

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий механики и оптики

На правах рукописи

Лызлова Мария Владимировна

**Адаптивное управление треугольными системами с
переменными параметрами**

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации
(в технических системах)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
кандидат технических наук
Герасимов Дмитрий Николаевич

Санкт-Петербург – 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1 Обзор методов управления	9
2 Адаптивное управление объектами с переменными параметрами.	14
Теоретические исследования	
2.1 Постановка задачи	14
2.2 Решение задачи стабилизации стационарного объекта с относительной степенью, равной порядку объекта	18
2.3 Решение задачи стабилизации стационарного объекта с произвольной относительной степенью	37
2.4 Решение задачи стабилизации нестационарного объекта с произвольной относительной степенью	54
2.5 Решение задачи слежения выхода нестационарного объекта с произвольной относительной степенью за эталонным сигналом	67
2.6 Результаты моделирования	69
2.7. Выводы по главе	78
3. Синтез адаптивного управления крутящим моментом в инжекторных двигателях внутреннего сгорания.	79
3.1. Актуальность задачи	79
3.2. Постановка задачи	82
3.3. Построение модели крутящего момента	83
3.4. Построение регулятора	89
3.5. Моделирование	90
3.6. Выводы по главе	92
4. Синтез адаптивного управления микроклиматом парниковой теплицы	94
4.1. Актуальность задачи	94
4.2. Постановка задачи управления	98

4.3. Построение математической модели микроклимата	100
4.4. Построение регулятора	120
4.5. Моделирование	124
4.6. Выводы по главе	127
Заключение	128
Литература	129

ВВЕДЕНИЕ

Одним из актуальных направлений современной теории адаптивного и робастного управления является поиск путей построения достаточно простых алгоритмов управления объектами с неопределенностями. Под упрощением алгоритма управления понимается как снижение его динамического порядка, так и уменьшение количества арифметических операций в структуре регулятора, уменьшение числа настраиваемых параметров и количества измеряемых переменных. Актуальность данного направления обусловлена проблемой сложности существующих решений даже для простых моделей объектов.

С целью изложения идеи, лежащей в основе метода синтеза адаптивных регуляторов, рассмотрим простой пример задачи стабилизации выхода нестационарного скалярного объекта вида

$$\dot{x} = \theta x + u + \delta, \quad (1.1)$$

где x – регулируемая переменная; u – сигнал управления, $\theta = \theta(t)$ – ограниченная неизвестная функция; δ – возмущение ($|\delta| \leq \bar{\delta}, \bar{\delta} = const > 0$).

Предлагается следующий стабилизирующий закон управления:

$$u = -\omega x, \quad (1.2)$$

где ω генерируется согласно интегральному закону

$$\dot{\omega} = \gamma x^2, \quad (1.3)$$

где γ – положительный параметр.

Для анализа устойчивости замкнутой системы подставим (1.2) в (1.1), введем функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2} x^2 \quad (1.4)$$

и проанализируем ее производную:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= (\theta - \omega)x^2 + \delta x = \frac{(\theta - \omega)}{2}x^2 + \frac{(\theta - \omega)}{2}x^2 + \delta x \pm \frac{1}{2(\theta - \omega)}\delta^2 = \\ &= \frac{(\theta - \omega)}{2}x^2 - \left(\sqrt{\frac{(\theta - \omega)}{2}} - \frac{\delta}{\sqrt{2(\theta - \omega)}} \right)^2 + \frac{\delta^2}{2(\theta - \omega)} \leq \frac{(\theta - \omega)}{2}x^2 + \frac{1}{2(\theta - \omega)}\bar{\delta}^2\end{aligned}$$

или

$$\dot{V} \leq (\theta - \omega)V + \frac{1}{2(\theta - \omega)}\bar{\delta}^2.$$

Из полученного результата видно, что при росте ω согласно закону (1.3) до порога, превышающего $\sup_{t \in (0, \infty)} \{\theta(t)\}$, выход x экспоненциально стремится

к некоторой ограниченной окрестности нулевого положения равновесия. Причем, т.к. x не достигнет нуля в силу действия возмущения, то ω в силу (1.3) растет неограниченно. Одновременно с этим радиус окрестности, равный $\bar{\delta}^2 / 2(\theta - \omega)$, убывает.

Представленный пример иллюстрирует ряд свойств замкнутой системы, равно как и проблем, связанных с реализацией и доказательством устойчивости замкнутой системы.

Во первых, согласно (1.3) и ввиду наличия возмущения параметр ω неограниченно растет, что препятствует практической реализации закона управления. Следовательно, требуется разработка модификаций (1.3), направленных на ограничение роста.

Во вторых, уравнения замкнутой системы

$$\begin{cases} \dot{x} = (\theta - \omega)x + \delta, \\ \dot{\omega} = \gamma x^2 \end{cases}$$

являются нелинейными, что в случае произвольного порядка и произвольной относительной степени объекта требует анализа полноты системы и усложняет анализ ее устойчивости [1].

Отметим также, что если объект описывается многомерным нестационарным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u + \delta,$$

то требуется расширение структуры алгоритма управления (1.2), (1.3). Причем наибольший интерес будут представлять простые решения, предполагающие минимальный динамический порядок регулятора и минимальное количество алгебраических операций при его реализации.

Таким образом, основным предметом исследований, отраженных в диссертационной работе является получение простого, практически реализуемого решения задачи управления нестационарным параметрически неопределенным объектом произвольного порядка и произвольной относительной степенью.

Методы исследования.

При получении теоретических результатов использовался метод функций Ляпунова, метод стандартных характеристических полиномов, методы теории адаптивного и робастного управления, методы теории нелинейных систем. При построении модели двигателя внутреннего сгорания дополнительно были задействованы методы теории идентификации.

Научная новизна.

Научная новизна результатов, полученных в диссертационной работе, заключается в том, что предлагаемый метод адаптивного управления базируется на методе стандартных характеристических полиномов с единственным настраиваемым параметром — среднегеометрическим корнем характеристического полинома. Показано, что синтезированные алгоритмы управления применимы для класса нестационарных параметрически неопределенных линейных объектов с треугольной матрицей состояния и произвольной относительной степенью. Алгоритмы используются в задачах

адаптивного управления крутящим моментом ДВС и адаптивного трехканального управления микроклиматом парниковой теплицы.

В целях решения задачи управления двигателем была разработана и апробирована на экспериментальных данных модель ДВС. В целях решения задачи управления микроклиматом теплицы была разработана модель температуры и влажности воздуха, а также концентрации CO₂ в парниковой теплице.

Практическая значимость.

Полученные алгоритмы управления могут быть применены в задачах управления по состоянию нестационарными параметрически неопределенными системами с треугольной структурой и произвольной относительной степенью. В частности, в диссертационной работе предлагается решение задачи слежения крутящего момента ДВС за эталонным значением и решение задачи многоканальной стабилизации температуры и влажности воздуха, а также концентрации CO₂ в парниковой теплице.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Алгоритмы адаптивного управления нестационарными параметрически неопределенными линейными объектами с произвольной относительной степенью и треугольной матрицей состояния, содержащие один настраиваемый параметр и один алгоритм адаптации.

2. Алгоритм адаптивного управления крутящим моментом ДВС, построенный на основе модели и разработанного метода;

3. Алгоритм адаптивного трехканального управления микроклиматом парниковой теплицы, построенный на основе математической модели и разработанного метода.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. XLI научная и учебно-методическая конференция СПб НИУ ИТМО. 31.01.2012 - 03.02.2012.
2. XLII научная и учебно-методическая конференция СПб НИУ ИТМО. 29.01.2013 - 01.02.2013.
3. II Всероссийский конгресс молодых учёных. СПб НИУ ИТМО. 09.04.2013 – 12.04.2013.
4. XLIII научная и учебно-методическая конференция СПб НИУ ИТМО. 28.01.2014 - 31.01.2014.
5. III Всероссийский конгресс молодых учёных. СПб НИУ ИТМО. 08.04.2013 – 11.04.2013.
6. XLIV научная и учебно-методическая конференция СПб НИУ ИТМО. 03.02.2015 - 06.02.2015.
7. The 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems (MICNON 2015), Россия, Санкт–Петербург, 24.06.2015–26.06. 2015.

Публикации по теме диссертационной работы. Основные теоретические и практические результаты диссертации опубликованы в 4-х статьях и представлены в 7 докладах. Доклады получили одобрение на всероссийских и межвузовских научно-практических конференциях, перечисленных в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация содержит введение, 4 главы, заключение, список литературы, содержащий 61 наименование. Основная часть работы изложена на 138 страницах машинописного текста и содержит 33 рисунка и 5 таблиц.

1 ОБЗОР МЕТОДОВ УПРАВЛЕНИЯ

Для синтеза систем управления в условиях неопределенности одним из актуальных направлений являются адаптивные системы. Это такие системы управления, которые обеспечивают компенсацию параметрических, сигнальных, функциональных или структурных неопределенностей объекта управления за счет автоматической подстройки регулятора в ходе рабочего функционирования системы, т.е. адаптивные системы восполняют нехватку априорной информации об объекте управления в ходе рабочего функционирования [2].

Для решения задачи управления неопределенными объектами используются, например, классические методы. В таких методах при неизмеримости переменных состояния возникает необходимость в использовании дополнительных динамических фильтров. Классические методы чаще используют для ограниченного класса объектов. В случае расширения класса, структура алгоритма управления усложняется. Рассмотрим подробнее некоторые методы.

Методы адаптивного кусочно-линейного управления. В классическом кусочно-линейном управлении (Adaptive Gain-Scheduling Control) [3, 4], синтез регулятора основывается на локальном описании нелинейных систем [5]. Локальные свойства нелинейной системы чаще всего могут быть приближены к свойствам линейной системы. Следовательно, синтез локального регулятора может быть выполнен с помощью классической теории линейных систем. Такой регулятор гарантирует выполнение установленных требований только в том случае, когда локальные модели действительны. Основные результаты в этом направлении были получены Энди Пакардом [6,7,8], Пьером Апкаррианом [9,10,11], Джеф Шаммой [12,13] и др.

Методы управления классом линейных систем с переменными параметрами. Линейные системы с переменными параметрами (в англоязычной литературе – Linear Parameter Varying systems (LPV)) [5, 14, 16, 17], позволяют значительно упростить задачу нелинейного моделирования путем замены нелинейной динамической системы линейными. Другим подходом является решение систем с переменными параметрами при помощи линейных матричных неравенств. В его основе лежит теория Ляпунова. Анализ и синтез систем с переменными параметрами, с использованием метода линейных матричных неравенств (LMI), представлен в работах [10, 15, 18].

Методы классического адаптивного управления. Другой подход для решения задачи управления с неопределенностями это использование *адаптивных систем* [19,20,21]. Они используются, когда недостаточно априорной информации об объекте или когда значительно меняются параметры объекта в течение процесса функционирования. Главной целью таких систем является компенсация параметрической неопределенности. Для решения этой проблемы используются различные методы. Например, *метод непрямого адаптивного управления*. Этот метод заключается в построении отдельного блока идентификатора, который устанавливает параметры модели объекта, и обеспечивает информационную поддержку регулятора.

Метод прямого адаптивного управления заключается в построении алгоритма адаптации, на основе минимизации ошибки управления.

Адаптивные системы с эталонной моделью [22, 23, 24]. В этом случае, регулятор адаптируется таким образом, чтобы движение замкнутой системы совпадало с движением эталонной модели с максимально возможной точностью. Наиболее часто эталонная модель реализуется в виде линейной системы, формирующей желаемый отклик на задающее воздействие. Настраиваемый регулятор строится таким образом, чтобы при соответствии его коэффициентов параметрам объекта управления замкнутая система вела себя точно так же, как эталонная модель.

Алгоритмы адаптации с “сильным” коэффициентом обратной связи. В этом методе объект замыкается линейной обратной связью и имеет «большой коэффициент усиления» [25,26]. Например, в статье [27] рассматривается метод адаптивного управления, где основная идея заключается в том, что настройка коэффициента обратной связи происходит согласно выбранной функции Ляпунова. Коэффициент усиления в регуляторе является не монотонно убывающим, и растет или уменьшается в зависимости от введенных производных.

В этом направлении занимались исследованиями такие ученые как Annaswamy A.M., Blanchini F., Ilchmann A. [25,28, 29].

Метод больших коэффициентов усиления В этом направлении работал Ильхман, его метод в англоязычной литературе называется “funnel control”. Основная идея такого подхода заключается в том, что за счет изменения коэффициента усиления достигается устойчивость системы управления. Таким образом, коэффициент усиления увеличивается, когда абсолютная ошибка достигает некую ограниченную функцию, и уменьшается, когда значение ошибки отделяется от этой ограниченной функции [30, 31].

В статье [32] представлен регулятор, где параметры ограничиваются областью в виде трубки, для нелинейных многоканальных систем с произвольной, но известной, относительной степенью больше единицы для класса объектов имеющих конечную размерность линейных систем, нелинейных систем с задержкой и систем с гистерезисом. Задача управления решается с помощью итеративной процедуры формирования коэффициента обратной связи.

Метод пассивфикации. Этот метод заключается в обеспечении пассивности системы с помощью обратной связи [33, 34]. Задача стабилизации управляемой системы решается с помощью следующей двухэтапной процедуры. На первом этапе ставится задача пассивфикации нелинейной системы, состоящая в обеспечении пассивности исходной системы путем введения обратной связи по состоянию и, возможно, выбора

подходящей функции выхода. На втором этапе при выполнении дополнительных условий типа наблюдаемости решается задача стабилизации полученной в результате выполнения первого этапа пассивной системы. Таким образом, задача пассивации в этом случае появляется в качестве промежуточной при синтезе стабилизирующего управления для нелинейных систем.

Метод последовательного компенсатора

Алгоритм «последовательный компенсатор» представляет собой расширенный вид пассивации для управления по выходу объектами в условиях параметрической неопределенности [35, 36]. Он основан на методе сильной обратной связи, заключающемся в стабилизации строго минимально фазовых объектов с использованием пропорционального регулятора большой величины. В [39] рассматривается случай, когда осуществляется компенсация с относительной степенью больше единицы путем ввода дополнительного фильтра по выходной переменной, и стабилизация достигается путем увеличения коэффициентов регулятора.

Можно сделать вывод, что рассмотренные методы решения задачи управления объектами с неизвестными параметрами, являются сложными в реализации, и обладают высоким динамическим порядком.

Таким образом, для построения эффективной системы управления важно одновременно повысить точность модели и обеспечить простоту вывода закона управления. Под упрощением понимается как снижение динамического порядка в структуре регулятора, уменьшение числа настраиваемых параметров, так и по возможности, уменьшение количества измеряемых переменных.

В связи с этим в теории адаптивных систем возникла тенденция разработки относительно простых алгоритмов управления [37, 38].

Перспективность этого направления объясняется проблемой сложности имеющихся решений даже для простых моделей объектов.

В данной работе предлагается решение задачи адаптивного и робастного управления с использованием простого алгоритма адаптации.

2 АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТАМИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим в общем случае нелинейный параметрически неопределенный объект

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + \xi, \quad x(0), \quad (2.1)$$

$$y = x_1,$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния объекта; u – переменная управления; y – регулируемая переменная; $\xi \in R^n$ – возмущение;

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{1,1}(t) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,2}(t) & a_{2,2}(t) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n-1}(t) & a_{2,n-1}(t) & a_{3,n-1}(t) & \dots & 1 \\ a_{1,n}(t) & a_{2,n}(t) & a_{n,p}(t) & \dots & 0 \end{bmatrix}; \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m(t) \\ \vdots \\ b_0(t) \end{bmatrix}.$$

Параметры $a_{i,j}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, b_k , $k = \overline{0,m}$ неизвестны и могут зависеть, в том числе, от переменных состояния x_i . Класс объектов (2.1) ограничивается следующими допущениями:

Допущение 1: Относительная степень объекта $\rho = n - m$ постоянна.

Допущение 2: Объект является полностью управляемым и наблюдаемым;

Допущение 3: Нуль-динамика объекта, представленная уравнением “вход-выход”

$$B(s,t)[w] = s^m [b_m(t)w] + s^{m-1} [b_{m-1}(t)w] + \dots + s [b_1(t)w] + b_0(t)w = 0,$$

где $B(s,t)$ – правый полиномиальный дифференциальный оператор;
 $s = d / dt$ или уравнением “вход-состояние-выход”

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \vdots \\ \dot{w}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_{m-1}(t)/b_m(t) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_{m-2}(t)/b_m(t) & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_1(t)/b_m(t) & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -b_0(t)/b_m(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix},$$

экспоненциально устойчива, т.е. объект является минимально фазовым.

В [1, теорема 4.12] показано, что из экспоненциальной устойчивости приведенной линейной системы следует существование функции Ляпунова

$$V = w^T P(t)w,$$

где $P(t) = P^T(t) \succ c_1 I$ такая, что $\dot{P}(t) + A_b^T(t)P(t) + P(t)A_b(t) = -Q(t)$;
 $Q(t) = Q^T(t) \succ c_2 I$; c_1, c_2 – некоторые положительные константы;

$$A_b(t) = \begin{bmatrix} -b_{m-1}(t)/b_m(t) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_{m-2}(t)/b_m(t) & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_1(t)/b_m(t) & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -b_0(t)/b_m(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

такой, что \dot{V} удовлетворяет условиям экспоненциальной устойчивости [1, теорема 4.10]:

$$\begin{aligned} k_1 \|w\|^2 &\leq w^T P(t)w \leq k_2 \|w\|^2; \\ -w^T Q(t)w &\leq -k_3 \|w\|^2; \end{aligned}$$

k_1, k_2, k_3 – положительные константы¹;

Допущение 4: $a_{i,j}(t), b_k(t) \in L_\infty \cap C^\infty$;

Допущение 5: Известно минимальное значение b_m , обозначаемое как $b_{m \min}$;

Допущение 6: Вектор состояния x доступен прямому измерению;

¹ Здесь и далее в диссертации используется норма $\|\cdot\|_\infty$

Допущение 7: $\|\xi\| \leq \bar{\xi}$;

Отметим, что требование к устойчивости объекта не предъявляется.

Цель заключается в построении закона управления, который обеспечивает в замкнутой системе ограниченность всех сигналов и выполнение следующего целевого неравенства:

$$\|y_M(t) - y(t)\| \leq \Delta, \quad \forall t \geq T, \quad (2.2)$$

где $\Delta > 0$ и $T > 0$ – максимальная ошибка и время настройки системы управления соответственно; $y_M \in R^n$ – желаемый выход объекта, генерируемый эталонной моделью вида

$$\dot{x}_M = A_M x_M + B_M g; \quad (2.3)$$

$$y_M = C_M x_M;$$

$g(t)$ – задающее воздействие;

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{M0} & -a_{M1} & -a_{M2} & \cdots & -a_{Mn-1} \end{bmatrix}; \quad B_M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{M0} \end{bmatrix}; \quad C_M^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$a_{Mi}, i = \overline{0, n-1}$ – параметры эталонной модели, с помощью которых задаются желаемые динамические характеристики замкнутой системы.

Синтезируемый алгоритм управления должен обеспечивать возможность уменьшения величины Δ произвольным образом, путем изменения коэффициентов регулятора.

Сформулированная задача разбивается и решается на базе частных решений задач управления более узкими классами объектов. В рамках каждой частной задачи затрагиваются вопросы задания структуры регулятора, анализа полноты и устойчивости замкнутой системы, а также путей повышения ее

точности. Отдельно рассматривается и анализируется ряд альтернативных решений по синтезу алгоритмов адаптации, обеспечивающих настройку регулятора.

В первую очередь рассматриваются и решаются частные задачи стабилизации вектора состояния, после чего осуществляется переход к решению основной задачи слежения. Задачи стабилизации решаются последовательно для подклассов объектов вида (2.1) со следующими матрицами A и B :

$$1. A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,2} & a_{2,2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & a_{3,n-1} & \dots & 1 \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix},$$

где $a_{i,j}, b_0$ – неизвестные константы. В рамках приведенного класса объектов рассматривается решение и анализ замкнутой системы для случая, когда $b_0 = 1$ и $b_0 \geq b_{0 \min} > 0$;

$$2. A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,2} & a_{2,2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & a_{3,n-1} & \dots & 1 \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix},$$

где $a_{i,j}, b_j$ – неизвестные константы; $b_m \geq b_{m \min} > 0$.

$$3. A(t) = \begin{bmatrix} a_{1,1}(t) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,2}(t) & a_{2,2}(t) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n-1}(t) & a_{2,n-1}(t) & a_{3,n-1}(t) & \dots & 1 \\ a_{1,n}(t) & a_{2,n}(t) & a_{n,p}(t) & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m(t) \\ \vdots \\ b_0(t) \end{bmatrix},$$

где $a_{i,j}, b_j$ – неизвестные функции времени; $b_m \geq b_{m \min} > 0$.

Предполагается, что в частных задачах приняты допущения 2 – 7.

2.2 Решение задачи стабилизации стационарного объекта с относительной степенью, равной порядку объекта

2.2.1 Постановка задачи

Пусть объект описывается следующим уравнением:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \xi, & x(0), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (2.4)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,2} & a_{2,2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & a_{3,n-1} & \dots & 1 \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}.$$

Параметры $a_{i,j}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$ неизвестны.

Цель заключается в построении закона управления, который обеспечивает в замкнутой системе ограниченность всех сигналов и выполнение следующего целевого неравенства:

$$\|y(t)\| \leq \Delta, \quad \forall t \geq T, \quad (2.5)$$

где величины Δ, T – максимальная ошибка стабилизации и время настройки системы управления соответственно.

Для простоты изложения идеи синтеза регулятора рассмотрим частный случай, когда $b_0 = 1$.

2.2.2 Решение задачи при $b_0 = 1$

Применим стабилизирующий закон управления вида [40]

$$u = -K^T(\omega)x, \quad (2.6)$$

где

$$K(\omega) = \left[\omega^n \quad C_1 \omega^{n-1} \quad C_2 \omega^{n-2} \quad \dots \quad C_{n-1} \omega \right]^T; \quad (2.7)$$

$C_i, i = \overline{1, n-1}$ – постоянные положительные коэффициенты произвольного гурвицевого полинома алгебраической переменной λ

$$\lambda^n + C_{n-1} \lambda^{n-1} + C_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + C_2 \lambda^2 + C_1 \lambda + 1. \quad (2.8)$$

Параметр ω генерируется одним из трех рассматриваемых в работе алгоритмов адаптации:

а) Алгоритм адаптации с линейной обратной связью №1.

$$\dot{\omega} = -\sigma_1 \omega + \gamma_1 f(y, t) \omega, \quad \omega(0) > 0, \quad (2.9)$$

где γ_1, σ_1 – положительные константы, $\gamma_1 > \sigma_1$; $f(y, t)$ – функция, обладающая следующими свойствами:

- $f(y, t)$ – монотонна;
- $f(y, t) \in C^1$;
- $f(0, t) = 0$;
- $f(y, t) \neq 0$ при $y \neq 0$;
- $\lim_{|y| \rightarrow \infty} f(y, t) \rightarrow 1$.

