimization of cross-track and along-track errors for path tracking of marine underactuated vehicles / A. Lekkas, T. Fossen // In European Control Conference (ECC). — 2014. — P. 3004–3010.
- [50] Miroshnik, I. V. Nonlinear control of multidrive vehicular robots / I. V. Miroshnik, A. V. Lyamin // Control Applications, Proceedings of the Third IEEE Conference on. — 1994. — P. 79–80.
- [51] Miroshnik, I. V. Trajectory motion control and coordination of multilink robots / I. V. Miroshnik, V. O. Nikiforov // Prepr. 13th IFAC World Congress. — 1996. — Vol. A. — P. 361–366.
- [52] Miroshnik, I. V. Stabilization of motions of multi-pendulum systems / I. V. Miroshnik, A. A. Bobtsov // Control of Oscillations and Chaos, Proceedings. 2000 2nd International Conference. — Vol. 1. — 2000. — P. 22–25.
- [53] Miroshnik, I. V. Nonlinear control of robot spatial motion in the dynamic environments / I. V. Miroshnik, K. A. Sergeev // Proc. Int. IEEE Conf. On Advanced Intel. Mechatronics. — 2001. — Vol. 2. — P. 1303–1306.

- [54] Miroshnik I.V. Trajectory control of underactuated mechanisms / I. V. Miroshnik, S. A. Chepinskiy // 2nd IFAC Conference on Mechatronic Systems. — Berkeley, 2002. — P. 959–1004.
- [55] Miroshnik I.V. Trajectory motion control of underactuated manipulators / I. V. Miroshnik, S. A. Chepinskiy // 7th IFAC Symposium on Robot Control. — Wroclaw, Poland, 2003. — P. 105–110.
- [56] Nielsen, C. Path following using transverse feedback linearization: Application to a maglev positioning system / C. Nielsen, C. Fulford, M. Maggiore // American Control Conference, 2009. — 2009. — P. 3045–3050.
- [57] Oliveira, T. Ground target tracking control system for unmanned aerial vehicles / T. Oliveira, P. Encarnacao // Journal of Intelligent & Robotic Systems. — 2013. — Vol. 69, no. 1–4. — P. 373–387.
- [58] Oliveira, T. Moving path following for autonomous robotic vehicles / T. Oliveira, P. Encarnacao, A. P. Aguiar // European Control Conference (ECC), 2013. — 2013. — P. 3320–3325.
- [59] Regina, N. Uav guidance law for ground-based target trajectory tracking and loitering / N. Regina, M. Zanzi // Proceedings of the 2011 IEEE Aerospace Conference. — Washington, DC, USA, 2011. — P. 1–9.
- [60] Rizwan, Y. Nonlinear aircraft modeling and controller design for target tracking / Y. Rizwan, S. L. Waslander, C. Nielsen // American Control Conference (ACC), 2011 / IEEE. — 2011. — P. 3191–3196.
- [61] Roza, A. Position control for a class of vehicles in se (3) / A. Roza, M. Maggiore // Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference on / IEEE. — 2012. — P. 5631–5636.
- [62] Shalaby, M. Approximate implicitization of space curves and of surfaces of revolution / M. Shalaby, B. Juttler // Geometric Modeling and Algebraic

- Geometry / Ed. by Bert Juttler, Ragni Piene. — Springer Berlin Heidelberg, 2008. — P. 215—227.
- [63] Siciliano, B. Robotics: Modelling, Planning and Control / B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani // Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. — Springer, 2009.
- [64] Spong, M. W. Robot Modeling and Control / M. W. Spong, S. Hutchinson // — Wiley, 2005.
- [65] Thomassen, J. B. Self-intersection problems and approximate implicitization // Computational Methods for Algebraic Spline Surfaces. — Springer Berlin Heidelberg, 2005 . — P. 155—170.
- [66] Vector field path following for miniature air vehicles / D. Nelson, D. Barber, T. McLain, R. Beard // Robotics, IEEE Transactions on. — 2007. — Vol. 23(3). — P. 519—529.
- [67] Yalcin, H. Implicitization of parametric curves by matrix annihilation / H. Yalcin, M. Unel, W. Wolovich // International Journal of Computer Vision. — 2003. — Vol. 54, no. 1–3. — P. 105–115.