В качестве примера функции f может быть выбрана функция вида (см. рисунок 2.1)

$$f(y) = \frac{y^2}{1 + y^2}.$$

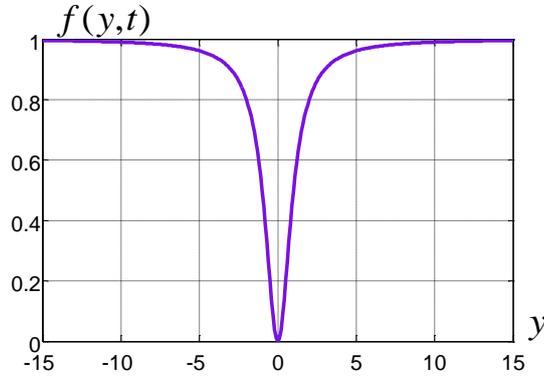
б) Алгоритм адаптации с линейной обратной связью №2.

$$\dot{\omega} = -\sigma_2 \omega + \gamma_2 r(y, t), \quad \omega(0) \geq 0, \quad (2.10)$$

где γ_2, σ_2 – положительные константы; $r(y, t)$ – функция, обладающая следующими свойствами:

- $r(y, t)$ – монотонна;

- $r(y,t) \in C^1$;
- $r(0,t) = 0$;
- $r(y,t) > 0$ при $y \neq 0$.

Рисунок 2.1 – Пример функции $f(y,t)$

В качестве $r(y,t)$ может быть использована параболическая функция

$$r(y) = y^2.$$

в) Алгоритм адаптации со статической нелинейной обратной связью:

$$\omega = \gamma_3 r(y,t), \quad (2.11)$$

где γ_3 – положительная величина.

Проведем анализ замкнутой системы, подставив (2.6) в (2.4):

$$\dot{x} = G(\omega)x + \xi, \quad x(0) \quad (2.12)$$

где

$$G(\omega) = A - BK^T(\omega) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,2} & a_{2,2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & a_{3,n-1} & \dots & 1 \\ a_{1,n} - \omega^n & a_{2,n} - C_1\omega^{n-1} & a_{3,n} - C_2\omega^{n-2} & \dots & a_{n,n} - C_{n-1}\omega \end{bmatrix}.$$

Поясним суть предлагаемого метода. В случае если величина y принимает достаточно большие значения (т.е. не удовлетворяет условию (2.5)), то:

а) $f(y,t) \approx 1$. Следовательно, параметр ω растет согласно (2.9);

б) $r(y,t)$ принимает большие значения в силу свойства монотонности, и параметр ω растет при $\gamma_2 r(y,t) > \sigma_2 \omega$ согласно (2.10);

в) $r(y,t)$ принимает большие значения в силу свойства монотонности. В связи с этим при $\gamma_3 \gg 0$ параметр ω также принимает большие значения согласно (2.11).

Во всех трех случаях при сильном отклонении y от нулевого положения равновесия ω достигает некоторого порога, при котором в характеристическом полиноме матрицы $G(\omega)$

$$R(\lambda, \omega) = \lambda^n + (C_{n-1}\omega + \eta_1^0(\omega))\lambda^{n-1} + (C_{n-2}\omega^2 + \eta_2^1(\omega))\lambda^{n-2} + \dots + (C_1\omega^{n-1} + \eta_{n-1}^{n-2}(\omega))\lambda + (\omega^n + \eta_n^{n-1}(\omega)), \quad (2.13)$$

где $\eta_i^{i-1}(\omega)$, $i = \overline{1, n}$ – полиномы степени $i-1$ с постоянными коэффициентами, зависящими от параметров a_{ij} , функции $\eta_i^{i-1}(\omega)$ пренебрежимо малы по сравнению с соответствующими функциями $C_{n-i}\omega^i$ ($C_0 = 1$). В этом случае полином (2.13) можно приближенно представить в виде

$$R(\lambda, \omega) \approx \bar{R}(\lambda, \omega) = \lambda^n + C_{n-1}\omega\lambda^{n-1} + C_{n-2}\omega^2\lambda^{n-2} + \dots + C_1\omega^{n-1}\lambda + \omega^n. \quad (2.14)$$

В силу гурвицевости полинома (2.8) и теоремы Виета корни последнего полинома имеют отрицательные вещественные части и определяются соотношениями

$$\lambda_i = -q_i\omega, \quad i = \overline{1, n},$$

где q_i некоторые константы с положительными вещественными частями, зависящие от коэффициентов C_i .

Замечание 2.1: Здесь и в последующих разделах главы предполагается, что корни λ_i вещественны и различны. В случае комплексных и/или кратных корней процедура анализа устойчивости модифицируется без потери общего смысла.

Таким образом, при увеличении параметра ω удастся обеспечить переход корней замкнутой системы в левую полуплоскость корневого годографа.

В соответствии с классической теорией управления такое распределение корней гарантирует экспоненциальную устойчивость замкнутой системы. В то же время система (2.12) нестационарна и нелинейна в силу зависимостей (2.9) – (2.11), что, строго говоря, не гарантирует ни ее устойчивости, ни полноты [1, 22]. В связи с этим проведем подробный анализ замкнутой системы. Для чего сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 2.1. Система (2.12), в которой параметр ω формируется одним из алгоритмов адаптации (2.9), (2.10) или (2.11), обладает следующими свойствами:

- а) Все сигналы в системе ограничены;
- б) Величина $y = x_1$ экспоненциально стремится к окрестности нулевого положения равновесия;
- в) Радиус окрестности может быть уменьшен произвольным образом путем увеличения коэффициента γ в применяемом алгоритме адаптации.

Доказательство теоремы 2.1. Декомпозируем матрицу $G(\omega)$ на две составляющие[41]:

$$G(\omega) = \hat{G}(\omega) + \tilde{A}, \quad (2.15)$$

где

$$\hat{G}(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\omega^n & -C_1\omega^{n-1} & -C_2\omega^{n-2} & \cdots & -C_{n-1}\omega \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,2} & a_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & a_{3,n-1} & \dots & 0 \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix},$$

Отметим, что в силу структуры фробениусовой матрицы \hat{G} , ее собственные числа являются корнями полинома (2.14) и равны $\lambda_i = -q_i \omega$, $i = \overline{1, n}$.

Преобразуем (2.12) к эквивалентной форме с помощью линейного преобразования $x = Q(\omega)z$ с диагональной матрицей

$$Q(\omega) = \text{diag} \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}.$$

После перехода к новым координатам с учетом (2.12) получаем:

$$\dot{z} = \left(-\dot{Q}^{-1}(\omega)Q(\omega) + Q^{-1}(\omega)\hat{G}(\omega)Q(\omega) + Q^{-1}(\omega)\tilde{A}Q(\omega) \right) z + Q^{-1}(\omega)\xi. \quad (2.16)$$

Последовательно преобразуем члены правой части полученного равенства:

а) $\dot{Q}^{-1}(\omega)Q(\omega) = L \frac{\dot{\omega}}{\omega}$, $L = \text{diag} \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$;

б) $Q^{-1}(\omega)\hat{G}(\omega)Q(\omega) = \bar{G}\omega$,

$$\bar{G} = \hat{G}(\omega) \Big|_{\omega=1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & -C_1 & -C_2 & \dots & -C_{n-1} \end{bmatrix};$$

в) $Q^{-1}(\omega)\tilde{A}Q(\omega) = \hat{A}(\omega)\omega$,

$$\hat{A}(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{a_{1,1}}{\omega} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{1,2}}{\omega^2} & \frac{a_{2,2}}{\omega} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{1,n}}{\omega^{n-1}} & \frac{a_{2,n}}{\omega^{n-2}} & \frac{a_{3,n}}{\omega^{n-3}} & \dots & 0 \\ \frac{a_{1,n}}{\omega^n} & \frac{a_{2,n}}{\omega^{n-1}} & \frac{a_{3,n}}{\omega^{n-2}} & \dots & \frac{a_{n,n}}{\omega} \end{bmatrix};$$

$$\Gamma) Q^{-1}(\omega)\xi = \left[\xi_1, \xi_2 / \omega, \xi_3 / \omega^2, \dots, \xi_n / \omega^{n-1} \right]^T.$$

Замечание 2.2: Матрица \bar{G} имеет собственные числа $-q_i, i = \overline{1, n}$, равные корням полинома (2.14) при $\omega=1$.

С учетом проведенных преобразований перепишем (2.16) в более компактной форме:

$$\dot{z} = \left(\hat{A}(\omega) - L \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} + \bar{G} \right) \omega z + Q^{-1}(\omega)\xi. \quad (2.17)$$

Покажем, что при достижении величины ω достаточно большого значения ω_0 в момент времени t_1 , система (2.17) становится экспоненциально устойчивой (см. рисунок 2.2 а)). При этом свойство устойчивости сохраняется при $\omega \geq \omega_0$ и $t \geq t_1$.

В силу робастности свойства экспоненциальной устойчивости достаточно показать, что если система обладает этим свойством в предельном случае при $\omega \rightarrow \infty$, то она сохраняет его и при ограниченном ω .

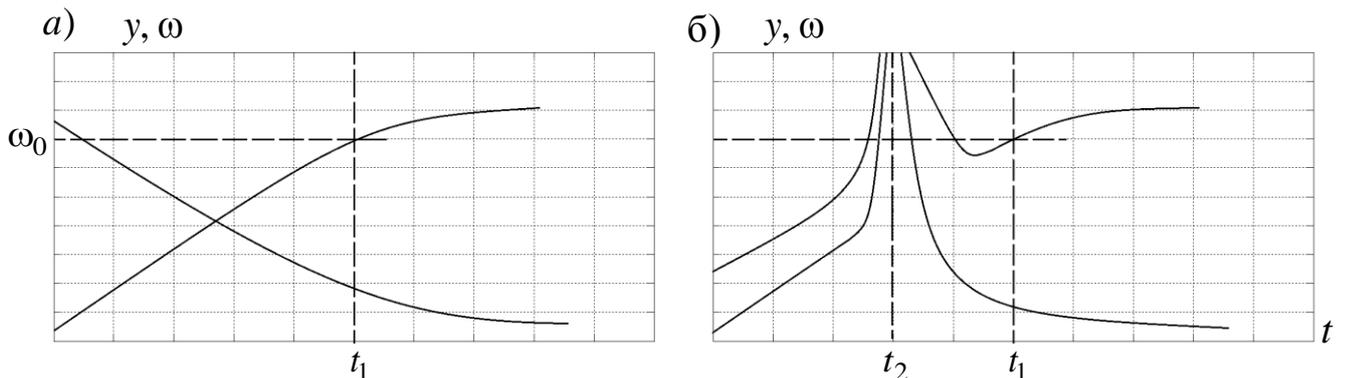


Рисунок 2.2 – Иллюстрации к анализу устойчивости и полноты системы

Покажем, что:

а)

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\hat{A}(\omega) - L \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} + \bar{G} \right) = \bar{G}; \quad (2.18)$$

б) “Предельная” система

$$\dot{z} = \bar{G} \omega z \quad (2.19)$$

экспоненциально устойчива.

Учитывая, что величина $\lim_{\omega \rightarrow \infty} (Q^{-1}(\omega)\xi) = [\xi_1, 0, \dots, 0]^T$ ограничена, то при условии экспоненциальной устойчивости системы (2.19) “предельная” возмущенная система

$$\dot{z} = \bar{G} \omega z + \xi_1 e_1, \quad (2.20)$$

где $e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$, также будет экспоненциально устойчивой.

В силу определения матрицы $\hat{A}(\omega)$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (\hat{A}(\omega)) = O_{n \times n},$$

где $O_{n \times n}$ – нулевая матрица размерности $n \times n$.

Далее для доказательства затухания члена $\dot{\omega}/\omega^2$ в (2.18) сформулируем и докажем две леммы.

Лемма 2.1. Система (2.12) (равно как и эквивалентная ее система (2.17)), в которой ω генерируется одним из алгоритмов адаптации (2.9), (2.10) или (2.11), является полной на интервале $t \in [0, t_1)$.

Доказательство леммы 2.1. В общем случае возможен один из трех сценариев поведения решения системы дифференциальных уравнений в некоторый момент времени $t_2 \in [0, t_1]$:

1. Предел (правый или левый) $\lim_{t \rightarrow t_2} x_i$ существует и конечен, т.е. в

решении нет разрыва;

2. Предел (правый или левый) $\lim_{t \rightarrow t_2} x_i$ существует и неограничен, т.е.

присутствует разрыв второго рода;

3. Предел (правый или левый) $\lim_{t \rightarrow t_2} x_i$ не существует, т.е. присут-

ствует разрыв первого (устранимый) или второго (неустранимый) рода.

Допустим, что система не является полной на интервале $[0, t_1)$. В этом случае в связи с отсутствием в системе (2.12) функций с разрывами первого рода или функций с разрывами второго рода, в которых не существует пределов, решения x и ω также не содержат указанных разрывов, т.е. третий сценарий поведения решений невозможен. В то же время не гарантируется ограниченность решений на конечном интервале $t \in [0, t_1)$ (см. рисунок 2.2 б)), что можно показать с помощью простого примера. Система, описываемая уравнением вида

$$\dot{x} = -x^2, x(0),$$

не является полной, т.к. решение

$$x(t) = \frac{x(0)}{x(0) + t}$$

при $x(0) = -t_2$, $t_2 \in [0, t_1]$ имеет неограниченный предел $\lim_{t \rightarrow t_2} x$ (в англоязыч-

ной литературе принят термин *escape finite time phenomena*).

Таким образом, остается доказать отсутствие второго сценария для решений x и ω . Докажем отсутствие таких разрывов от противного и допустим, что

$$\lim_{t \rightarrow t_2^-} y = +\infty. \quad (2.21a)$$

Как следствие справедливы следующие соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow t_2^-} \dot{y}(t) = \lim_{t-t_2 \rightarrow 0^-} \frac{y(t) - y(t_2)}{t - t_2} = +\infty, \\ \lim_{t \rightarrow t_2^-} \ddot{y}(t) = \lim_{t-t_2 \rightarrow 0^-} \frac{\dot{y}(t) - \dot{y}(t_2)}{t - t_2} = +\infty, \\ \dots\dots\dots, \\ \lim_{t \rightarrow t_2^-} y^{(n)}(t) = \lim_{t-t_2 \rightarrow 0} \frac{y^{(n-1)}(t) - y^{(n-1)}(t_2)}{t - t_2} = +\infty. \end{array} \right. \quad (2.21б)$$

Далее перепишем (2.12) в форме “вход-выход”:

$$\begin{aligned} y^{(n)} + (C_{n-1}\omega + \varphi_1(a_{ij}))y^{(n-1)} + (C_{n-2}\omega^2 + \varphi_2(a_{ij}))y^{(n-2)} + \dots + \\ + (C_1\omega^{n-1} + \varphi_{n-1}(a_{ij}))\dot{y} + (\omega^n + \varphi_n(a_{ij}))y = \varpi(\xi_i^{(j)}), \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $\varphi_i, i = \overline{1, n}$ – функции параметров матрицы A , $\varpi(\xi_i^{(j)})$, $i = \overline{0, n-1}, j = \overline{0, n-1}$ – линейная по своим аргументам функция, ограниченная в силу допущения б.

Так как φ_i – постоянные величины, а $\omega > 0$, то с учетом (2.21) левая часть дифференциального уравнения (2.22) стремится в плюс бесконечность. В то же время правая часть уравнения $\varpi(\xi_i^{(j)})$ ограничена, что является противоречием. Как следствие, предельные равенства (2.21) не выполняются.

Аналогичным образом доказывается, что $\lim_{t \rightarrow t_2^-} x_i \neq +\infty, \lim_{t \rightarrow t_2^+} x_i \neq +\infty,$

$$\lim_{t \rightarrow t_2^-} x_i \neq -\infty, \lim_{t \rightarrow t_2^+} x_i \neq -\infty.$$

Таким образом, в системе не наблюдается разрывов второго рода с неограниченным ростом решений x на конечном интервале времени, откуда следует выполнение только первого сценария поведения решения системы (2.12). Иными словами система (2.12) полная. Как следствие, функции ω непрерывны в силу (2.9)-(2.12). Лемма доказана.

□

Следствие 2.1: Из результатов леммы 2.1 и структуры алгоритмов адаптации (2.9), (2.10), (2.11) следует, непрерывность функции $\dot{\omega}/\omega^2$ при $\omega > 0^2$

Лемма 2.2. Величина $\dot{\omega}/\omega$ стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$.

Доказательство леммы 2.2. Для доказательства воспользуемся леммой Барбалата [1], в рамках которой должны выполняться два условия:

- а) $\dot{\omega}/\omega \in L_1$ (интеграл $\int_0^t \dot{\omega}(\tau)/\omega^2(\tau)d\tau$ ограничен) $\forall t \in [0, \infty)$;
- б) $\dot{\omega}/\omega \in C^0 \quad \forall t \in [0, \infty)$.

В соответствии со структурами алгоритмов адаптации (2.9), (2.10) или (2.11) величина ω положительна для любых $t \geq 0$ и $y \neq 0$. Следовательно,

$$\int_0^t \frac{\dot{\omega}(\tau)}{\omega^2(\tau)} d\tau = \frac{1}{\omega(0)} - \frac{1}{\omega(t)} \leq \frac{1}{\omega(0)}.$$

Представленный интеграл ограничен снизу, т.к. в противном случае при $\omega(t) = 0$ в уравнениях (2.9) и (2.10) нарушается тождественность при $y \neq 0$, а в (2.11) достигается целевое условие (2.5) ($y = 0$), что лишает смысла проводимые доказательства.

Функция $\dot{\omega}/\omega$ непрерывна в силу следствия 2.1.

Таким образом, применяя лемму Барбалата и принимая во внимание ограниченность интеграла $\int_0^t \dot{\omega}(\tau)/\omega^2(\tau)d\tau$ при растущем ω , завершаем доказательство леммы. □

Учитывая стремление $\hat{A}(\omega)$ и $\dot{\omega}/\omega$ к нулевой матрице и к нулю соответственно при ω стремищемся в бесконечность, приходим к равенству (2.18). Как следствие решение z уравнения (2.17) стремится к решению (2.20)

² Случай равенства нулю ω не рассматривается, так как в противном случае $y = 0$ в соответствии с (2.11) или y стремится к нулю в соответствии с (2.9) или (2.10), что удовлетворяет целевому условию (2.5)

(или (2.19) при отсутствии возмущения), устойчивость которой докажем на основе функции Ляпунова

$$V = z^T (W^T)^{-1} W^{-1} z, \quad (2.23)$$

где

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -q_1 & -q_2 & \cdots & -q_n \\ (-q_1)^2 & (-q_2)^2 & \cdots & (-q_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-q_1)^{n-1} & (-q_2)^{n-1} & \cdots & (-q_n)^{n-1} \end{bmatrix}$$

– матрица Вандермонда, которая содержит собственные числа матрицы \bar{G} и имеет структуру в соответствии с замечанием 2.1. Дифференцируя V с учетом (2.20), имеем:

$$\dot{V} = z^T \bar{G}^T (W^T)^{-1} W^{-1} z \omega + z^T (W^T)^{-1} W^{-1} \bar{G} z \omega + 2z^T (W^T)^{-1} W^{-1} \xi_1 e_1.$$

Учитывая диагонализующее свойство матрицы Вандермонда, из которого следует равенство $\Lambda = W^{-1} \bar{G} W$, где $\Lambda = \text{diag} \{-q_i, i = \overline{1, n}\}$, и вводя новые обозначения $\bar{z} = Wz$, $\zeta = W\xi_1 e_1 \leq \bar{\zeta}$, окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\omega \bar{z}^T \Lambda \bar{z} + 2\bar{z}^T \zeta = -\omega \min_i \{q_i\} \bar{z}^T \bar{z} - \left(\omega \min_i \{q_i\} \bar{z}^T \bar{z} + 2\bar{z}^T \zeta \pm \frac{\zeta^T \zeta}{\omega \min_i \{q_i\}} \right) = \\ &= -\omega \min_i \{q_i\} \|\bar{z}\|^2 - \left(\sqrt{\omega \min_i \{q_i\}} \|\bar{z}\| + \sqrt{\frac{1}{\omega \min_i \{q_i\}}} \|\zeta\| \right)^2 + \frac{\zeta^T \zeta}{\omega \min_i \{q_i\}} \leq \\ &\leq -\omega \min_i \{q_i\} \|\bar{z}\|^2 + \frac{\|\zeta\|^2}{\omega \min_i \{q_i\}} = -\omega \min_i \{q_i\} V + \frac{\|\zeta\|^2}{\omega \min_i \{q_i\}} \end{aligned}$$

или

$$\dot{V} \leq -\omega \min_i \{q_i\} V + \frac{\|\bar{\xi}\|^2}{\omega \min_i \{q_i\}}. \quad (2.24)$$

Из полученного дифференциального неравенства и (2.23) следует, что

$$\begin{aligned} z^T W^T W z \leq \exp\left(-\min_i \{q_i\} \int_0^t \omega(\tau) d\tau\right) V(0) + \\ + \int_0^t \exp\left(-\min_i \{q_i\} \int_\tau^t \omega(\xi) d\xi\right) \frac{\|\bar{\xi}\|^2}{\omega(\tau) \min_i \{q_i\}} d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, в предельном случае, когда величина ω бесконечно большая, гарантируется экспоненциальная сходимость z к нулевому положению равновесия с бесконечно большой скоростью. Из преобразования $x = Q(\omega)z$ следует $x_1 = z_1 = y$ (где x_1, z_1 – первые элементы векторов x_1 и z_1 соответственно) и экспоненциальное стремление y к нулю при $\omega \rightarrow \infty$.

В связи с тем, что $y = x_1$ экспоненциально затухает при $\omega \rightarrow \infty$, то:

- а) в выражении (2.9) при достаточно малых y член $-\sigma_1 \omega$ будет доминировать над $\gamma_1 f(y, t) \omega$ и, как следствие, ω будет затухать;
- б) в выражении (2.10) при достаточно малых y член $-\sigma_2 \omega$ будет доминировать над $\gamma_2 r(y, t)$ и, как следствие, ω будет затухать;
- в) в выражении (2.11) ω будет уменьшаться.

Таким образом, величина ω остается ограниченной в системе с любым приведенным алгоритмом адаптации. В силу робастности свойства экспоненциальной устойчивости при достаточно больших (см. рисунок 2.2), но ограниченных $\omega \geq \omega_0$ система (2.17) остается экспоненциально устойчивой. Следовательно, $\|z\|$ и y стремятся с ограниченной скоростью только в некоторую окрестность нулевого положения равновесия.

Замечание 2.3. С помощью метода функций Ляпунова доказана устойчивость системы только для моментов времени $t \geq t_1$. Учитывая свойство

полноты системы (2.17), доказанное в лемме 2.1, приходим к выводу об устойчивости замкнутой системы на всем интервале времени $t \in [0, \infty)$.

Радиус окрестности может быть уменьшен произвольным образом за счет увеличения порога ω_0 или амплитуды ω , что видно из выражения (2.17), где при увеличении ω фактор доминирования матрицы \bar{G} над $\hat{A}(\omega) - L\dot{\omega}/\omega^2$ становится более существенным, и из анализа выражения (2.24), в котором величиной слагаемого $\|\bar{\xi}\|^2 / \omega \min_i \{q_i\}$ определяется радиус окрестности. Увеличение амплитуды, в свою очередь, обеспечивается за счет коэффициентов γ_1 , γ_2 или γ_3 в алгоритме (2.9), (2.10) и (2.11) соответственно.

Таким образом, доказаны пункты а)- в) теоремы 2.1 □

В качестве заключения раздела отметим следующие базовые результаты, которые модифицируются в последующих задачах управления:

Результат 1. Показано, что собственные числа матрицы замкнутой системы $G(\omega)$ стремятся в левую полуплоскость корневого годографа при $\omega \rightarrow \infty$ и остаются в ней при $\omega \geq \omega_0$, где ω_0 – достаточно большая величина;

Результат 2. Показано, что система является полной, т.е. имеет непрерывные и ограниченные решения $x(t)$, $\omega(t)$ на любом конечном интервале времени;

Результат 3. Доказана устойчивость замкнутой системы, которая обеспечивается за счет доминирования величины ω над параметрическими неопределенностями модели объекта и возмущением ξ .

Далее, используя полученные результаты, ход доказательства теоремы 2.1 и сопутствующих лемм, расширим полученные результаты на случай, когда $b_0 \geq b_{0\min}$.

2.2.3 Решение задачи при $b_0 \geq b_{0\min}$

Положим, что $b_0 \geq b_{0\min}$, где $b_{0\min}$ – известная величина, и модифицируем закон управления (2.6):

$$u = -\frac{1}{b_{0\min}} K^T(\omega)x, \quad (2.25)$$

где $K(\omega)$ определяется (2.7); $C_i, i = \overline{1, n-1}$ в (2.7) – постоянные положительные коэффициенты произвольного гурвицевого полинома (2.8); параметр ω генерируется одним из алгоритмов адаптации (2.9), (2.10) или (2.11).

Подставляя (2.25) в (2.4), получим уравнение замкнутой системы

$$\dot{x} = G(\omega)x + \xi, \quad x(0), \quad (2.26)$$

в котором

$$G(\omega) = A - \frac{1}{b_{0\min}} BK^T(\omega) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,2} & a_{2,2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & a_{3,n-1} & \dots & 1 \\ a_{1,n} - \bar{b}_0\omega^n & a_{2,n} - \bar{b}_0C_1\omega^{n-1} & a_{3,n} - \bar{b}_0C_2\omega^{n-2} & \dots & a_{n,n} - \bar{b}_0C_{n-1}\omega \end{bmatrix},$$

$$\bar{b}_0 = b_0 / b_{0\min}.$$

По аналогии с анализом решения задачи в разделе 2.2.2 проанализируем алгебраический спектр матрицы $G(\omega)$. Для этого сформируем характеристический полином $G(\omega)$:

$$R(\lambda, \omega) = \lambda^n + (\bar{b}_0C_{n-1}\omega + \eta_1^0(\omega))\lambda^{n-1} + (\bar{b}_0C_{n-2}\omega^2 + \eta_2^1(\omega))\lambda^{n-2} + \dots + (\bar{b}_0C_1\omega^{n-1} + \eta_{n-1}^{n-2}(\omega))\lambda + (\bar{b}_0\omega^n + \eta_n^{n-1}(\omega)), \quad (2.27)$$

где функции $\eta_i^{i-1}(\omega), i = \overline{1, n}$ определены в (2.13). В случае если параметр ω достаточно большой, то функции $\eta_i^{i-1}(\omega)$ пренебрежимо малы по сравнению

с функциями $C_{n-i}\omega^i$ ($C_0=1$). В этом случае полином (2.27) можно приближенно представить в виде

$$R(\lambda, \omega) \approx \bar{R}(\lambda, \omega) = \lambda^n + \bar{b}_0 \left(C_{n-1}\omega\lambda^{n-1} + C_{n-2}\omega^2\lambda^{n-2} + \dots + C_1\omega^{n-1}\lambda + \omega^n \right). \quad (2.28)$$

Далее сформулируем и докажем следующую лемму.

Лемма 2.3. Полином (2.28) гурвицев в силу гурвицевости полинома (2.8).

Доказательство леммы 2.3. Воспользуемся необходимыми и достаточными условиями устойчивости, сформулированными В.С. Вороновым [42]. В работе [42] для полинома вида

$$C_n\lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + C_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + C_2\lambda^2 + C_1\lambda + C_0$$

вводятся показатели (меры) устойчивости

$$\delta_k = \frac{C_k C_{k+1}}{C_{k-1} C_{k+2}}, k = \overline{1, n-2}, \quad (2.29)$$

с помощью которых определяются следующие необходимые и достаточные условия устойчивости системы, построенной на базе этого полинома:

а) Необходимые условия:

$$\delta_k > 1; \quad (2.30)$$

б) Достаточные условия:

$$\delta_k > 2,148. \quad (2.31)$$

Применим данные условия к полиному (2.28) и выпишем для него последовательность (2.29):

$$\delta_1 = \frac{C_1 C_2}{C_3}, \delta_2 = \frac{C_2 C_3}{C_1 C_4}, \dots, \delta_{n-3} = \frac{C_{n-3} C_{n-2}}{C_{n-4} C_{n-1}}, \delta_{n-2} = \frac{\bar{b}_0 C_{n-2} C_{n-1}}{C_{n-3}}.$$

Коэффициент \bar{b}_0 встречается только в последнем показателе и всегда не меньше единицы по определению. Следовательно, так как условия (2.30), (2.31) выполняются для полинома (2.8) (в котором $\bar{b}_0=1$) в силу его устойчивости, то они выполняются и при $\bar{b}_0 \geq 1$ для (2.28). \square

Таким образом, с помощью леммы показано, что при росте ω собственные числа матрицы $G(\omega)$ (корни полинома (2.27)) стремятся в левую полуплоскость корневого годографа.

Приведем формулировку теоремы об устойчивости системы (2.26) и, воспользовавшись результатами, полученными в ходе доказательства теоремы 2.1, докажем ее.

Теорема 2.2. Система (2.26), в которой параметр ω формируется одним из алгоритмов адаптации (2.9), (2.10) или (2.11), обладает следующими свойствами:

- а) Все сигналы в системе ограничены;
- б) Величина $y = x_1$ экспоненциально стремится к окрестности нулевого положения равновесия;
- в) Радиус окрестности может быть уменьшен произвольным образом путем увеличения коэффициента γ в применяемом алгоритме адаптации.

Доказательство теоремы 2.2. Декомпозируем матрицу $G(\omega)$ на две составляющие:

$$G(\omega) = \hat{G}(\omega) + \tilde{A}, \quad (2.32)$$

где

$$\hat{G}(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\bar{b}_0\omega^n & -\bar{b}_0C_1\omega^{n-1} & -\bar{b}_0C_2\omega^{n-2} & \cdots & -\bar{b}_0C_{n-1}\omega \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1,2} & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & a_{3,n-1} & \cdots & 0 \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix},$$

В силу структуры фробениусовой матрицы \hat{G} , ее собственные числа являются корнями полинома (2.28) и равны $\lambda_i = -q_i(\bar{b}_0)\omega$, $i = \overline{1, n}$, где $q_i(\bar{b}_0)$ – положительные константы (см. замечание 2.1 и результат леммы 2.3).

Преобразуем (2.26) к эквивалентной форме с помощью линейного преобразования $x = Q(\omega)z$ с диагональной матрицей

$$Q(\omega) = \text{diag} \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}.$$

После перехода к новым координатам с учетом (2.26) получаем:

$$\dot{z} = \left(\dot{Q}^{-1}(\omega)Q(\omega) + Q^{-1}(\omega)\hat{G}(\omega)Q(\omega) + Q^{-1}(\omega)\tilde{A}Q(\omega) \right) z + Q^{-1}(\omega)\xi. \quad (2.33)$$

Последовательно преобразуем слагаемые правой части полученного равенства:

а) $\dot{Q}^{-1}(\omega)Q(\omega) = L \frac{\dot{\omega}}{\omega}$, $L = \text{diag} \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$;

б) $Q^{-1}(\omega)\hat{G}(\omega)Q(\omega) = \bar{G}\omega$,

$$\bar{G} = \hat{G}(\omega) \Big|_{\omega=1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\bar{b}_0 & -\bar{b}_0 C_1 & -\bar{b}_0 C_2 & \dots & -\bar{b}_0 C_{n-1} \end{bmatrix};$$

в) $Q^{-1}(\omega)\tilde{A}Q(\omega) = \hat{A}(\omega)\omega$,

$$\hat{A}(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{a_{1,1}}{\omega} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{1,2}}{\omega^2} & \frac{a_{2,2}}{\omega} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{1,n}}{\omega^{n-1}} & \frac{a_{2,n}}{\omega^{n-2}} & \frac{a_{3,n}}{\omega^{n-3}} & \dots & 0 \\ \frac{a_{1,n}}{\omega^n} & \frac{a_{2,n}}{\omega^{n-1}} & \frac{a_{3,n}}{\omega^{n-2}} & \dots & \frac{a_{n,n}}{\omega} \end{bmatrix};$$

г) $Q^{-1}(\omega)\xi = \left[\xi_1, \xi_2 / \omega, \xi_3 / \omega^2, \dots, \xi_n / \omega^{n-1} \right]^T$.

Замечание 2.4: Матрица \bar{G} имеет собственные числа $-q_i(\bar{b}_0)$, $i = \overline{1, n}$, совпадающие с корнями полинома (2.28) при $\omega = 1$.

С учетом проведенных преобразований перепишем (2.33) в более компактной форме:

$$\dot{z} = \left(\hat{A}(\omega) - L \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} + \bar{G} \right) \omega z + Q^{-1}(\omega) \xi. \quad (2.34)$$

Далее свойства а)-в) теоремы доказываются идентично доказательству теоремы 2.1:

— показывается, что член $\hat{A}(\omega) - L \frac{\dot{\omega}}{\omega^2}$ убывает при увеличении ω ;

— аналогично доказательству леммы 2.1 способом от противного доказывается полнота системы (2.26) и ее эквивалентной формы (2.34). При этом модель “вход-выход” вида (2.22) представляется в модифицированной форме

$$y^{(n)} + (\bar{b}_0 C_{n-1} \omega + \varphi_1(a_{ij})) y^{(n-1)} + (\bar{b}_0 C_{n-2} \omega^2 + \varphi_2(a_{ij})) y^{(n-2)} + \dots + (\bar{b}_0 C_1 \omega^{n-1} + \varphi_{n-1}(a_{ij})) \dot{y} + (\bar{b}_0 \omega^n + \varphi_n(a_{ij})) y = \varpi(\xi_i^{(j)});$$

— вводится функция Ляпунова вида (2.23) и с учетом (2.34) анализируется ее производная;

— показывается, что свойства теоремы а)- в) выполняются. \square

Таким образом, в настоящем разделе показано, что использование неизвестного коэффициента $b_0 \geq b_{0 \min}$ при соответствующей модификации закона управления (2.25) не сказывается доказанных в разделе 2.2.2 свойствах замкнутой системы.

Далее приводится решение задачи управления стационарным объектом с произвольной относительной степенью. При этом используются полученные в настоящем разделе результаты.

2.3 Решение задачи стабилизации стационарного объекта с произвольной относительной степенью

2.3.1 Постановка задачи

Пусть объект описывается следующим уравнением:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \xi, & x(0), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (2.35)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{\rho,n-1} & 0 & \cdots & 1 \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{\rho,n} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}.$$

Параметры $a_{i,j}$, $i = \overline{1,\rho}$, $j = \overline{1,n}$, b_k , $k = \overline{0,m}$ предполагаются неизвестными.

Класс объектов (2.4) ограничен допущениями 1, 2, 4-6.

Цель заключается в построении закона управления, который обеспечивает в замкнутой системе ограниченность всех сигналов и выполнение целевого неравенства (2.5).

2.3.2 Решение задачи

Положим, что $b_m \geq b_{m \min}$, где $b_{m \min}$ – известная величина, и модифицируем закон управления (2.25):

$$u = -\frac{1}{b_{m \min}} K^T(\omega)x, \quad (2.36)$$

где

$$K^T(\omega) = [\omega^\rho, C_{\rho-1}\omega^{\rho-1}, \dots, C_2\omega^2, C_1\omega, 0, \dots, 0]; \quad (2.37)$$

$C_i, i = \overline{1, \rho-1}$ – постоянные положительные коэффициенты произвольного гурвицевого полинома

$$\lambda^\rho + C_1 \lambda^{\rho-1} + C_2 \lambda^{\rho-2} + \dots + C_{\rho-1} \lambda + 1. \quad (2.38)$$

Параметр ω генерируется одним из трех алгоритмов адаптации (2.9), (2.10) или (2.11).

В целях анализа замкнутой системы подставим (2.36) в (2.35) и получим уравнение замкнутой системы:

$$\dot{x} = G(\omega)x + \xi, \quad x(0), \quad (2.39)$$

где

$$G(\omega) = A - BK^T(\omega) / b_{m \min} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1, \rho-1} & a_{2, \rho-1} & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1, \rho} - \bar{b}_m \omega^\rho & a_{2, \rho} - \bar{b}_m C_{\rho-1} \omega^{\rho-1} & \dots & a_{\rho, \rho} - \bar{b}_m C_1 \omega & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1, n-1} - \bar{b}_1 \omega^\rho & a_{2, n-1} - \bar{b}_1 C_{\rho-1} \omega^{\rho-1} & \dots & a_{\rho, n-1} - \bar{b}_1 C_1 \omega & 0 & \dots & 1 \\ a_{1, n} - \bar{b}_0 \omega^\rho & a_{2, n} - \bar{b}_0 C_{\rho-1} \omega^{\rho-1} & \dots & a_{\rho, n} - \bar{b}_0 C_1 \omega & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b}_i = b_i / \bar{b}_m \min.$$

Проанализируем алгебраический спектр матрицы $G(\omega)$ с помощью ее характеристического полинома

$$R(\lambda, \omega) = \lambda^n + \varphi(\lambda) + \frac{1}{b_{m \min}} b(\lambda) \left((C_{\rho-1} \omega + \eta_1^0(\omega)) \lambda^{\rho-1} + \right. \\ \left. + (C_{\rho-2} \omega^2 + \eta_2^1(\omega)) \lambda^{\rho-2} + \dots + (C_1 \omega^{\rho-1} + \eta_{\rho-1}^{\rho-2}(\omega)) \lambda + (\omega^\rho + \eta_\rho^{\rho-1}(\omega)) \right), \quad (2.40)$$

где $b(\lambda) = b_m \lambda^m + b_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0$, $\eta_i^{i-1}(\omega)$, $i = \overline{1, n}$ – полиномы степени $i-1$ с постоянными коэффициентами, зависящими от a_{ij} ; $\varphi(\lambda)$ – полином степени $n-1$ с постоянными коэффициентами, зависящими от a_{ij} . При до-

статочнo больших значениях ω функции $\eta_i^{i-1}(\omega)$ пренебрежимо малы по сравнению с функциями $C_{n-i}\omega^i$ ($C_0=1$), а коэффициенты полинома $\varphi(\lambda)$ пренебрежимо малы по сравнению с остальными коэффициентами полинома, зависящими от ω . Следовательно, при достаточно больших ω полином (2.40) может быть приближенно представлен как

$$R(\lambda, \omega) \approx \bar{R}(\lambda, \omega) = \lambda^n + \frac{b(\lambda)}{b_{m \min}} \left(C_{\rho-1} \omega \lambda^{\rho-1} + \dots + C_1 \omega^{\rho-1} \lambda + \omega^\rho \right). \quad (2.41)$$

Далее сформулируем и докажем лемму о предельных значениях корней полинома (2.41).

Лемма 2.4. Пусть справедливо допущение 3 и полином (2.38) гурвицев. Тогда корни полинома (2.41) имеют следующие предельные значения:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \{\lambda_k\} = \begin{cases} -q_i, i = \overline{1, m}, \\ -q_j \omega, j = \overline{m+1, n}, \end{cases} \quad (2.42)$$

где q_i, q_j – положительные константы, зависящие от коэффициентов $C_i, i = \overline{1, \rho-1}$ (см. замечание 2.1) и параметров $b_i, i = \overline{0, m}$.

Доказательство леммы 2.4. Рассмотрим характеристическое уравнение с полиномом (2.41)

$$\bar{R}(\lambda, \omega) = \lambda^n + \frac{b(\lambda)}{b_{m \min}} \left(C_{\rho-1} \omega \lambda^{\rho-1} + \dots + C_1 \omega^{\rho-1} \lambda + \omega^\rho \right) = 0 \quad (2.43)$$

и разделим его правую и левую части на ω^n . Далее, подставим указанные значения λ_i и λ_j . Проведем проверку двух полученных полиномов с предельными значениями коэффициентов:

$$а) \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\lambda_i^n}{\omega^n} + \frac{b(\lambda_i)}{b_{m \min} \omega^m} \left(1 + C_{\rho-1} \omega^{-1} \lambda_i + \dots + C_1 \omega^{1-\rho} \lambda_i^{\rho-1} \right) \right\} =$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ (-1)^n \frac{q_i^n}{\omega^n} + \frac{b(-q_i)}{b_{m \min} \omega^m} \left(1 - C_{\rho-1} \omega^{-1} q_i + \dots + (-1)^{\rho-1} C_1 \omega^{1-\rho} q_i^{\rho-1} \right) \right\} = \frac{b(-q_i)}{b_{m \min} \omega^m} = 0$$

или

$$b(-q_i) = 0 \quad (2.44a)$$

В силу допущения 2 о минимальной фазовости объекта предельные параметры q_i , $j = \overline{1, m}$ имеют положительные значения;

$$\begin{aligned} \text{б) } & \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\lambda_j^n}{\omega^n} + \frac{b(\lambda_j)}{b_{m \min} \omega^m} \left(1 + C_{\rho-1} \omega^{-1} \lambda_j + \dots + C_1 \omega^{1-\rho} \lambda_j^{\rho-1} \right) \right\} = \\ & = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ (-1)^n q_j^n + \frac{\left(b_m (-1)^m q_j^m \omega^m + \dots - b_1 q_j \omega + b_0 \right)}{b_{m \min} \omega^m} \left(1 - C_{\rho-1} q_j + \dots + (-1)^{\rho-1} C_1 q_j^{\rho-1} \right) \right\} = \\ & = (-1)^n q_j^n + \frac{b_m (-1)^m q_j^m}{b_{m \min}} \left(1 - C_{\rho-1} q_j + \dots + (-1)^{\rho-1} C_1 q_j^{\rho-1} \right) = 0. \end{aligned}$$

Исключив $(-1)^m q_j^m$ из левой и правой частей, получим второе предельное равенство:

$$(-q_j)^\rho + \frac{b_m}{b_{m \min}} \left(C_1 (-q_j)^{\rho-1} + \dots - C_{\rho-1} q_j + 1 \right) = 0 \quad (2.44б)$$

Учитывая, что $b_m / b_{m \min} \geq 1$ (в силу определения $b_{m \min}$), и принимая во внимание результаты леммы 2.3, приходим к выводу о положительности значений q_j , $j = \overline{m+1, n}$. Лемма доказана. \square

Следствие 2.2. Существует пороговое значение $\omega_0 > 0$ такое, что, если $\omega \geq \omega_0$, то полином (2.41) гурвицев.

Следствие 2.3. Существует пороговое значение $\omega_0 > 0$ такое, что, если $\omega \geq \omega_0$, то полином (2.40) гурвицев.

Учитывая результаты доказательства леммы 2.4 и приведенные следствия, сформулируем и докажем теорему об устойчивости системы (2.39).

Теорема 2.3. Система (2.39), в которой параметр ω формируется одним из алгоритмов адаптации (2.9), (2.10) или (2.11), обладает следующими свойствами:

- а) Все сигналы в системе ограничены;
- б) Величина $y = x_1$ асимптотически стремится к окрестности нулевого положения равновесия;
- в) Радиус окрестности может быть уменьшен произвольным образом путем увеличения коэффициента γ в применяемом алгоритме адаптации.

Замечание 2.5. В ходе доказательства будет приниматься во внимание свойство алгоритмов адаптации (2.9), (2.10), (2.11) усиливать параметр ω при существенно больших $|y|$, не удовлетворяющих целевому неравенству (2.5). При этом устойчивость системы доказывается для случая, когда величина ω конечна, но превышает некоторый порог ω_0 .

Доказательство теоремы 2.3. По аналогии с доказательствами теоремы 2.1 и 2.2 декомпозируем матрицу системы (2.39) $G(\omega)$ на две составляющие:

$$G(\omega) = \hat{G}(\omega) + \tilde{A},$$

где

$$\hat{G}(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\bar{b}_m \omega^p & -\bar{b}_m C_{p-1} \omega^{p-1} & \cdots & -\bar{b}_m C_1 \omega - \bar{b}_{m-1} / \bar{b}_m & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{b}_1 \omega^p & -\bar{b}_1 C_{p-1} \omega^{p-1} & \cdots & -\bar{b}_1 C_1 \omega - \bar{b}_0 / \bar{b}_m & 0 & \cdots & 1 \\ -\bar{b}_0 \omega^p & -\bar{b}_0 C_{p-1} \omega^{p-1} & \cdots & -\bar{b}_0 C_1 \omega & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,\rho-1} & a_{2,\rho-1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1,\rho} & a_{2,\rho} & \cdots & a_{\rho,\rho} + \bar{b}_{m-1} / \bar{b}_m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{\rho,n-1} + \bar{b}_0 / \bar{b}_m & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{\rho,n} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \rho\text{th} & & & \end{bmatrix}.$$

Воспользуемся линейным преобразованием $x = Q(\omega)z$ с матрицей

$$Q(\omega) = \begin{bmatrix} \omega^0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega^1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega^{\rho-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{b}_{m-1}\omega^{\rho-1} / \bar{b}_m & \omega^{\rho-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{b}_0\omega^{\rho-1} / \bar{b}_m & 0 & \cdots & \omega^{\rho-1} \\ & & & \rho-\ddot{y} & & & \end{bmatrix}$$

и преобразуем (2.39) в эквивалентную форму:

$$\dot{z} = \left(-Q^{-1}(\omega)\dot{Q}(\omega) + Q^{-1}(\omega)\tilde{A}Q(\omega) + Q^{-1}(\omega)\hat{G}(\omega)Q(\omega) \right) z + Q^{-1}(\omega)\xi$$

или

$$\dot{z} = \left(-\frac{Q^{-1}(\omega)\dot{Q}(\omega)}{\omega} + \frac{Q^{-1}(\omega)\tilde{A}Q(\omega)}{\omega} + \frac{Q^{-1}(\omega)\hat{G}(\omega)Q(\omega)}{\omega} \right) \omega z + Q^{-1}(\omega)\xi \quad (2.45)$$

Проанализируем последовательно векторно-матричные произведения в правой части полученного выражения.

а) Инверсия матрицы $Q(\omega)$ и произведение $-Q^{-1}(\omega)\dot{Q}(\omega)/\omega$ принимают следующую форму:

$$Q^{-1}(\omega) = \begin{bmatrix} \omega^0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega^{-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega^{1-\rho} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & -\bar{b}_{m-1}\omega^{1-\rho} / \bar{b}_m & \omega^{1-\rho} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\bar{b}_0\omega^{1-\rho} / \bar{b}_m & 0 & \dots & \omega^{1-\rho} \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

$$-\frac{Q^{-1}(\omega)\dot{Q}(\omega)}{\omega} = -L\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}, \quad (2.47)$$

где $L = \text{diag}\{0, 1, 2, \dots, (\rho-1), \dots, (\rho-1)\}$.

б) Матрица $Q^{-1}(\omega)\tilde{A}Q(\omega) / \omega$ имеет следующий вид:

$$\frac{Q^{-1}(\omega)\tilde{A}Q(\omega)}{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{\omega} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{12}}{\omega^2} & \frac{a_{22}}{\omega} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{1,\rho-1}}{\omega^{\rho-1}} & \frac{a_{2,\rho-1}}{\omega^{\rho-2}} & \dots & \frac{a_{\rho-1,\rho-1}}{\omega} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{1,\rho}}{\omega^\rho} & \frac{a_{2,\rho}}{\omega^{\rho-1}} & \dots & \frac{a_{\rho-1,\rho}}{\omega^2} & \frac{a_{\rho,\rho} + \bar{b}_{m-1} / \bar{b}_m}{\omega} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\mu_{1,1}}{\omega^\rho} & \frac{\mu_{2,1}}{\omega^{\rho-1}} & \dots & \frac{\mu_{\rho-1,1}}{\omega^2} & \frac{\mu_{\rho,1}}{\omega} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\mu_{1,2}}{\omega^\rho} & \frac{\mu_{2,2}}{\omega^{\rho-1}} & \dots & \frac{\mu_{\rho-1,2}}{\omega^2} & \frac{\mu_{\rho,2}}{\omega} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mu_{1,m}}{\omega^\rho} & \frac{\mu_{2,m}}{\omega^{\rho-1}} & \dots & \frac{\mu_{\rho-1,m}}{\omega^2} & \frac{\mu_{\rho,m}}{\omega} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

где $\mu_{i,j}, i = \overline{1,\rho}, j = \overline{1,m}$ – постоянные величины, зависящие от $\bar{b}_k, k = \overline{0,m}$ и $a_{i,j}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$.

в) Матрица $Q^{-1}(\omega)\hat{G}(\omega)Q(\omega)/\omega$ имеет следующий вид:

$$\frac{Q^{-1}(\omega)\hat{G}(\omega)Q(\omega)}{\omega} = \begin{bmatrix} \bar{G}_1 & e_\rho e_1^T / \omega \\ O_{m \times \rho} & \bar{G}_2 / \omega \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

где $O_{m \times \rho} \in R^{m \times \rho}$ – нулевая матрица, $e_i = \underset{i-\text{й}}{\text{col}}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), e_1 \in R^m, e_\rho \in R^\rho$.

Матрица $\bar{G}_1 \in R^{\rho \times \rho}$ определяется как

$$\bar{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\bar{b}_m & -\bar{b}_m C_1 & -\bar{b}_m C_2 & \dots & -\bar{b}_m C_{\rho-1} \end{bmatrix}$$

и имеет сопровождающий гурвицев полином, совпадающий с полиномом (2.44б). Корни (2.44б) $\lambda_j = -q_j, i = \overline{1,\rho}$ определены в лемме 2.4. Матрица

$\bar{G}_2 \in R^{m \times m}$ определяется как

$$\bar{G}_2 = \begin{bmatrix} -\bar{b}_{m-1}/\bar{b}_m & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\bar{b}_{m-2}/\bar{b}_m & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{b}_1/\bar{b}_m & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\bar{b}_0/\bar{b}_m & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

и имеет сопровождающий полином, совпадающий с гурвицевым полиномом (2.44а). Корни (2.44а) $\lambda_i = -q_i, i = \overline{1,m}$ также определены в лемме 2.4.

г) Рассмотрим член $Q^{-1}(\omega)\xi$. Принимая во внимание допущение 7 и (2.46), приходим к выводу об ограниченности нормы $\|Q^{-1}(\omega)\xi\|$ для любых $\omega \in (\omega_{\min}, \infty)$, $\omega_{\min} > 0$.

С учетом полученных матриц (2.47)-(2.49) перепишем уравнение (2.45) в более удобной для анализа форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \frac{R_1(\omega)}{\omega} & \frac{e_\rho e_1^T}{\omega} \\ \frac{R_2(\omega)}{\omega} & O_{m \times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{G}_1 & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & \frac{\bar{G}_2}{\omega} - I_{m \times m}(\rho-1)\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \end{bmatrix} \right) \omega \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + Q^{-1}(\omega)\xi, \quad (2.50)$$

где $R_1 \in R^{\rho \times \rho}$, $R_2 \in R^{m \times \rho}$ матричные функции, зависящие от элементов первых ρ столбцов (2.48) и имеющие ограниченные нормы (для любых $\omega \in (\omega_{\min}, \infty)$, $\omega_{\min} > 0$); $z_1 \in R^\rho$, $z_2 \in R^m$ – компоненты вектора $z = [z_1, z_2]$; $O_{m \times m} \in R^{m \times m}$, $O_{\rho \times m} \in R^{\rho \times m}$, $O_{n-1 \times 1} \in R^{n-1 \times 1}$ – нулевые матрицы; $I_{m \times m} \in R^{m \times m}$ – диагональная единичная матрица.

Проанализируем устойчивость системы (2.50) с помощью функции Ляпунова

$$V = z_1^T (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} z_1 + z_2^T (W_2^T)^{-1} W_2^{-1} z_2, \quad (2.51)$$

где

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -q_1 & -q_2 & \dots & -q_\rho \\ (-q_1)^2 & (-q_2)^2 & \dots & (-q_\rho)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-q_1)^{\rho-1} & (-q_2)^{\rho-1} & \dots & (-q_\rho)^{\rho-1} \end{bmatrix},$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} (-q_{\rho+1})^{m-1} \dots (-q_{\rho+1})^2 & -q_{\rho+1} & 1 \\ (-q_{\rho+2})^{m-1} \dots (-q_{\rho+2})^2 & -q_{\rho+2} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-q_n)^{m-1} \dots (-q_n)^2 & -q_n & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

– матрицы Вандермонда, состоящие из собственных чисел матрицы \bar{G}_1 и собственных чисел матрицы \bar{G}_2 такие, что $\Lambda_1 = W_1^{-1} \bar{G}_1 W_1$, $\Lambda_2 = W_2^{-1} \bar{G}_2 W_2$, $\Lambda_1 = \text{diag} \{-q_i, i = \overline{1, \rho}\}$, $\Lambda_2 = \text{diag} \{-q_j, j = \overline{1, m}\}$. Далее проанализируем производную \dot{V} в силу (2.50):

$$\begin{aligned} \dot{V} = \omega \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}^T & \left\{ \left(\begin{bmatrix} \frac{R_1(\omega)}{\omega} & \frac{e_\rho e_1^T}{\omega} \\ \frac{R_2(\omega)}{\omega} & O_{m \times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{G}_1 & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & \frac{\bar{G}_2}{\omega} - I_{m \times m} (\rho - 1) \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & (W_2^T)^{-1} W_2^{-1} \end{bmatrix} + \right. \\ & + \begin{bmatrix} (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & (W_2^T)^{-1} W_2^{-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \frac{R_1(\omega)}{\omega} & \frac{e_\rho e_1^T}{\omega} \\ \frac{R_2(\omega)}{\omega} & O_{m \times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{G}_1 & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & \frac{\bar{G}_2}{\omega} - I_{m \times m} (\rho - 1) \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \end{bmatrix} \right) \left. \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \right. \\ & + 2 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & (W_2^T)^{-1} W_2^{-1} \end{bmatrix} Q^{-1}(\omega) \xi = \\ & = \omega \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \frac{R_1^T(\omega) (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} + (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} R_1(\omega)}{\omega} & \frac{(W_1^T)^{-1} W_1^{-1} e_\rho e_1^T + R_2^T(\omega) (W_2^T)^{-1} W_2^{-1}}{\omega} \\ \frac{e_\rho e_1^T (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} + (W_2^T)^{-1} W_2^{-1} R_2(\omega)}{\omega} & O_{m \times m} \end{bmatrix} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\begin{array}{cc} \bar{G}_1^T (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} + (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} \bar{G}_1 & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & \frac{\bar{G}_2^T (W_2^T)^{-1} W_2^{-1} + (W_2^T)^{-1} W_2^{-1} \bar{G}_2}{\omega} - \\ & - 2(\rho - 1) \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} (W_2^T)^{-1} W_2^{-1} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} + \\
& + 2 \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix}^T \left[\begin{array}{cc} (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & (W_2^T)^{-1} W_2^{-1} \end{array} \right] Q^{-1}(\omega) \xi.
\end{aligned}$$

С целью упрощения дальнейших алгебраических преобразований введем обозначения:

а) $S_1(\omega) = R_1^T(\omega) (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} + (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} R_1(\omega)$ – матричная функция с ограниченной нормой для любых $\omega \in (\omega_{\min}, \infty)$, $\omega_{\min} > 0$;

б) $S_2(\omega) = (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} e_\rho e_1^T + R_2^T(\omega) (W_2^T)^{-1} W_2^{-1}$ – матричная функция с ограниченной нормой для любых $\omega \in (\omega_{\min}, \infty)$, $\omega_{\min} > 0$;

в) $\bar{z}_1 = W_1^{-1} z_1$;

г) $\bar{z}_2 = W_2^{-1} z_2$;

д) $\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1^{-1} & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & W_2^{-1} \end{bmatrix} Q^{-1} \xi$ – векторная функция времени с ограниченной нормой для любых $\omega \in (\omega_{\min}, \infty)$, $\omega_{\min} > 0$ (в силу допущения б и ограниченности нормы матрицы $Q^{-1}(\omega)$).

Далее, учитывая диагонализирующие свойства матриц Вандермонда и полагая, что целевое неравенство (2.5) не выполняется и $\dot{\omega} / \omega^2 > 0$, получаем:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \omega \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \frac{W_1^T S_1(\omega) W_1}{\omega} & \frac{W_1^T S_2(\omega) W_2}{\omega} \\ \frac{W_2^T S_2^T(\omega) W_1}{\omega} & O_{m \times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\Lambda_1 & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & 2\frac{\Lambda_2}{\omega} - 2(\rho-1)\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{bmatrix} + \\
&+ 2 \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{bmatrix}^T \bar{\xi} \leq \|W_1^T S_1(\omega) W_1\| \|\bar{z}_1\|^2 + 2\|W_1^T S_2(\omega) W_2\| \|\bar{z}_1\| \|\bar{z}_2\| - \\
&- 2\omega \min_{i=1,\rho} \{q_i\} \|\bar{z}_1\|^2 - 2 \left(\min_{j=\rho+1,n} \{q_j\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right) \|\bar{z}_2\|^2 + 2\|\bar{z}_1\| \|\bar{\xi}_1\| + 2\|\bar{z}_2\| \|\bar{\xi}_2\| \leq \\
&\leq \|W_1^T S_1(\omega) W_1\| \|\bar{z}_1\|^2 + 2\|W_1^T S_2(\omega) W_2\| \|\bar{z}_1\| \|\bar{z}_2\| - \omega \min_{i=1,\rho} \{q_i\} \|\bar{z}_1\|^2 + \frac{\|\bar{\xi}_1\|^2}{\omega \min_{i=1,\rho} \{q_i\}} - \\
&- \left(\min_{j=\rho+1,n} \{q_j\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right) \|\bar{z}_2\|^2 + \frac{\|\bar{\xi}_2\|^2}{\left(\min_{j=\rho+1,n} \{q_j\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)} = \\
&= \left(\|W_1^T S_1(\omega) W_1\| - \omega \min_{i=1,\rho} \{q_i\} \right) \|\bar{z}_1\|^2 - \\
&- \left(\min_{j=\rho+1,n} \{q_j\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right) \|\bar{z}_2\|^2 + 2\|W_1^T S_2(\omega) W_2\| \|\bar{z}_1\| \|\bar{z}_2\| \pm \\
&\pm \frac{\|W_1^T S_2(\omega) W_2\|^2}{\left(\min_{j=\rho+1,n} \{q_j\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)} \|\bar{z}_1\|^2 + \frac{\|\bar{\xi}_1\|^2}{\omega \min_{i=1,\rho} \{q_i\}} + \frac{\|\bar{\xi}_2\|^2}{\left(\min_{j=\rho+1,n} \{q_j\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)} = \\
&= \left(\|W_1^T S_1(\omega) W_1\| - \omega \min_{i=1,\rho} \{q_i\} \right) \|\bar{z}_1\|^2 - \\
&- \left(\sqrt{\left(\min_{j=\rho+1,n} \{q_j\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)} \|\bar{z}_2\| - \frac{\|W_1^T S_2(\omega) W_2\|}{\sqrt{\left(\min_{j=\rho+1,n} \{q_j\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)}} \|\bar{z}_1\| \right)^2 + \\
&+ \frac{\|W_1^T S_2(\omega) W_2\|^2}{\left(\min_{j=\rho+1,n} \{q_j\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)} \|\bar{z}_1\|^2 + \frac{\|\bar{\xi}_1\|^2}{\omega \min_{i=1,\rho} \{q_i\}} + \frac{\|\bar{\xi}_2\|^2}{\left(\min_{j=\rho+1,n} \{q_j\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)} \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{\|W_1^T S_2(\omega) W_2\|^2}{\left(\min_{j=\rho+1, n} \{q_j\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)} + \|W_1^T S_1(\omega) W_1\| - \omega \min_{i=1, \rho} \{q_i\} \right) \|\bar{z}_1\|^2 +$$

$$+ \frac{\|\bar{\xi}_1\|^2}{\omega \min_{i=1, \rho} \{q_i\}} + \frac{\|\bar{\xi}_2\|^2}{\left(\min_{j=\rho+1, n} \{q_j\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)}.$$

или

$$\dot{V} \leq \left(\frac{\|W_1^T S_2(\omega) W_2\|^2}{\left(\min_{j=\rho+1, n} \{q_j\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)} + \|W_1^T S_1(\omega) W_1\| - \omega \min_{i=1, \rho} \{q_i\} \right) \|\bar{z}_1\|^2 + \Delta^*, \quad (2.52)$$

$$\text{где } \Delta^* = \frac{\|\bar{\xi}_1\|^2}{\omega \min_{i=1, \rho} \{q_i\}} + \frac{\|\bar{\xi}_2\|^2}{\left(\min_{j=\rho+1, n} \{q_j\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)}.$$

Из полученного неравенства следует, что в силу ограниченности норм $S_1(\omega)$, $S_2(\omega)$ и положительности величин $\dot{\omega}/\omega$, q_i , $i = \overline{1, n}$ существует такая ω , удовлетворяющая неравенству

$$\omega > \frac{\|W_1^T S_2(\omega) W_2\|^2}{\min_{i=1, \rho} \{q_i\} \left(\min_{j=\rho+1, n} \{q_j\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)} + \frac{\|W_1^T S_1(\omega) W_1\|}{\min_{i=1, \rho} \{q_i\}}, \quad (2.53)$$

при которой гарантируется асимптотическое стремление $\|\bar{z}_1\|$ к окрестности нулевого положения равновесия и ограниченность нормы $\|\bar{z}_2\|$. Следовательно, ввиду невырожденности матриц Вандермонда W_1, W_2 величина $\|z_1\|$ также асимптотически стремится в некоторую окрестность нуля. Так как \dot{V} не зависит от $\|\bar{z}_2\|$, то гарантируется лишь ограниченность $\|\bar{z}_2\|$ и, как следствие $\|z_2\|$.

Проанализируем теперь радиус окрестности, определяемый величиной Δ^* в (2.52). Из определений вектора $\bar{\xi}$ и $Q^{-1}(\omega)$, а также из допущения 6 следует, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \bar{\xi} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\xi}_2 \end{bmatrix} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} W_1^{-1} & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & W_2^{-1} \end{bmatrix} Q^{-1}(\omega) \xi = \begin{bmatrix} W_1^{-1} & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & W_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

или

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \bar{\xi} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1^{-1} \xi_1 e_1 \\ O_{m \times 1} \end{bmatrix},$$

где ξ_1 – первая координата вектора ξ , $e_1 = [1, 0, \dots, 0] \in R^p$. Из последнего равенства следует стремление $\|\bar{\xi}_2\|$ к нулю при росте амплитуды ω и стремление $\|\bar{\xi}_1\|$ к некоторой ограниченной функции. Принимая во внимание деление $\|\bar{\xi}_1\|^2$ на ω в функции Δ^* , приходим к выводу о том, что при росте амплитуды ω величина Δ^* уменьшается (в пределе до нуля).

Заметим, что для увеличения амплитуды ω необходимо увеличение параметра γ_1 , γ_2 или γ_3 в одном из применяемых алгоритмов адаптации (2.9), (2.10) или (2.11) соответственно.

Теперь проанализируем поведение вектора состояния исходной системы. Из анализа производной функции Ляпунова и из преобразования $x = Q(\omega)z$ видно, что координата вектора состояния $x_1 = z_{11} = y$, где z_{11} – первая координата вектора z_1 , асимптотически стремится в окрестность нулевого положения равновесия. Так как радиус окрестности убывает при увеличении амплитуды ω , то из выражений (2.9), (2.10), (2.11) и из ограниченности y следует ограниченность ω .

В итоге, анализируя преобразование $x = Q(\omega)z$, приходим к выводу об ограниченности $\|x\|$.

Важно отметить, что гарантируется асимптотическая устойчивость замкнутой системы только по выходной переменной $y = x_1$. В отношении переменных x_2, \dots, x_n гарантируется лишь ограниченность.

Замечание 2.5. С помощью метода функций Ляпунова доказана устойчивость системы только для моментов времени $t \geq t_1$, когда ω достигает некоторого порога, при котором выполняется неравенство (2.53). Для случая, когда $t < t_1$ требуется доказательство полноты системы.

Сформулируем и докажем лемму о полноте замкнутой системы. При этом воспользуемся результатами доказательства леммы 2.1.

Лемма 2.5. Система (2.39), в которой ω генерируется одним из алгоритмов адаптации (2.9), (2.10) или (2.11), является полной на интервале $t \in [0, t_1)$.

Доказательство леммы 2.5. Как было показано в доказательстве леммы 2.1, требуется доказать ограниченность решений системы уравнений, состоящей из (2.39) и одного из уравнений (2.9), (2.10) или (2.11) на интервале $t \in [0, t_1)$. Доказательство приводится от противного. Допустим, что выполняются (2.21а), (2.21б). Анализируя скалярные уравнения (2.39), получаем:

$$\lim_{t \rightarrow t_2^-} x_1 = \lim_{t \rightarrow t_2^-} y = +\infty, \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow t_2^-} \dot{x}_1 = \lim_{t \rightarrow t_2^-} \dot{y} = +\infty.$$

$$\lim_{t \rightarrow t_2^-} x_2 = \lim_{t \rightarrow t_2^-} (\dot{x}_1 - a_{11}x_1 - \xi_1) = \lim_{t \rightarrow t_2^-} \left(\frac{x_1(t_2) - x_1}{t_2 - t} - a_{11}x_1 - \xi_1 \right) = +\infty, \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_2^-} \dot{x}_2 = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_2^-} x_3 = \lim_{t \rightarrow t_2^-} (\dot{x}_2 - a_{12}x_1 - a_{22}x_2 - \xi_2) = \lim_{t \rightarrow t_2^-} \left(\frac{x_2(t_2) - x_2}{t_2 - t} - a_{12}x_1 - a_{22}x_2 - \xi_2 \right) = +\infty,$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_2^-} \dot{x}_3 = +\infty,$$

. ,

$$\lim_{t \rightarrow t_2^-} x_\rho = \lim_{t \rightarrow t_2^-} \left(\dot{x}_{\rho-1} - \sum_{i=1}^{\rho-1} a_{i,\rho-1} x_i - \xi_{\rho-1} \right) = \lim_{t \rightarrow t_2^-} \left(\frac{x_{\rho-1}(t_2) - x_{\rho-1}}{t_2 - t} - \sum_{i=1}^{\rho-1} a_{i,\rho-1} x_i - \xi_{\rho-1} \right) = +\infty,$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_2^-} \dot{x}_{\rho-1} = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_2^-} x_{\rho+1} = \lim_{t \rightarrow t_2^-} \left(\dot{x}_\rho - \sum_{i=1}^{\rho} a_{i,\rho} x_i + \sum_{i=2}^{\rho} \bar{b}_m \omega^{\rho+1-i} C_{\rho+1-i} x_i + \bar{b}_m \omega^\rho x_1 - \xi_\rho \right) = +\infty,$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_2^-} \dot{x}_\rho = +\infty,$$

.

$$\lim_{t \rightarrow t_2^-} x_n = \lim_{t \rightarrow t_2^-} \left(\dot{x}_{n-1} - \sum_{i=1}^{\rho} a_{i,n-1} x_i + \sum_{i=2}^{\rho} \bar{b}_1 \omega^{\rho+1-i} C_{\rho+1-i} x_i + \bar{b}_1 \omega^\rho x_1 - \xi_{n-1} \right) = +\infty,$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_2^-} \dot{x}_n = +\infty,$$

В итоге, перепишем последнее скалярное уравнение из (2.39):

$$\dot{x}_n = (a_{1,n} - \bar{b}_0 \omega^\rho) x_1 + (a_{2,n} - \bar{b}_0 C_{\rho-1} \omega^{\rho-1}) x_2 + \dots + (a_{\rho,n} - \bar{b}_0 C_1 \omega) x_\rho .$$

Нетрудно видеть, что при выполнении всех предыдущих предельных равенств левая часть данного уравнения стремится к плюс бесконечности, в то время как правая часть стремится к минус бесконечности, что является противоречием. Следовательно, равенства (2.21а) и (2.21б) несправедливы.

Аналогично доказывается, что $\lim_{t \rightarrow t_2^-} y \neq +\infty$, $\lim_{t \rightarrow t_2^+} y \neq -\infty$, $\lim_{t \rightarrow t_2^+} y \neq +\infty$.

Как следствие, $\lim_{t \rightarrow t_2^-} x_i \neq +\infty$, $\lim_{t \rightarrow t_2^+} x_i \neq +\infty$, $\lim_{t \rightarrow t_2^-} x_i \neq -\infty$, $\lim_{t \rightarrow t_2^+} x_i \neq -\infty$,

$\lim_{t \rightarrow t_2^+} \omega \neq +\infty$, $\lim_{t \rightarrow t_2^+} \omega \neq -\infty$, $\lim_{t \rightarrow t_2^-} \omega \neq +\infty$, $\lim_{t \rightarrow t_2^-} \omega \neq -\infty$.

Таким образом, в системе (2.39) не наблюдается разрывов второго рода с неограниченным ростом решений ω , x на конечном интервале времени, откуда следует полнота системы. Лемма доказана. \square

Замечание 2.6. Учитывая допущения 3, 4 и ход доказательства леммы 2.5, нетрудно видеть, что полнота замкнутой системы не зависит от вариаций

параметров объекта $a_{i,j}, b_k$. Иными словами, полученный результат применим для системы, включающей нестационарный объект.

Исходя из результатов, полученных в ходе доказательства леммы 2.5, приходим к выводу об устойчивости замкнутой системы на всем интервале времени $t \in [0, \infty)$.

Таким образом, доказаны пункты а)- в) теоремы 2.3. □

2.4 Решение задачи стабилизации нестационарного объекта с произвольной относительной степенью

2.4.1 Постановка задачи

Пусть объект описывается уравнением (2.1). Приняты допущения 1-7.

Цель заключается в построении закона управления, который обеспечивает в замкнутой системе ограниченность всех сигналов и выполнение целевого неравенства (2.5).

2.4.2 Решение задачи

Для решения задачи используем закон управления (2.36) и, подставив, в первое уравнение системы (2.1), получим:

В целях анализа замкнутой системы подставим (2.36) в (2.35):

$$\dot{x} = G(\omega, t)x + \xi, \quad x(0) \quad (2.54)$$

где

$$G(\omega, t) = A(t) - B(t)K^T(\omega) / b_{m \min} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}(t) & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1, \rho-1}(t) & a_{2, \rho-1}(t) & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1, \rho}(t) - \bar{b}_m(t)\omega^\rho & a_{2, \rho}(t) - \bar{b}_m(t)C_{\rho-1}\omega^{\rho-1} & \dots & a_{\rho, \rho}(t) - \bar{b}_m(t)C_1\omega & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1, n-1}(t) - \bar{b}_1(t)\omega^\rho & a_{2, n-1}(t) - \bar{b}_1(t)C_{\rho-1}\omega^{\rho-1} & \dots & a_{\rho, n-1}(t) - \bar{b}_1(t)C_1\omega & 0 & \dots & 1 \\ a_{1, n}(t) - \bar{b}_0(t)\omega^\rho & a_{2, n}(t) - \bar{b}_0(t)C_{\rho-1}\omega^{\rho-1} & \dots & a_{\rho, n}(t) - \bar{b}_0(t)C_1\omega & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{b}_i(t) = b_i(t) / b_{m \min}.$$

Отметим, что для полученной матрицы G , несмотря на нестационарность матриц A и B , справедливы результаты леммы 2.4, т.е.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \{\lambda_k(t)\} = \begin{cases} -q_i(t), & i = \overline{1, m}, \\ -q_j(t)\omega(t), & j = \overline{1, \rho}, \end{cases} \quad (2.55)$$

где $q_i = q_i(t)$, $q_j = q_j(t)$ – положительные величины, зависящие от переменных параметров $b_i(t), i = \overline{0, m}$ и коэффициентов $\bar{b}_m(t), C_i, i = \overline{1, \rho-1}$ соответственно.

Кроме того, для системы (2.54) справедливы следствия 2.2 и 2.3.

Сформулируем и докажем теорему об устойчивости системы (2.54), используя результаты, полученные в предыдущих разделах главы.

Теорема 2.4. Система (2.54), в которой параметр ω формируется одним из алгоритмов адаптации (2.9), (2.10) или (2.11), обладает следующими свойствами:

- а) Все сигналы в системе ограничены;
- б) Величина $y = x_1$ асимптотически стремится к окрестности нулевого положения равновесия;
- в) Радиус окрестности может быть уменьшен произвольным образом путем увеличения коэффициента γ в применяемом алгоритме адаптации.

В ходе доказательства примем во внимание замечания 2.1 и 2.5.

Доказательство теоремы 2.4. По аналогии с доказательствами предыдущих теорем декомпозируем матрицу системы (2.54) $G(\omega)$ на две составляющие:

$$G(\omega, t) = \hat{G}(\omega, t) + \tilde{A}(t),$$

где

$$\hat{G}(\omega, t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\bar{b}_m(t)\omega^\rho & -\bar{b}_m(t)C_{\rho-1}\omega^{\rho-1} & \dots & -\bar{b}_m(t)C_1\omega - \bar{b}_{m-1}(t)/\bar{b}_m(t) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{b}_1(t)\omega^\rho & -\bar{b}_1(t)C_{\rho-1}\omega^{\rho-1} & \dots & -\bar{b}_1(t)C_1\omega - \bar{b}_0(t)/\bar{b}_m(t) & 0 & \dots & 1 \\ -\bar{b}_0(t)\omega^\rho & -\bar{b}_0(t)C_{\rho-1}\omega^{\rho-1} & \dots & -\bar{b}_0(t)C_1\omega & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,\rho-1}(t) & a_{2,\rho-1}(t) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,\rho}(t) & a_{2,\rho}(t) & \dots & a_{\rho,\rho}(t) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n-1}(t) & a_{2,n-1}(t) & \dots & a_{\rho,n-1}(t) & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,n}(t) & a_{2,n}(t) & \dots & a_{\rho,n}(t) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Воспользуемся линейным преобразованием $x = Q(\omega, t)z$, где

$$Q(\omega, t) = \begin{bmatrix} \omega^0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega^1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega^{\rho-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \bar{b}_{m-1}(t)\omega^{\rho-1}/\bar{b}_m(t) & \omega^{\rho-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{b}_0(t)\omega^{\rho-1}/\bar{b}_m(t) & 0 & \dots & \omega^{\rho-1} \end{bmatrix},$$

ρth

и преобразуем (2.54) в эквивалентную форму:

$$\dot{z} = \left(\frac{-Q^{-1}(\omega, t)\dot{Q}(\omega, t)}{\omega} + \frac{Q^{-1}(\omega, t)\tilde{A}(t)Q(\omega, t)}{\omega} + \frac{Q^{-1}(\omega, t)\hat{G}(\omega, t)Q(\omega, t)}{\omega} \right) \omega z + (2.56)$$

$$+ Q^{-1}(\omega, t)\xi(t).$$

Проанализируем последовательно все векторно-матричные произведения в правой части полученного выражения.

a) Инверсия, производная матрицы Q и произведение $-Q^{-1}(\omega, t)\dot{Q}(\omega, t)/\omega$ принимают следующую форму:

$$Q^{-1}(\omega, t) = \begin{bmatrix} \omega^0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega^{-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega^{1-\rho} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\bar{b}_{m-1}(t)\omega^{1-\rho}/\bar{b}_m(t) & \omega^{1-\rho} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\bar{b}_0(t)\omega^{1-\rho}/\bar{b}_m(t) & 0 & \dots & \omega^{1-\rho} \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

$\rho - \bar{u}$

$$\dot{Q}(\omega, t) = \begin{bmatrix} \omega^0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega^1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (\rho-1)\omega^{\rho-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & (\rho-1)\bar{b}_{m-1}(t)\omega^{\rho-1}/\bar{b}_m(t) & (\rho-1)\omega^{\rho-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (\rho-1)\bar{b}_0(t)\omega^{\rho-1}/\bar{b}_m(t) & 0 & \dots & (\rho-1)\omega^{\rho-1} \end{bmatrix} \frac{\dot{\omega}}{\omega} +$$

$\rho - \bar{u}$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \left(\frac{\dot{\bar{b}}_{m-1}(t)}{\bar{b}_m(t)} - \frac{\dot{\bar{b}}_m(t)\bar{b}_{m-1}(t)}{\bar{b}_m^2(t)} \right) \omega^{\rho-1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \left(\frac{\dot{\bar{b}}_0(t)}{\bar{b}_m(t)} - \frac{\dot{\bar{b}}_m(t)\bar{b}_0(t)}{\bar{b}_m^2(t)} \right) \omega^{\rho-1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{-Q^{-1}(\omega, t)\dot{Q}(\omega, t)}{\omega} = -L \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} + \frac{L_0(t)}{\omega}, \quad (2.58)$$

где $L = \text{diag}\{0, 1, 2, \dots, (\rho-1), \dots, (\rho-1)\}$,

$$L_0(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\dot{\bar{b}}_{m-1}(t)}{\bar{b}_m(t)} - \frac{\dot{\bar{b}}_m(t)\bar{b}_{m-1}(t)}{\bar{b}_m^2(t)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\dot{\bar{b}}_0(t)}{\bar{b}_m(t)} - \frac{\dot{\bar{b}}_m(t)\bar{b}_0(t)}{\bar{b}_m^2(t)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

ρth

б) Матрица $Q^{-1}(\omega, t)\tilde{A}(t)Q(\omega, t) / \omega$ имеет следующий вид:

$$\frac{Q^{-1}(\omega, t)\tilde{A}(t)Q(\omega, t)}{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{a_{1,1}(t)}{\omega} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{1,2}(t)}{\omega^2} & \frac{a_{2,2}(t)}{\omega} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{1,\rho-1}(t)}{\omega^{\rho-1}} & \frac{a_{2,\rho-1}(t)}{\omega^{\rho-2}} & \dots & \frac{a_{\rho-1,\rho-1}(t)}{\omega} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{1,\rho}(t)}{\omega^\rho} & \frac{a_{2,\rho}(t)}{\omega^{\rho-1}} & \dots & \frac{a_{\rho-1,\rho}(t)}{\omega^2} & \frac{a_{\rho,\rho}(t) + \bar{b}_{m-1}(t) / \bar{b}_m(t)}{\omega} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\mu_{1,1}(t)}{\omega^\rho} & \frac{\mu_{2,1}(t)}{\omega^{\rho-1}} & \dots & \frac{\mu_{\rho-1,1}(t)}{\omega^2} & \frac{\mu_{\rho,1}(t)}{\omega} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\mu_{1,2}(t)}{\omega^\rho} & \frac{\mu_{2,2}(t)}{\omega^{\rho-1}} & \dots & \frac{\mu_{\rho-1,2}(t)}{\omega^2} & \frac{\mu_{\rho,2}(t)}{\omega} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mu_{1,m}(t)}{\omega^\rho} & \frac{\mu_{2,m}(t)}{\omega^{\rho-1}} & \dots & \frac{\mu_{\rho-1,m}(t)}{\omega^2} & \frac{\mu_{\rho,m}(t)}{\omega} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.59)$$

где $\mu_{i,j}, i = \overline{1,\rho}, j = \overline{1,m}$ – переменные величины, зависящие от $\bar{b}_k(t), k = \overline{0,m}$ и

$a_{i,j}(t), i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$.

в) Матрица $Q^{-1}(\omega, t)\hat{G}(\omega, t)Q(\omega, t) / \omega$ имеет следующий вид:

$$\frac{Q^{-1}(\omega, t)\hat{G}(\omega, t)Q(\omega, t)}{\omega} = \begin{bmatrix} \bar{G}_1(t) & e_\rho e_1^T / \omega \\ O_{m \times \rho} & \bar{G}_2(t) / \omega \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

где $O_{m \times \rho} \in R^{m \times \rho}$ – нулевая матрица, $e_i = \underset{ith}{col}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $e_1 = [1, 0, \dots, 0] \in R^m$,

$e_\rho = [0, 0, \dots, 1] \in R^\rho$, $\bar{G}_1 \in R^{\rho \times \rho}$ определяется как

$$\bar{G}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\bar{b}_m(t) & -\bar{b}_m(t)C_1 & -\bar{b}_m(t)C_2 & \dots & -\bar{b}_m(t)C_{n-1} \end{bmatrix}.$$

и имеет сопровождающий гурвицевый полином, совпадающий с полиномом (2.44б). Корни (2.44б) $\lambda_j(t) = -q_j(t)$, $j = \overline{1, \rho}$ определены в лемме 2.4. Матрица

$\bar{G}_2 \in R^{m \times m}$ определяется выражением вида

$$\bar{G}_2(t) = \begin{bmatrix} -\bar{b}_{m-1}(t) / \bar{b}_m(t) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\bar{b}_{m-2}(t) / \bar{b}_m(t) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{b}_1(t) / \bar{b}_m(t) & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\bar{b}_0(t) / \bar{b}_m(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

и является матрицей состояния экспоненциально устойчивой системы, определенной в допущении 2.

г) Рассмотрим член $Q^{-1}(\omega, t)\xi(t)$. Принимая во внимание допущения 3 и 6 и (2.57), приходим к выводу об ограниченности нормы $\|Q^{-1}(\omega, t)\xi(t)\|$ для любых $\omega \in (\omega_{\min}, \infty)$, $\omega_{\min} > 0$, $t \in [0, \infty)$.

С учетом полученных матриц (2.57)-(2.59) перепишем (2.56) в более удобной для анализа форме:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = & \left(\begin{bmatrix} \frac{R_1(\omega, t)}{\omega} & \frac{e_\rho e_1^T}{\omega} \\ \frac{R_2(\omega, t)}{\omega} & O_{m \times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{G}_1(t) & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & \frac{\bar{G}_2(t)}{\omega} - I_{m \times m}(\rho - 1) \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \end{bmatrix} \right) \omega \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \\ & + Q^{-1}(\omega, t) \xi, \end{aligned} \quad (2.61)$$

где $R_1 \in R^{\rho \times \rho}$, $R_2 \in R^{m \times \rho}$ матричные функции, зависящие от элементов первых ρ столбцов (2.59) и ненулевых элементов матрицы $L_0(t)$ в (2.58) и имеющие ограниченные нормы в силу допущения 3 (для любых $\omega \in (\omega_{\min}, \infty)$, $\omega_{\min} > 0$ и $t \in [0, \infty)$); $z_1 \in R^\rho$, $z_2 \in R^m$ – компоненты вектора $z = [z_1, z_2]$.

Проанализируем устойчивость системы (2.50) с помощью функции Ляпунова

$$V = z_1^T (W_1^T(t))^{-1} W_1^{-1}(t) z_1 + V_0, \quad (2.62)$$

где

$$W_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -q_1(t) & -q_2(t) & \dots & -q_\rho(t) \\ (-q_1(t))^2 & (-q_2(t))^2 & \dots & (-q_\rho(t))^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-q_1(t))^{\rho-1} & (-q_2(t))^{\rho-1} & \dots & (-q_\rho(t))^{\rho-1} \end{bmatrix},$$

– матрица Вандермонда, состоящая из собственных чисел матрицы \bar{G}_1 такая, что $\Lambda_1 = W_1^{-1} \bar{G}_1 W_1$, $\Lambda_1 = \text{diag} \{-q_i, i = \overline{1, \rho}\}$,

$$V_0 = z_2^T P(t) z_2,$$

$P(t) = P^T(t) \succ c_1 I$ – матрица, которая в соответствии с допущением 3 удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$\dot{P}(t) + \bar{G}_2^T(t) P(t) + P(t) \bar{G}_2(t) = -J(t), \quad (2.63)$$

$$J(t) = J^T(t) \succ c_2 I.$$

Замечание 2.7. Кроме того, что собственные числа $\lambda_j(t) = -q_j(t)$, $j = \overline{1, \rho}$ не кратны (см. замечание 2.1), полагаем, что они не стремятся друг к другу со временем. В противном случае вводится модифицированная матрица Вандермонда для кратных корней:

$$W_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -r_1 q_1(t) & -r_2 q_2(t) & \dots & -r_\rho q_\rho(t) \\ (-r_1 q_1(t))^2 & (-r_2 q_2(t))^2 & \dots & (-r_\rho q_\rho(t))^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-r_1 q_1(t))^{\rho-1} & (-r_2 q_2(t))^{\rho-1} & \dots & (-r_\rho q_\rho(t))^{\rho-1} \end{bmatrix},$$

где r_i , $i = \overline{1, \rho}$ – не кратные константы, выбираемые из условий невырожденности $W_1(t)$.

Замечание 2.8. Ввиду замечания 2.7 и допущения 3 (принимая во внимание которое, полагаем, что собственные числа λ_j есть ограниченные и достаточно гладкие функции времени) нормы $\|W_1(t)\|$, $\|W_1^{-1}(t)\|$, $\|\dot{W}_1(t)\|$ ограничены.

Проанализируем производную \dot{V} в силу (2.61) и (2.63) с учетом допущения 2:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \omega \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}^T \left\{ \left(\begin{bmatrix} \frac{R_1(\omega)}{\omega} & \frac{e_\rho e_1^T}{\omega} \\ \frac{R_2(\omega)}{\omega} & O_{m \times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{G}_1 & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & \frac{\bar{G}_2}{\omega} - I_{m \times m}(\rho-1)\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & P \end{bmatrix} + \right. \\
&+ \left. \begin{bmatrix} (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & P \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \frac{R_1(\omega)}{\omega} & \frac{e_\rho e_1^T}{\omega} \\ \frac{R_2(\omega)}{\omega} & O_{m \times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{G}_1 & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & \frac{\bar{G}_2}{\omega} - I_{m \times m}(\rho-1)\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \end{bmatrix} \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & P \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & P \end{bmatrix} Q^{-1} \xi = \\
&= \omega \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \frac{R_1^T(\omega)(W_1^T)^{-1} W_1^{-1} + (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} R_1(\omega)}{\omega} & \frac{(W_1^T)^{-1} W_1^{-1} e_\rho e_1^T + R_2^T(\omega) P}{\omega} \\ \frac{e_\rho e_1^T (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} + P R_2(\omega)}{\omega} & O_{m \times m} \end{bmatrix} + \right. \\
&+ \left. \begin{bmatrix} \bar{G}_1^T (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} + (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} \bar{G}_1 & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & \frac{\bar{G}_2^T P + P \bar{G}_2}{\omega} - 2(\rho-1)\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} P \end{bmatrix} + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & P \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (W_1^T)^{-1} W_1^{-1} & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & P \end{bmatrix} Q^{-1} \xi.
\end{aligned}$$

Введем обозначения:

- а) $S_1(\omega, t) = R_1^T(\omega, t)(W_1^T(t))^{-1} W_1^{-1}(t) + (W_1^T(t))^{-1} W_1^{-1}(t) R_1(\omega, t)$ – матричная функция, имеющая в силу допущения 3 и результатов леммы 2.4, ограниченную норму для любых $\omega \in (\omega_{\min}, \infty)$, $\omega_{\min} > 0$ и $t \in [0, \infty)$;
- б) $S_2(\omega, t) = (W_1^T(t))^{-1} W_1^{-1}(t) e_\rho e_1^T + R_2^T(\omega, t) P(t)$ – матричная функция, имеющая в силу допущения 3 и результатов леммы 2.4, ограниченную норму для любых $\omega \in (\omega_{\min}, \infty)$, $\omega_{\min} > 0$ и $t \in [0, \infty)$;

$$\text{в) } \bar{z}_1(t) = W_1^{-1}(t)z_1(t);$$

$$\text{г) } \bar{\xi}(t) = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_1(t) \\ \bar{\xi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1^{-1}(t) & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & I_{m \times m} \end{bmatrix} Q^{-1}(\omega, t) \xi(t) - \text{векторная функция времени с}$$

ограниченной нормой для любых $\omega \in (\omega_{\min}, \infty)$, $\omega_{\min} > 0$ и $t \in [0, \infty)$ (в силу допущения 6 и ограниченности нормы матрицы $Q^{-1}(\omega, t)$);

$$\text{д) } N_1(t) = W_1^T(t) \frac{d}{dt} \left((W_1^T(t))^{-1} W_1^{-1}(t) \right) W_1(t) = - (W_1^{-1}(t) \dot{W}_1(t))^T - W_1^{-1}(t) \dot{W}_1(t),$$

– матричная функция с ограниченной нормой для любых $\omega \in (\omega_{\min}, \infty)$, $\omega_{\min} > 0$ и $t \in [0, \infty)$ (в силу допущения 3 и замечания 2.8).

Учитывая диагонализующее свойство матрицы Вандермонда и полагая, что целевое неравенство (2.5) не выполняется (т.е. $\dot{\omega}/\omega > 0$), получаем:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} W_1^T S_1 W_1 & W_1^T S_2 \\ S_2^T W_1 & O_{m \times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\Lambda_1 \omega & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & \bar{G}_2^T P + P \bar{G}_2 - 2(\rho - 1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \end{bmatrix} + \right. \\ &+ \left. \begin{bmatrix} N_1 & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & \dot{P} \end{bmatrix} \right\} + 2 \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ P \bar{z}_2 \end{bmatrix}^T \bar{\xi} \leq \\ &\leq \left(\|W_1^T S_1 W_1\| - 2\omega \min_{i=1, \rho} \{q_i\} + \|N_1\| \right) \|\bar{z}_1\|^2 + 2 \|W_1^T S_2\| \|\bar{z}_1\| \|\bar{z}_2\| - \\ &- 2 \left((\rho - 1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} + \|J\| \right) \|\bar{z}_2\|^2 + 2 \|\bar{z}_1\| \|\bar{\xi}_1\| + 2 \|\bar{z}_2\| \|\bar{\xi}_2\| \leq \\ &\leq \left(\|W_1^T S_1 W_1\| - \omega \min_{i=1, \rho} \{q_i\} + \|N_1\| \right) \|\bar{z}_1\|^2 + 2 \|W_1^T S_2\| \|\bar{z}_1\| \|\bar{z}_2\| + \frac{\|\bar{\xi}_1\|^2}{\omega \min_{i=1, \rho} \{q_i\}} - \\ &- \left(\min_{i=1, m} \{J\} + (\rho - 1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right) \|\bar{z}_2\|^2 + \frac{\|\bar{\xi}_2\|^2}{\left(\min_{i=1, m} \{J\} + (\rho - 1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\|W_1^T S_1 W_1\| - \omega \min_{i=1,\rho} \{q_i\} + \|N_1\| \right) \|\bar{z}_1\|^2 - \left(\min_{i=1,m} \{J\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right) \|\bar{z}_2\|^2 + \\
&+ 2 \|W_1^T S_2\| \|\bar{z}_1\| \|\bar{z}_2\| \pm \frac{\|W_1^T S_2\|^2}{\left(\min_{i=1,m} \{J\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)} \|\bar{z}_1\|^2 + \frac{\|\bar{\xi}_1\|^2}{\omega \min_{i=1,\rho} \{q_i\}} + \\
&+ \frac{\|\bar{\xi}_2\|^2}{\left(\min_{i=1,m} \{J\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)} = \left(\|W_1^T S_1(\omega) W_1\| - \omega \min_{i=1,\rho} \{q_i\} \right) \|\bar{z}_1\|^2 - \\
&- \left[\sqrt{\left(\min_{i=1,m} \{J\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)} \|\bar{z}_2\| - \frac{\|W_1^T S_2(\omega)\|}{\sqrt{\min_{i=1,m} \{J\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega}}} \|\bar{z}_1\| \right]^2 + \\
&+ \frac{\|W_1^T S_2\|^2}{\left(\min_{i=1,m} \{J\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)} \|\bar{z}_1\|^2 + \frac{\|\bar{\xi}_1\|^2}{\omega \min_{i=1,\rho} \{q_i\}} + \frac{\|\bar{\xi}_2\|^2}{\left(\min_{i=1,m} \{J\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)} \leq \\
&\leq \left(\frac{\|W_1^T S_2\|^2}{\left(\min_{i=1,m} \{J\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)} + \|W_1^T S_1 W_1\| + \|N_1\| - \omega \min_{i=1,\rho} \{q_i\} \right) \|\bar{z}_1\|^2 + \\
&+ \frac{\|\bar{\xi}_1\|^2}{\omega \min_{i=1,\rho} \{q_i\}} + \frac{\|\bar{\xi}_2\|^2}{\left(\min_{i=1,m} \{J\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)}.
\end{aligned}$$

или

$$\dot{V} \leq \left(\frac{\|W_1^T S_2\|^2}{\min_{i=1,m} \{J\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega}} + \|W_1^T S_1 W_1\| + \|N_1\| - \omega \min_{i=1,\rho} \{q_i\} \right) \|\bar{z}_1\|^2 + \Delta^*, \quad (2.64)$$

где $\Delta^* = \frac{\|\bar{\xi}_1\|^2}{\omega \min_{i=1,\rho} \{q_i\}} + \frac{\|\bar{\xi}_2\|^2}{\left(\min_{i=1,m} \{J\} + (\rho-1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)}$, $\min_{i=1,m} \{J\} \geq c_2$ – минимальное собственное число матрицы J .

Из полученного неравенства следует, что в силу ограниченности функций $\|W_1^T S_2\|$, $\|W_1^T S_1 W_1\|$, $\|N_1\|$ и положительности величин $\dot{\omega}/\omega$, q_i , $i = \overline{1, \rho}$ и $\min_{i=1, m} \{J\}$ существует такая ω , удовлетворяющая неравенству

$$\omega > \frac{\|W_1^T S_2(\omega)\|^2}{\min_{i=1, \rho} \{q_i\} \left(\min_{i=1, m} \{J\} + (\rho - 1) \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)} + \frac{\|W_1^T S_1(\omega) W_1\|}{\min_{i=1, \rho} \{q_i\}}, \quad (2.65)$$

при которой гарантируется асимптотическое стремление $\|\bar{z}_1\|$ к окрестности нулевого положения равновесия и ограниченность нормы $\|\bar{z}_2\|$. Следовательно, ввиду невырожденности матрицы Вандермонда W_1 величина $\|z_1\|$ также асимптотически стремится в некоторую окрестность нуля, а $\|z_2\|$ ограничена.

Проанализируем теперь радиус окрестности, определяемый величиной Δ^* в (2.64). Из определений вектора $\bar{\xi}$ и $Q^{-1}(\omega)$, а также из допущения 6 следует, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \bar{\xi} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\xi}_2 \end{bmatrix} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} W_1^{-1} & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & I_{m \times m} \end{bmatrix} Q^{-1}(\omega) \xi = \begin{bmatrix} W_1^{-1} & O_{\rho \times m} \\ O_{m \times \rho} & I_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

или

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \bar{\xi} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1^{-1} \xi_1 e_1 \\ O_{m \times 1} \end{bmatrix},$$

где ξ_1 – первая координата вектора ξ , $e_1 = [1, 0, \dots, 0] \in R^\rho$. Из последнего равенства следует стремление $\|\bar{\xi}_2\|$ к нулю при росте амплитуды ω и стремление $\|\bar{\xi}_1\|$ к некоторой константе. Принимая во внимание деление $\|\bar{\xi}_1\|^2$ на ω в выражении для Δ^* , приходим к выводу о том, что при росте амплитуды ω величина Δ^* уменьшается (в пределе до нуля).

Заметим, что для увеличения амплитуды ω необходимо увеличение параметра γ_1 , γ_2 или γ_3 в одном из применяемых алгоритмов адаптации (2.9), (2.10) или (2.11) соответственно.

Теперь проанализируем поведение вектора состояния исходной системы. Из анализа производной функции Ляпунова и из преобразования $x = Q(\omega, t)z$ видно, что координата вектора состояния $x_1 = z_{11} = y$, где z_{11} – первая координата вектора z_1 , асимптотически стремится в окрестность нулевого положения равновесия. Так как радиус окрестности убывает при увеличении амплитуды ω , то из выражений (2.9), (2.10), (2.11) и из ограниченности y следует ограниченность ω .

В итоге, анализируя преобразование $x = Q(\omega, t)z$, приходим к выводу об ограниченности $\|x\|$.

Важно отметить, что гарантируется асимптотическая устойчивость замкнутой системы только по выходной переменной $y = x_1$. В отношении переменных x_2, \dots, x_n гарантируется лишь ограниченность.

Замечание 2.9. С помощью метода функций Ляпунова доказана устойчивость системы только для моментов времени $t \geq t_1$, когда ω достигает некоторого порога, при котором выполняется неравенство (2.65). С учетом замечания 2.6, в котором результат леммы 2.6. распространяется на нестационарный объект, приходим к выводу о полноте замкнутой системы и ее устойчивости на всем интервале времени $t \in [0, \infty)$.

Таким образом, доказаны пункты а)- в) теоремы 2.3

□

2.5 Решение задачи слежения выхода нестационарного объекта с произвольной относительной степенью за эталонным сигналом

На основе результатов, полученных в разделе 2.4, предлагается закон управления, обеспечивающий искомую цель (2.2):

$$u = \frac{1}{b_{m \min}} K^T(\omega) e, \quad (2.66)$$

где $e = x_M - x$, $\varepsilon = y_M - y$; K – матрица обратных связей, заданная выражением (2.37). Величина ω генерируется одним из трех алгоритмов адаптации

а) Алгоритм адаптации с линейной обратной связью №1.

$$\dot{\omega} = -\sigma_1 \omega + \gamma_1 f(\varepsilon, t) \omega, \quad \omega(0) > 0, \quad (2.67)$$

где γ_1, σ_1 – положительные константы; $\gamma_1 > \sigma_1$, $f(\varepsilon, t)$ – функция, определенная в (2.9).

б) Алгоритм адаптации с линейной обратной связью №2.

$$\dot{\omega} = -\sigma_2 \omega + \gamma_2 r(\varepsilon, t), \quad \omega(0) \geq 0, \quad (2.68)$$

где γ_2, σ_2 – положительные константы; $r(y, t)$ – функция, определенная в (2.10).

в) Алгоритм адаптации со статической нелинейной обратной связью:

$$\omega = \gamma_3 r(\varepsilon, t), \quad (2.69)$$

где γ_3 – положительная величина.

Свойства замкнутой следящей системы идентичны свойствам системы стабилизации (2.1), (2.36), (2.37) с одним из алгоритмов адаптации (2.9), (2.10) или (2.11). Действительно, если продифференцировать e с учетом (2.1) и (2.3), то после преобразований модель (2.1) в координатах e примет вид

$$\dot{e} = \dot{x}_M - \dot{x} = Ae - Bu + (A_M - A)x_M + B_M g - \xi$$

или с учетом обозначения $\chi = (A_M - A)x_M + B_M g - \xi$

$$\dot{e} = Ae - Bu + \chi \quad (2.70)$$

Сигнал χ ограничен в силу устойчивости эталонной модели (2.3) и ограниченности сигналов g и ξ .

Таким образом, модель (2.70) аналогична модели (2.1), что позволяет применить закон управления (2.66), в котором ω генерируется одним из алгоритмов адаптации (2.67), (2.68) или (2.69). Как было доказано в теоремах 2.3 и 2.4, закон обеспечивает ограниченность всех сигналов и асимптотическую сходимость ε к окрестности нуля. Радиус окрестности может быть уменьшен путем увеличения γ в алгоритмах (2.67), (2.68) или (2.69).

2.6 Результаты моделирования

В ходе моделирования последовательно рассмотрим две задачи управления неустойчивыми объектами третьего порядка с различными относительными степенями.

1) Объект с относительной степенью, равной 3 :

$$\dot{x}_1 = (1.1\sin(0,8t) + 4)x_1 + x_2 + \xi_1,$$

$$\dot{x}_2 = 1.4\cos(0,4t)x_1 + \cos(0,5t)x_2 + \xi_2,$$

$$\dot{x}_3 = \sin(0,1t)x_1 + (3 + 2\cos(t))x_2 + (1 + 2\sin(0,9t))x_3 + (10 + 5\sin(0,8t))u + \xi_3,$$

где $\xi^T = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3]^T = [0 \ 0 \ 0.5\sin(t)]^T$ – возмущение. Начальные условия объекта: $x^T(0) = [1, 0, 0]^T$. Закон управления (2.66)-(2.69) представляется в следующем виде:

$$u = \frac{1}{b_{0\min}} (\omega^3 e_1 + 3\omega^2 e_2 + 3\omega e_3),$$

где $b_{0\min} = 4$, $e_1 = \varepsilon = y_m - y = x_{1m} - x_1$, $e_2 = x_{2m} - x_2$, $e_3 = x_{3m} - x_3$.

Проведем моделирование системы для трех алгоритмов формирования ω

$$\text{а) } \dot{\omega} = -\sigma\omega + \gamma \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}, \quad \omega(0) = 1$$

$$\text{б) } \dot{\omega} = -\sigma\omega + \gamma\varepsilon^2, \quad \omega(0) = 0$$

$$\text{в) } \omega = \gamma\varepsilon^2.$$

Эталонную модель зададим следующей системой уравнений:

$$\dot{x}_{1m} = -3x_{1m} + x_{2m},$$

$$\dot{x}_{2m} = -3x_{1m} + x_{3m},$$

$$\dot{x}_{3m} = -x_{1m} + g,$$

где $g = 0,5\sin t$.

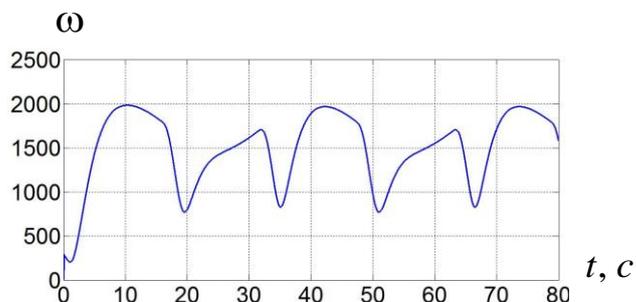
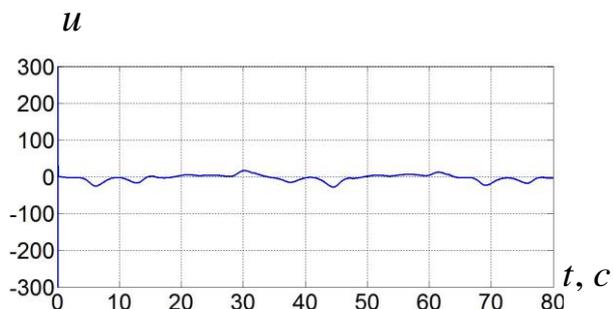
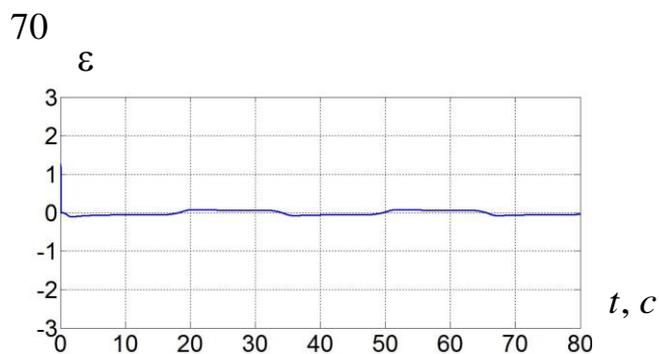
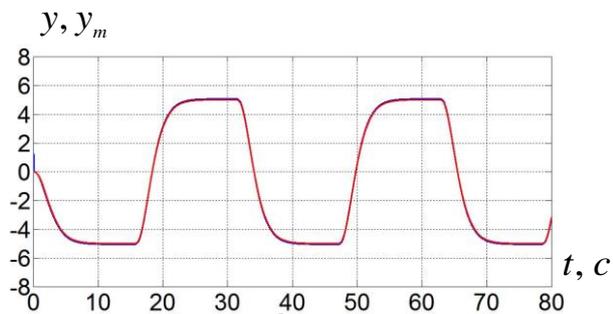


Рис.2.3. Переходные процессы в адаптивной системе управления замкнутой алгоритмом адаптации (2.4) связью $\gamma = 110, \sigma = 0.4$

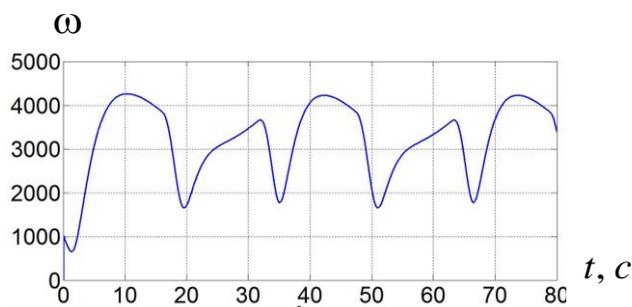
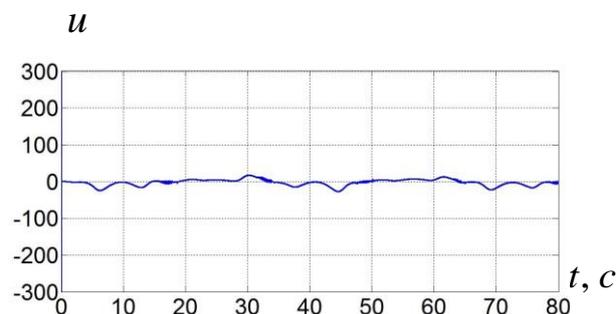
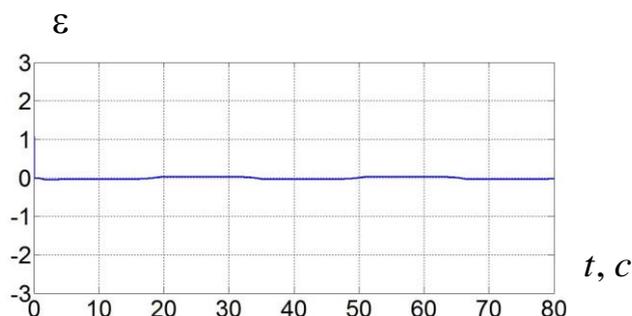
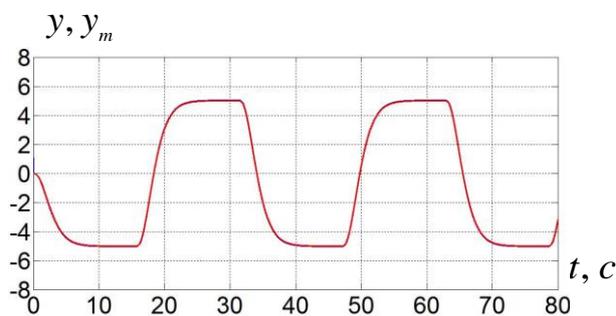


Рис.2.4. Переходные процессы в адаптивной системе управления замкнутой алгоритмом адаптации (2.4) связью $\gamma = 510, \sigma = 0.4$

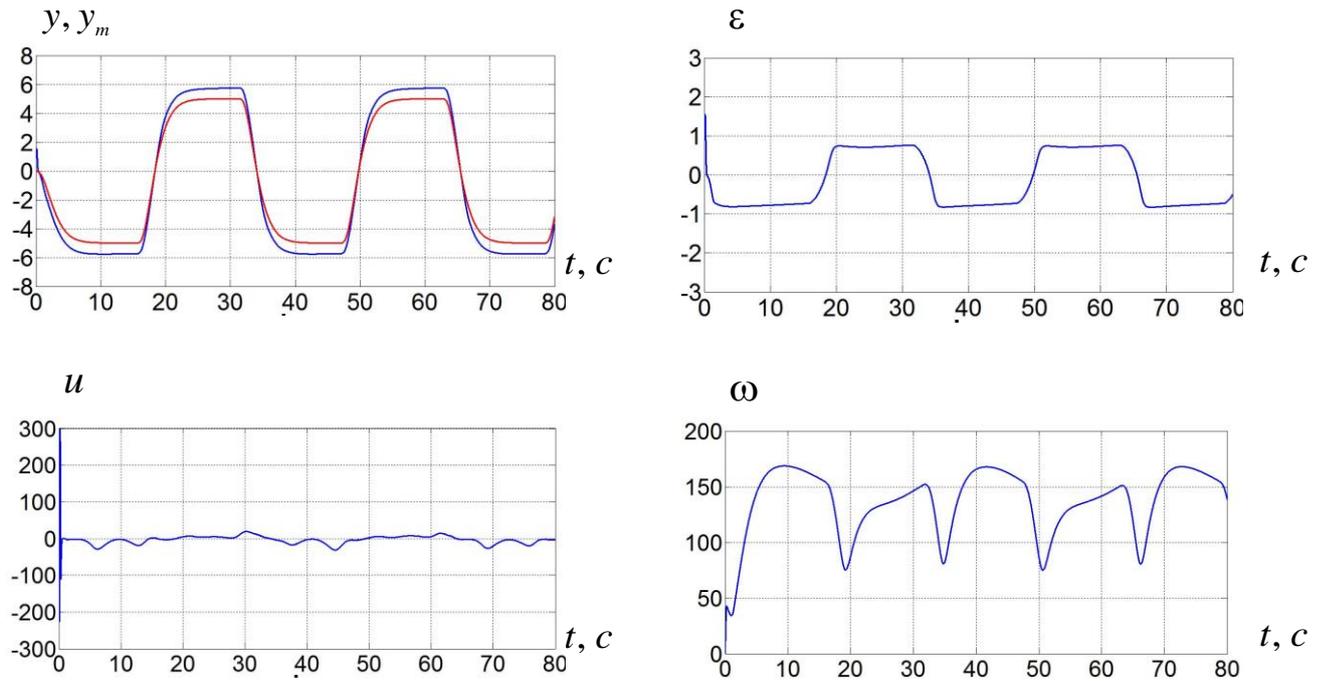


Рис.2.5. Переходные процессы в адаптивной системе управления замкнутой алгоритмом адаптации (2.5) связью $\gamma = 110$, $\sigma = 0.4$

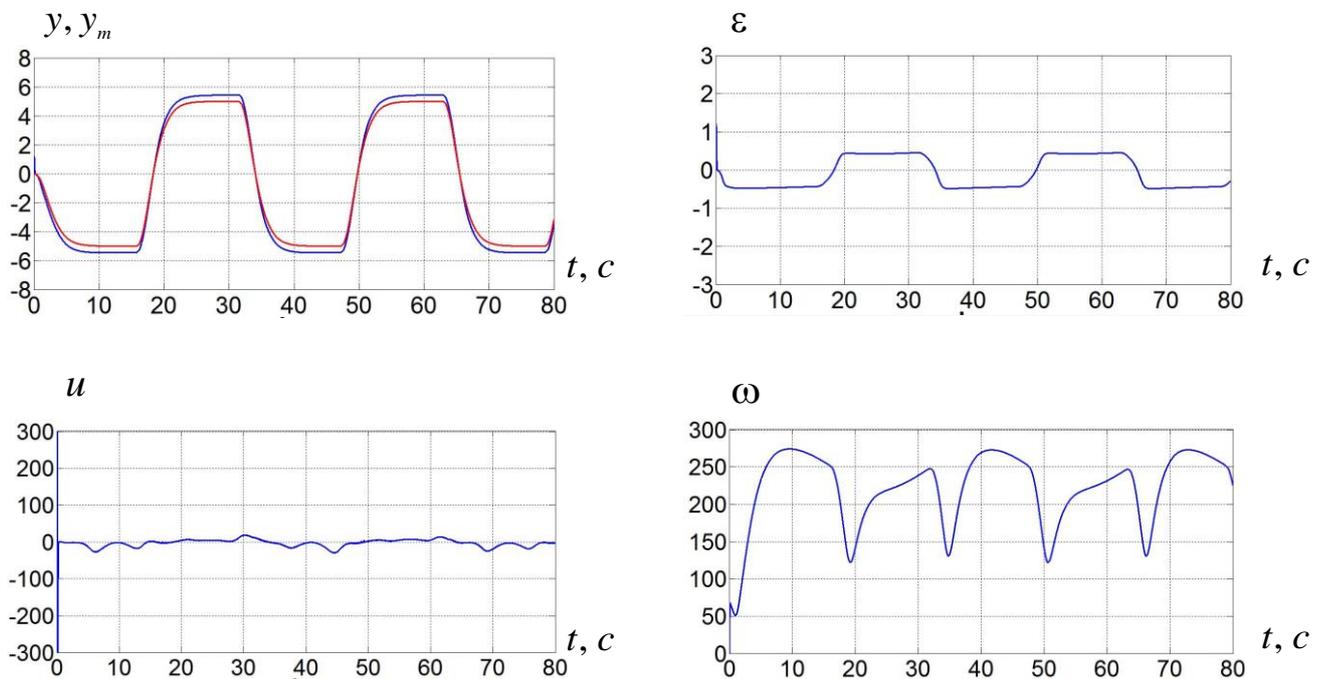


Рис.2.6. Переходные процессы в адаптивной системе управления замкнутой алгоритмом адаптации (2.5) связью $\gamma = 510$, $\sigma = 0.4$

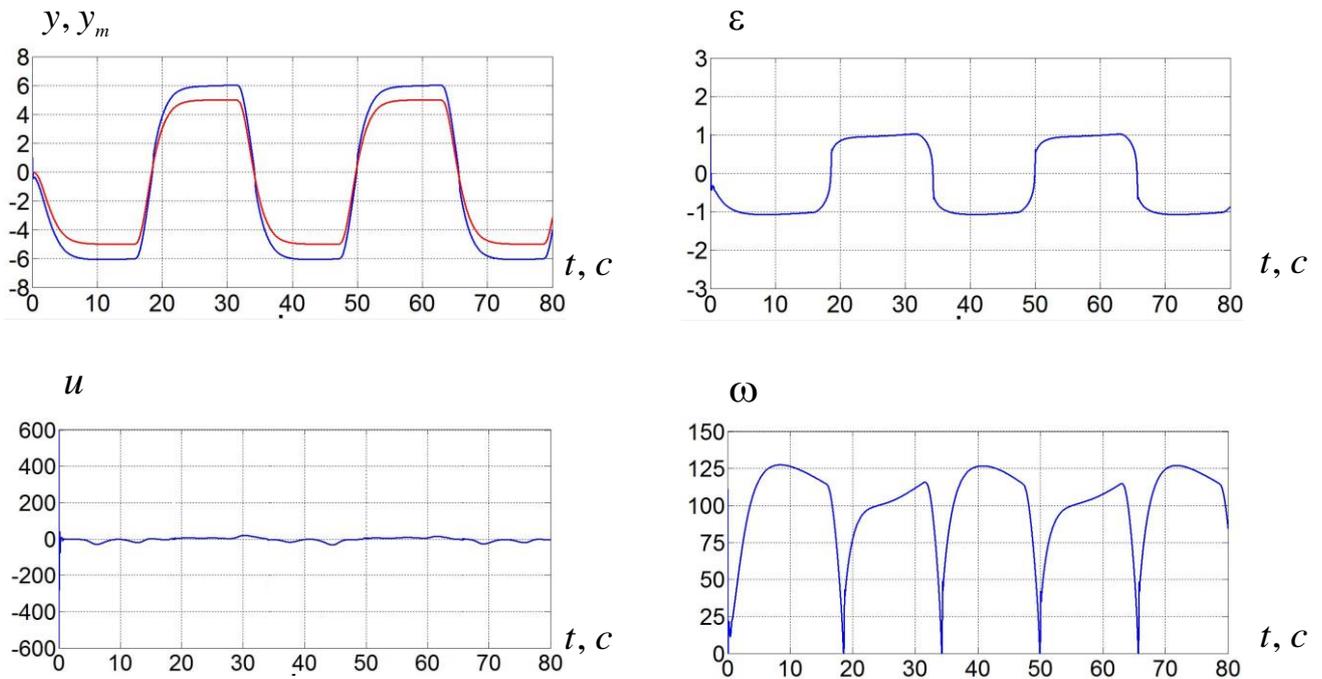


Рис.2.7. Переходные процессы в адаптивной системе управления замкнутой алгоритмом адаптации (2.6) связью $\gamma = 110$, $\sigma = 0.4$

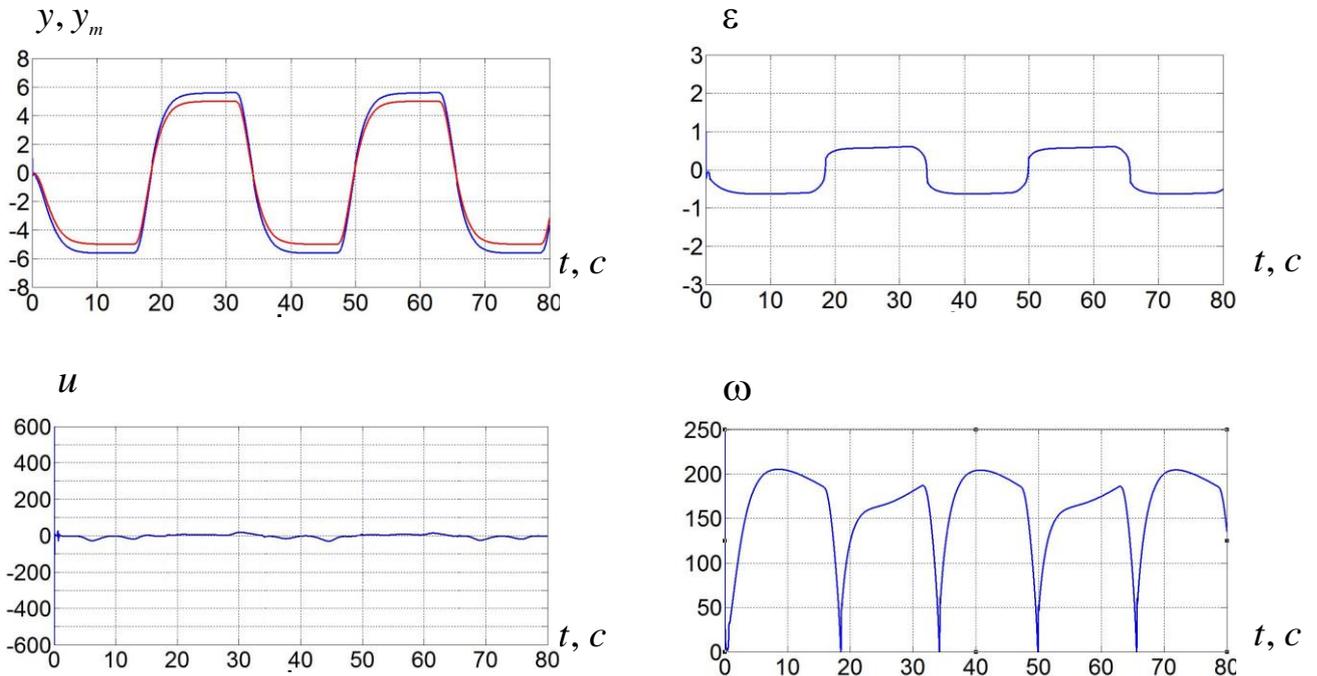


Рис.2.8. Переходные процессы в адаптивной системе управления замкнутой алгоритмом адаптации (2.6) связью $\gamma = 510$, $\sigma = 0.4$

Вывод: Результаты моделирования иллюстрируют работоспособность алгоритмов управления, ограниченность всех сигналов в системе и сходимость ошибки управления ε к окрестности нуля. Показано, что при увеличении коэффициента γ амплитуда установившейся ошибки $\varepsilon = y_m - y$ уменьшается.

2) Объект с относительной степенью, равной 2 :

$$\dot{x}_1 = (1.1 \sin(0.8 t) + 4)x_1 + x_2 + \xi_1,$$

$$\dot{x}_2 = 1.4 \cos(0.4 t)x_1 + \cos(0.5 t)x_2 + (2 + \cos(t))u + \xi_2,$$

$$\dot{x}_3 = \sin(0.1 t)x_1 + (3 + 2 \cos(t))x_2 + (1 + 2 \sin(0.9 t))x_3 + (10 + 5 \sin(0.8 t))u + \xi_3$$

где $\xi^T = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3]^T = [0 \ 0 \ 0.5 \sin(t)]^T$ – возмущение. Начальные условия объекта: $x^T(0) = [1, 0, 0]^T$. Закон управления (2.6), (2.7) представляется в следующем виде:

$$u = \frac{1}{b_{1\min}} (\omega^2 e_1 + 2\omega e_2),$$

где $b_{1\min} = 0.5$, $e_1 = \varepsilon = y_m - y = x_{1m} - x_1$, $e_2 = x_{2m} - x_2$.

Проведем моделирование системы для трех алгоритмов формирования ω :

$$\text{а) } \dot{\omega} = -\sigma \omega + \gamma \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2},$$

$$\text{б) } \dot{\omega} = -\sigma \omega + \gamma \varepsilon^2,$$

$$\text{в) } \omega = \gamma \varepsilon^2.$$

Эталонную модель зададим следующей системой уравнений:

$$\dot{x}_{1m} = -3x_{1m} + x_{2m},$$

$$\dot{x}_{2m} = -3x_{1m} + x_{3m},$$

$$\dot{x}_{3m} = -x_{1m} + g,$$

где $g = 0.5 \sin t$.

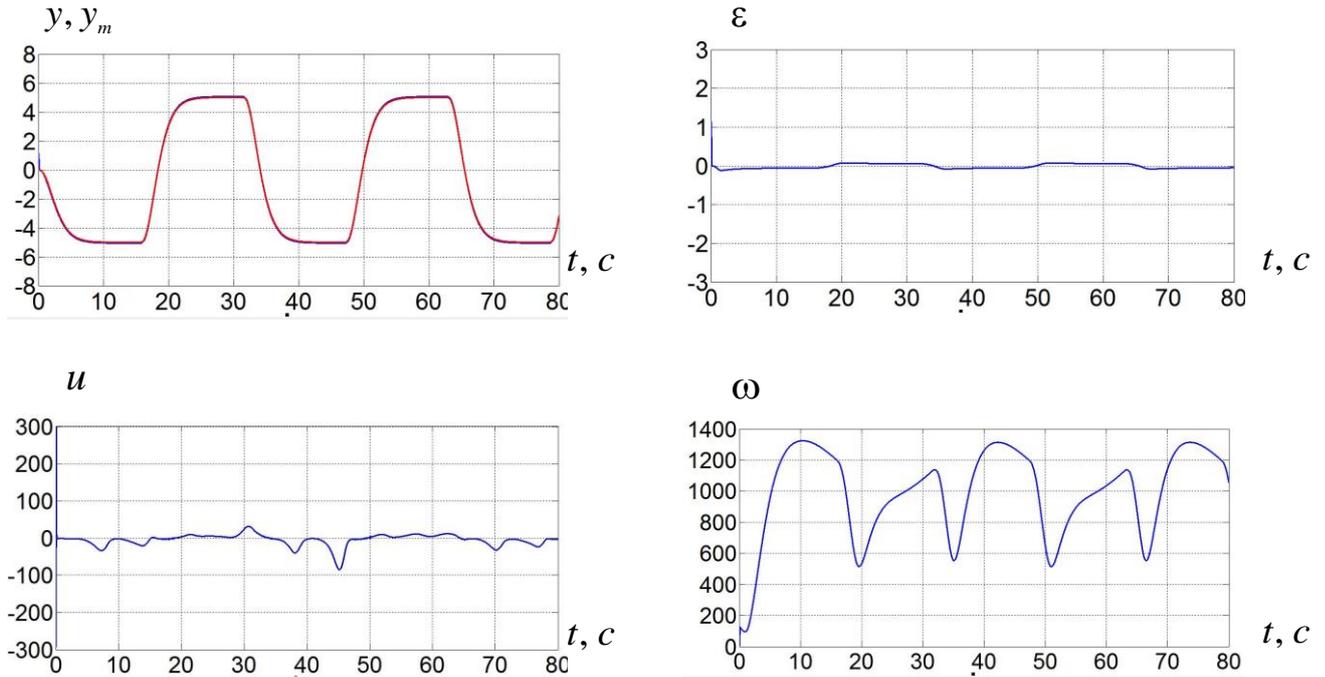


Рис.2.9 Переходные процессы в адаптивной системе управления замкнутой алгоритмом адаптации (2.4) связью $\gamma = 110$, $\sigma = 0.4$

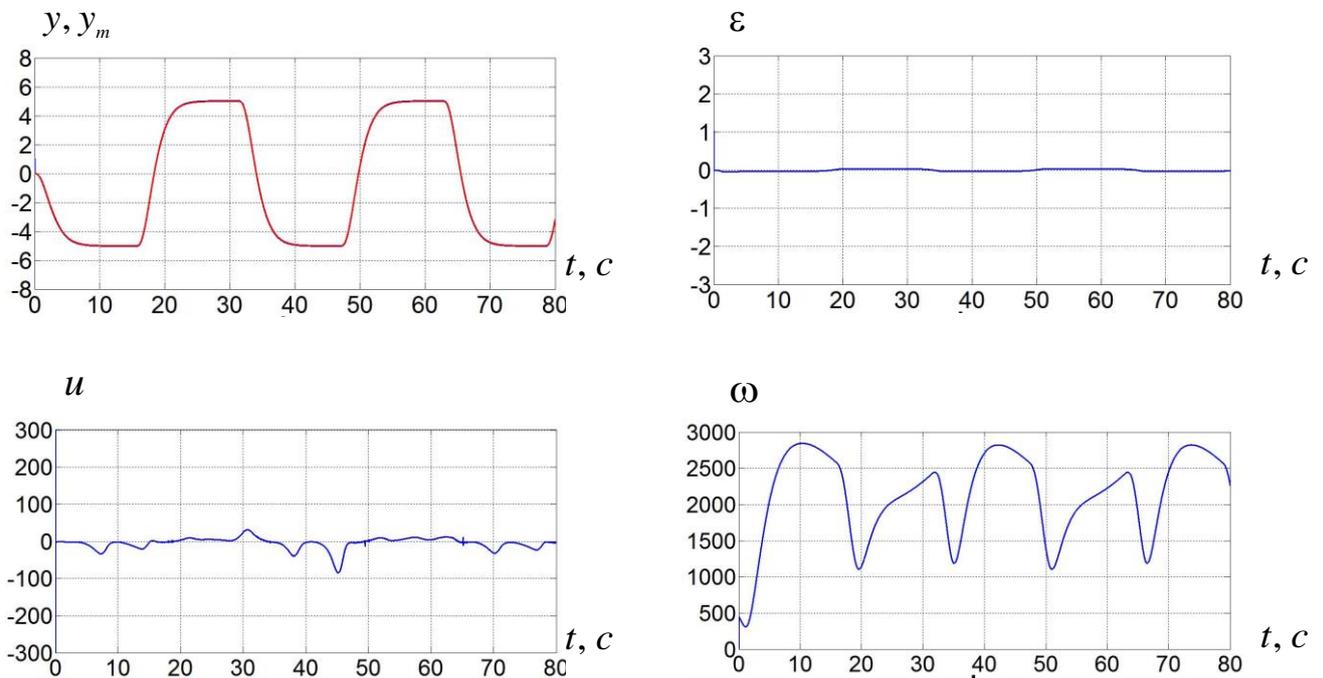


Рис.2.10 Переходные процессы в адаптивной системе управления замкнутой алгоритмом адаптации (2.4) связью $\gamma = 510$, $\sigma = 0.4$

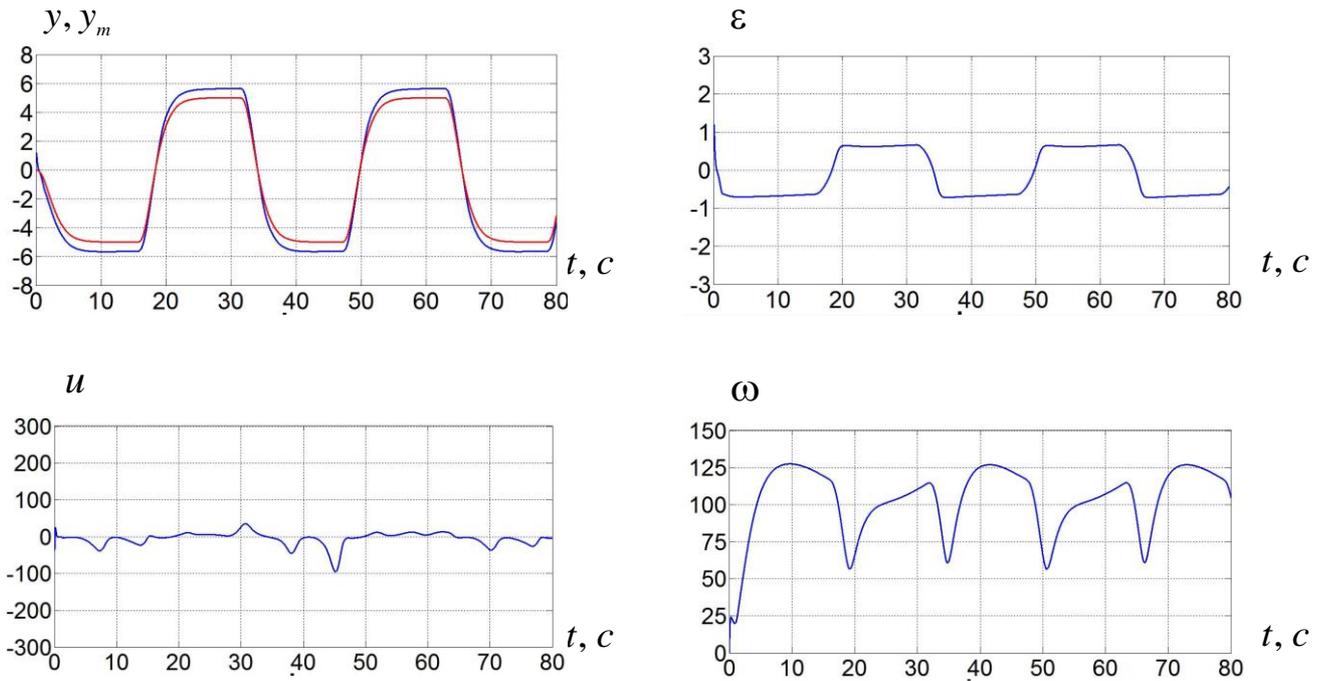


Рис.2.11 Переходные процессы в адаптивной системе управления замкнутой алгоритмом адаптации (2.5) связью $\gamma = 110$, $\sigma = 0.4$

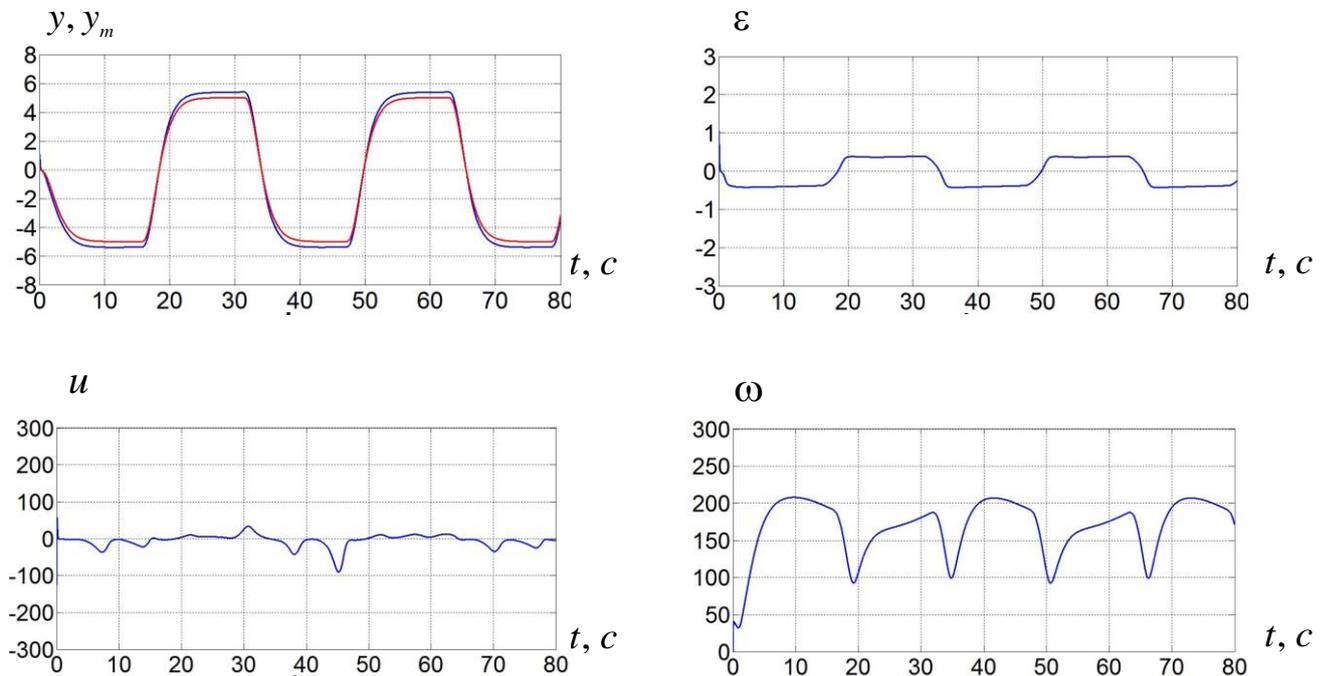


Рис.2.12 Переходные процессы в адаптивной системе управления замкнутой алгоритмом адаптации (2.5) связью $\gamma = 510$, $\sigma = 0.4$

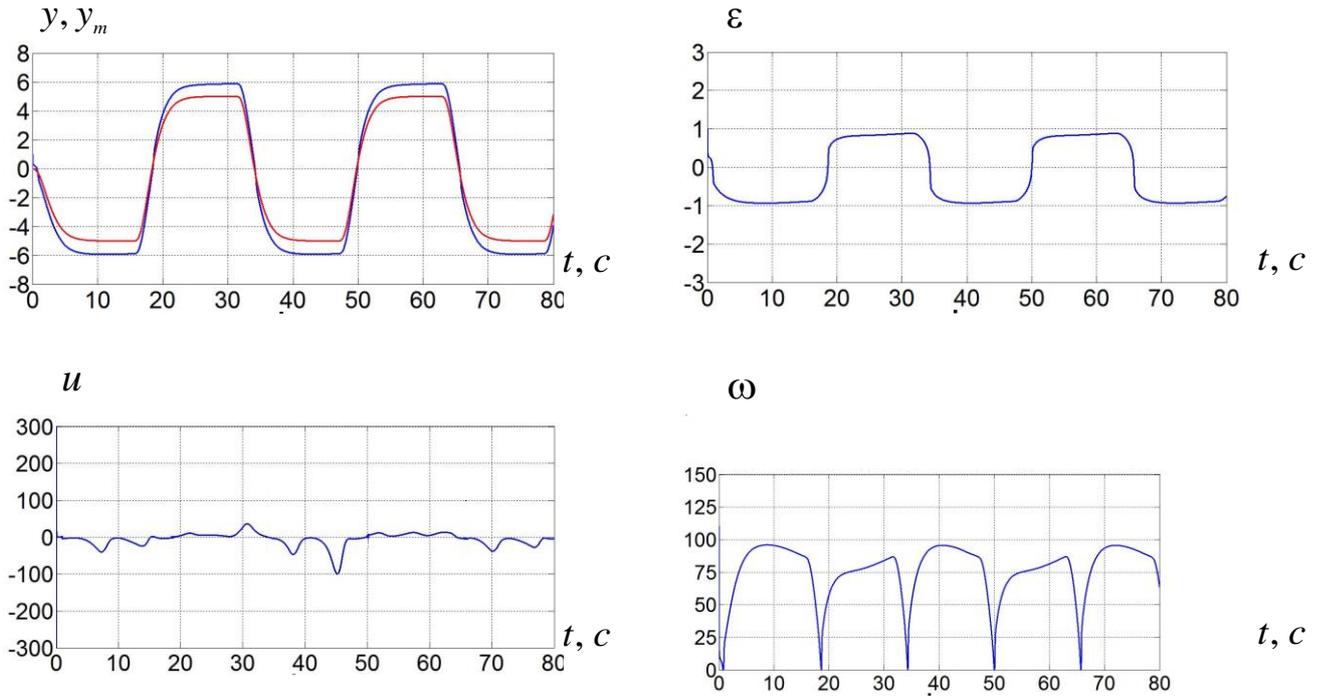


Рис.2.13 Переходные процессы в адаптивной системе управления замкнутой алгоритмом адаптации (2.6) связью $\gamma = 110$, $\sigma = 0.4$

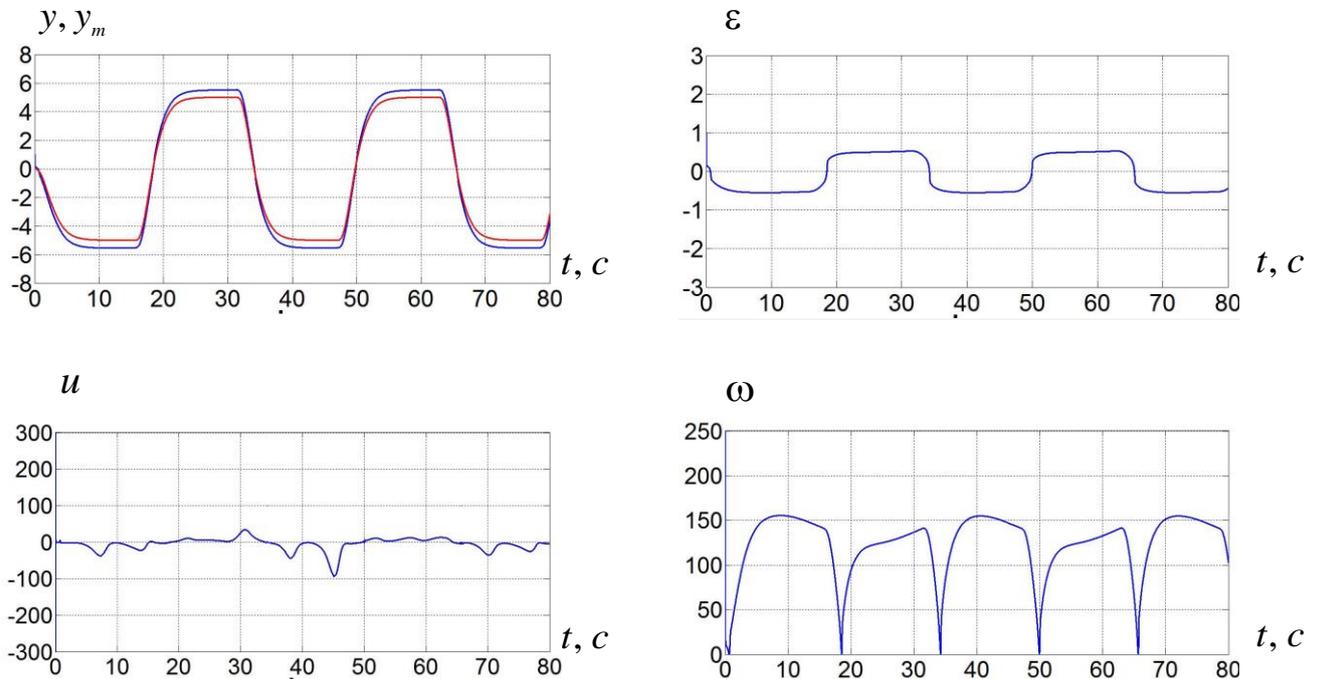


Рис.2.14 Переходные процессы в адаптивной системе управления замкнутой алгоритмом адаптации (2.6) связью $\gamma = 510$, $\sigma = 0.4$

Вывод: Ошибка по управления ε стремится к окрестности нулевого положения равновесия. Показано, что при увеличении коэффициента γ амплитуда установившейся ошибки $\varepsilon = y_m - y$ уменьшается.

2.7. Выводы по главе

Таким образом, в главе проведены теоретические исследования задачи адаптивного управления по состоянию объектами с переменными параметрами и треугольной структурой. Предлагаемый закон управления (2.66) обеспечивает в замкнутой системе ограниченность всех сигналов, асимптотическое стремление ошибки ε к окрестности нулевого положения равновесия. Радиус окрестности может быть уменьшен произвольно за счет увеличения коэффициента γ в одном из алгоритмов адаптации (2.67), (2.68) или (2.69).

Суть работы регулятора заключается в увеличении коэффициента обратной связи ω до тех пор, пока системе не станет устойчивой и ошибка управления не “уйдет” в заданную окрестность нуля. При этом ни скорость вариации параметров объекта, ни вид возмущения не влияют на факт достижения поставленной цели.

Функции $f(\varepsilon, t)$ и $r(\varepsilon, t)$ в алгоритмах адаптации задают правило (или форму) роста ω и выбираются экспериментальным путем.

Закон адаптивного управления имеет простую структуру и содержит всего одну производную, если в его структуре задействован алгоритм адаптации (2.67) или (2.68). В случае если используется алгоритм (2.69), то закон управления является статическим.

Отдельно отметим, что если параметры объекта не зависят от времени, то синтезированный закон управления гарантирует более сильное свойство экспоненциальной устойчивости.

Недостатком предложенного метода является возможное усиление высокочастотных шумов в канале управления, что ограничивает его применение в практических приложениях. Решение этой проблемы выходит за рамки диссертационной работы и может стать логическим продолжением проводимых исследований.

3. СИНТЕЗ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ КРУТЯЩИМ МОМЕНТОМ В ИНЖЕКТОРНЫХ ДВИГАТЕЛЯХ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ.

3.1. Актуальность задачи

Для безопасности и комфорта водителя автомобиля, для поддержания мощности на оптимальном уровне, а также эксплуатационных и топливно-экономических характеристик двигателей внутреннего сгорания (ДВС) имеется необходимость поддержания крутящего момента двигателя на желаемом уровне. Эта необходимость появляется, когда решаются нижеуказанных пользовательских задач:

- поддержание постоянного момента в режиме холостого хода, нужного для преодоления внутренних сил трения и сопротивления привода генератора;

- максимизация момента на маленьких и больших оборотах двигателя для увеличения тяговых характеристик автомобиля;

- быстрого сдерживание момента при взаимодействии с системами безопасности автомобиля;

- компенсация момента нагрузки, возникающего при переключении передач или неровностью дорожного покрытия.

В теории управления, представленные задачи приводятся к стандартной задаче слежения регулируемой переменной (развиваемого двигателем момента) за эталонным значением.

Двигатель внутреннего сгорания как объект управления является сложной нелинейной системой, которая работает в динамических режимах в условиях действия возмущений [42-63]. В виду сложной конструкции и многорежимности работы двигателя многие его параметры и характеристики являются неизвестными или неточно известными. В таких условиях задача

управления моментом является нестандартной, в связи с чем, возникает необходимость в использовании современных методов управления, которые позволяют отражать указанные особенности.

Большинство существующих решений задачи управления моментом базируется на статических таблицах, которые создаются на начальной ступени предварительной калибровки двигателя, где управляющее воздействие зависит от переменных состояния двигателя. Как видно из практики систем с возмущением, работающих в динамических режимах, статические таблицы обладают ограничением по качеству. Стоит заметить, что калибровка двигателя является длительным процессом, занимающим месяцы, что тоже является одним из значительных недостатков такого метода. Чтобы увеличить точность работы системы управления двигателем необходимо принимать во внимание в законе управления нелинейную динамику, внешние возмущения и неопределенности ДВС, чего можно достигнуть, используя высокоточные универсальные модели. Наряду с этим, важно уменьшить затрачиваемое на калибровку двигателя время, с помощью построения закона управления на основе математической модели, который обеспечит желаемый крутящий момент во всех его рабочих режимах.

В течение последних нескольких десятилетий было разработано много методов и алгоритмов, которые позволяют решить те или иные задачи управления моментом. Так, например, в [44 – 50] представлены методы локальной линеаризации нелинейных моделей совместно с методами теории линейных систем. В статьях [51, 52] рассматриваются алгоритмы нелинейного управления на базе нелинейных моделей, когда параметры известны, и методов градиентного спуска. В работах [53, 54] представлено управление на базе прогнозирующих моделей. В публикациях [55 – 57] задача управления моментом решается при помощи искусственных нейронных сетей. В публикации [66] рассматривается итеративный процесс обучения регулятора.

Ранее был проведен анализ существующих методов в области управления крутящим моментом двигателя внутреннего сгорания и показаны в статьях [59 – 63]. В работе [59] показан алгоритм адаптивного гибридного управления моментом, который предполагает разложение сложной нелинейной модели объекта на наиболее простые модели, где для каждой модели формируется настраиваемый закон управления с относительно простой структурой. Затем, когда закон управления реализуется на практике, дополнительно строится алгоритм выбора соответствующего регулятора. Основное отличие гибридного закона управления - высокий уровень его сложности, повышающийся при увеличении требований к точности системы. В работах [60, 61] представлен метод адаптивного управления моментом, разработанный на основе универсальной модели, которые обеспечивают цель управления за счет компенсации постоянных неизвестных параметров этой модели. В то же время возможно допущение, что все статические характеристики, формирующие момент, известны точно. В работах [62, 63] алгоритмы управления преобразуются на случай, когда параметры и статические характеристики неизвестны, это позволяет увеличить точность системы и не усложнять структуру регулятора.

Главное отличие представленного в работе метода управления моментом заключается в том, что он основывается на нелинейной динамической модели, содержащей параметрические и функциональные неопределенности, которые подавляются в ходе работы двигателя с помощью алгоритма адаптивного управления с одним настраиваемым параметром. Разработанный алгоритм имеет наиболее простую структуру, чем другие алгоритмы в [44 – 63], и содержит всего один оператор дифференцирования.

В настоящей главе диссертационной работы на основе разработанного в главе 2 метода адаптивного управления решается задача поддержания крутящего момента на заданном уровне. В основе синтеза регулятора лежит математическая модель ДВС, параметры и функции которой

идентифицируются с помощью данных, полученных в ходе тестирования автомобиля Chevrolet Tahoe с 8-и цилиндровым двигателем объемом 5,7 литра.

3.2. Постановка задачи

Цель управления заключается в обеспечении следующего целевого неравенства

$$|M_{жс}(t) - M(t)| \leq \Delta, \quad \forall t \geq T, \quad (3.1)$$

где $M_{жс}$ – желаемое значение крутящего момента, M – усредненное значение крутящего момента за один цикл работы ДВС, T – время настройки системы, Δ – максимально допустимая ошибка слежения.

В качестве сигнала управления крутящим моментом выступает дроссельная заслонка, расположенная во впускном коллекторе и регулирующая поток воздуха в цилиндры. В то же время, в задаче необходимо учесть динамику электропривода заслонки, постоянная времени которого сопоставима с временем переходного процесса объекта. Таким образом, сигналом управления в задаче является желаемое значение угла поворота заслонки α^* , задаваемое электроприводу, и на практике формируемое в зависимости от положения педали акселератора автомобиля. Подразумевается, что остальные системы управления ДВС (углом опережения зажигания, впрыском топлива и т.п.) работают в типичном режиме.

На практике допустимая максимальная ошибка слежения не должна превышать $\Delta = 20\%$.

3.3. Построение модели крутящего момента

Представим математическую модель двигателя, ориентированную на синтез управления моментом. Математическая модель объединяет между собой сигнал управления α^* с регулируемой переменной M и содержит модели подсистемы электропривода заслонки, модели подсистемы давления воздуха во впускном коллекторе и модели подсистемы крутящего момента [42 – 46].

Модель электропривода дроссельной заслонки. В первом приближении модель привода представляется в виде апериодического звена первого порядка:

$$\dot{\alpha} = -\frac{1}{T_d}\alpha + \frac{K_d}{T_d}\alpha^*, \quad (3.2)$$

где T_d – постоянная времени, характеризующая доминирующую динамику привода, K_d – коэффициент передачи модели. В работе предполагается, что параметры T_d , K_d положительны и известны.

Модель подсистемы давления воздуха во впускном коллекторе. Модель базируется на уравнении давления воздуха в коллекторе:

$$\dot{P} + \eta_c(P, \omega) \frac{V_d \omega}{4\pi V_m} P = \frac{RT_m}{V_m} \frac{\pi D^2}{4} \eta_t \varphi_1(P) \varphi_2(\alpha), \quad (3.3)$$

где P – давление воздуха, η_c – эффективность наполнения цилиндра, V_d – объем двигателя, ω – скорость вращения коленчатого вала, V_m – объем впускного коллектора, R – удельная газовая постоянная для воздуха, T_m – температура воздуха во впускном коллекторе, η_t – эффективность дроссельной заслонки, $\varphi_1(P)$ – ограниченная функция, D – диаметр патрубков с дроссельной заслонкой, $\varphi_2(\alpha)$ – функция, определяется как

$$\varphi_2(\alpha) \approx \left(1 - \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha_0)} \right), \quad (3.4)$$

где α_0 – угол дроссельной заслонки, при котором она полностью перекрывает отверстие коллектора (известная величина).

Модель подсистемы крутящего момента. Крутящий момент ДВС может быть вычислен из разности момента, развиваемого валом (эффективного момента) и момента сил сопротивления:

$$M = \frac{V_d Q_{HV}}{4\pi R T_m F_s} \eta_f(\omega) \varphi_3(\lambda) \varphi_4(\alpha_{ign}) P - M_F \quad (3.5)$$

где η_f – эффективность сгорания топлива, F_s – оптимальное соотношение воздух/топливо (В/Т) в цилиндрах, Q_{HV} – удельная теплота сгорания топлива, λ – коэффициент избытка воздуха, α_{ign} – угол опережения зажигания, $\varphi_3(\lambda)$, $\varphi_4(\alpha_{ign})$ – эффективности момента по коэффициенту избытка воздуха и углу опережения зажигания соответственно, которые могут быть найдены как теоретически, так и экспериментально, M_L – момент сил трения, определяемый эмпирической зависимостью:

$$M_F = c_0 + c_1 \omega + c_2 \omega^2, \quad (3.6)$$

где c_0, c_1, c_2 – постоянные коэффициенты, определяемые эмпирическим путем.

На основании выражений (3.2) – (3.6) путем дифференцирования (3.5) приведем модель момента к более компактной форме[67]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{A}_c x + \bar{B}_c \alpha^* + \bar{\xi}, \\ M = x_1, \end{cases} \quad (3.7)$$

где $x = [M \ \alpha]^T$,

$$\bar{A}_c = \begin{bmatrix} (\dot{C}_c / C_c + A_c) & C_c B_c \varphi_2(\alpha) / \alpha \\ 0 & -1 / T_d \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ K_d / T_d \end{bmatrix},$$

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} (\dot{C}_c / C_c + A_c) D_c - \dot{D}_c \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_c = -\eta_c(P) \frac{V_d \omega}{4\pi V_m}, B_c = \eta_t(P) \frac{RT_m}{V_m} \frac{\pi D^2}{4} \varphi_1(P),$$

$$C_c = \frac{V_d Q_{HV}}{4\pi RT_k F_s} \eta_f(\omega) \varphi_3(\lambda) \varphi_4(\alpha_{ign}), D_c = c_0 + c_1 \omega + c_2 \omega^2.$$

Модель обладает следующими свойствами:

1. Постоянные параметры и функции $\eta_c(x)$, $\eta_t(x)$, $\eta_f(\omega)$, M_F , $\varphi_3(\lambda)$, $\varphi_4(\alpha_{ign})$ неизвестны, что вызывает необходимость применения методов идентификации;

2. Уравнения модели представлены в непрерывном виде. Наряду с этим переменные P , M , α , ω , λ и α_{ign} измеряются дискретно с периодом, равным одной четверти оборота коленчатого вала (для 8-и цилиндрического двигателя). В связи с чем в целях реализации закона управления и идентификации неизвестных параметров и функций уравнения (3.6) подлежат дискретизации (в англоязычной литературе принят термин “event time sampling”) с периодом

$$\tau(k) = 15 / \omega(k),$$

где k – номер шага дискретного времени.

Перепишем (3.3) и (3.5) в дискретной форме, используя метод Эйлера:

$$P(k+1) = A_D(k)P(k) + B_D(k)\varphi_2(\alpha), \quad (3.8)$$

$$M(k) = C_D(k)P(k) - D_D(k), \quad (3.9)$$

где $A_D = 1 - 15A_c / \omega$, $B_D = 15B_c / \omega$, $C_D = C_c$, $D_D = D_c$.

Разложим функции A_D , B_D , C_D в ряды Тейлора по соответствующим аргументам и представим (3.8), (3.9) в виде авторегрессионных моделей:

$$\begin{cases} P(k+1) = \theta_{1...10}^T \xi_{1...10}(k)P(k) + \theta_{11...15}^T \xi_{11...15}(k)\varphi_2(\alpha(k)), \\ M(k) = \psi_{1...10}^T \upsilon_{1...10}(k)P(k) - \psi_{11...13}^T \upsilon_{11...13}(k), \end{cases} \quad (3.10)$$

где

$$\xi_{1...10}^T = \begin{bmatrix} 1 & P & P^2 & P^3 & P\omega & P^2\omega & P\omega^2 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \end{bmatrix},$$

$\xi^T_{11...15} = [1 \quad P \quad P^2 \quad P^3 \quad P^4]$ – компоненты вектора ξ ,

$\upsilon^T_{1...10} = [1 \quad \alpha_{ign} \quad \alpha_{ign}\omega \quad \alpha_{ign}\lambda \quad \alpha_{ign}^2 \quad \omega \quad \omega\lambda \quad \omega^2 \quad \lambda \quad \lambda^2]$,

$\upsilon^T_{11...13} = [1 \quad \omega \quad \omega^2]$ – компоненты вектора υ ,

$\theta^T_{1...10}, \theta^T_{11...15}, \psi^T_{1...10}, \psi^T_{11...13}$ – компоненты векторов неизвестных параметров.

Представление (3.10) позволяет применить алгоритм наименьших квадратов для идентификации параметров θ и ψ .

В ходе идентификации были использованы данные, полученные с помощью теста FTP18¹ автомобиля Chevrolet Tahoe с восьмицилиндровым двигателем объемом 5,7 литра. Результаты проверки модели представлены на рисунке 3.1, где показаны экспериментальные ($P_{эксн}$ и $M_{эксн}$) и моделируемые ($P_{мод}$ и $M_{мод}$) процессы изменения давления во впускном коллекторе и развиваемого момента, соответственно. Из результатов видно (правые рисунки), что максимальная ошибка модели по давлению не превышает 3% от амплитуды давления, максимальная ошибка по моменту не превышает 5%. Следовательно, качество модели является допустимым, что позволяет синтезировать управление, удовлетворяющее заданной точности по моменту.

Из полученных результатов видно (рисунки б) и г) на которых показаны отклонения моделируемых процессов от экспериментальных), что максимальная ошибка модели по давлению не превышает 3% от амплитуды давления, максимальная ошибка по моменту не превышает 5%. Таким образом, качество модели является допустимым, что позволяет синтезировать управление, удовлетворяющее необходимой точности по моменту.

¹ FTP18 (Federal Test Procedure) — принятый в США федеральный испытательный цикл для определения уровней выбросов токсичных компонентов с обработавшими газами легкового автомобиля. Тест проводится в стандартных условиях в специальном боксе, внутри которого осуществляется точное воспроизведение заданных условий движения, имитирующих движение автомобиля по улицам города.

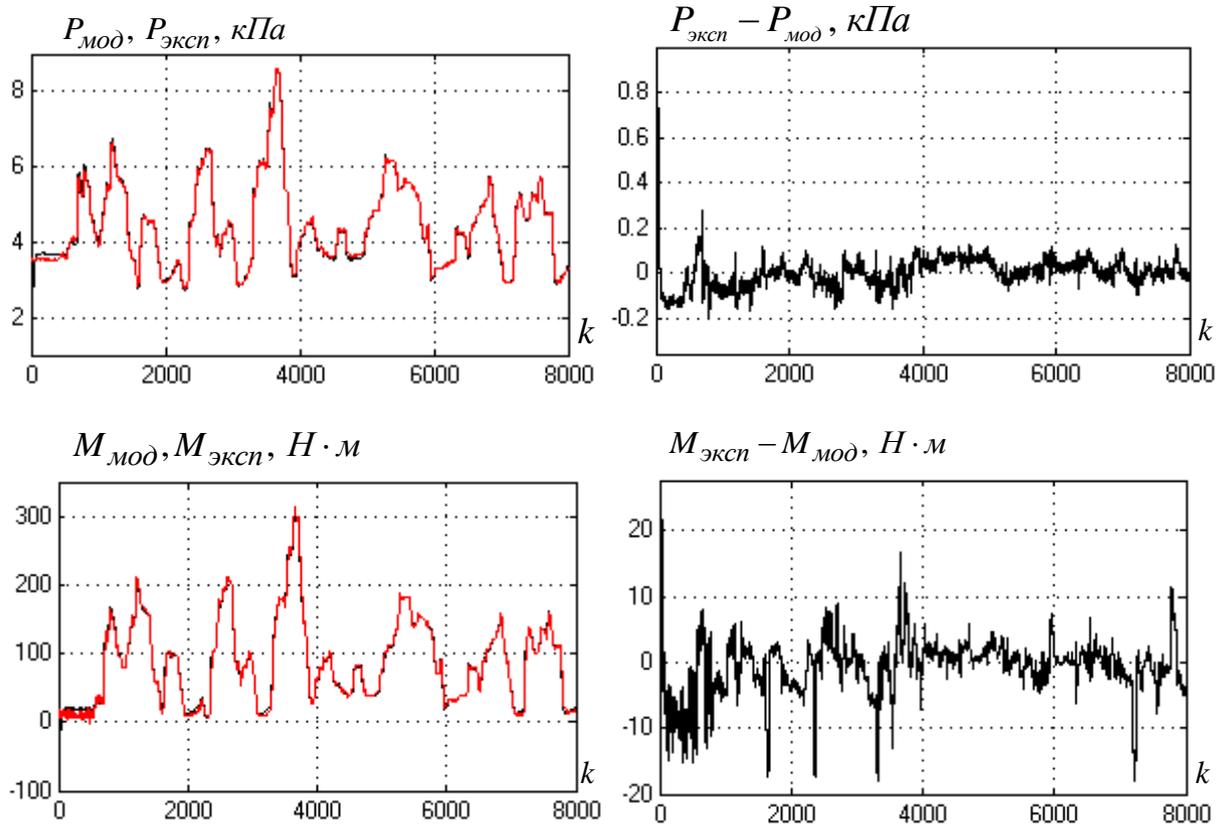


Рисунок 3.1. Результаты проверки модели момента

Полученные для дискретной модели функции $\theta^T_{1...10}\xi_{1...10}$, $\theta^T_{11...15}\xi_{11...15}$, $\psi^T_{1...10}\upsilon_{1...10}$, $\psi^T_{11...13}\upsilon_{11...13}$ позволяют определить неизвестные функции непрерывной модели (3.7) и в дальнейшем синтезировать управление.

Проведем проверку адекватности математической модели в пакете программ MathLab / Simulink и сравним их с характеристиками двигателя Chevrolet Tahoe с типом двигателя: Vortec 5300 V8 (V-образный, 8-и цилиндровый); максимальный крутящий момент: 460 Нм (при ск. 4000 об/мин); мощность: 320 л.с. (239 кВт).

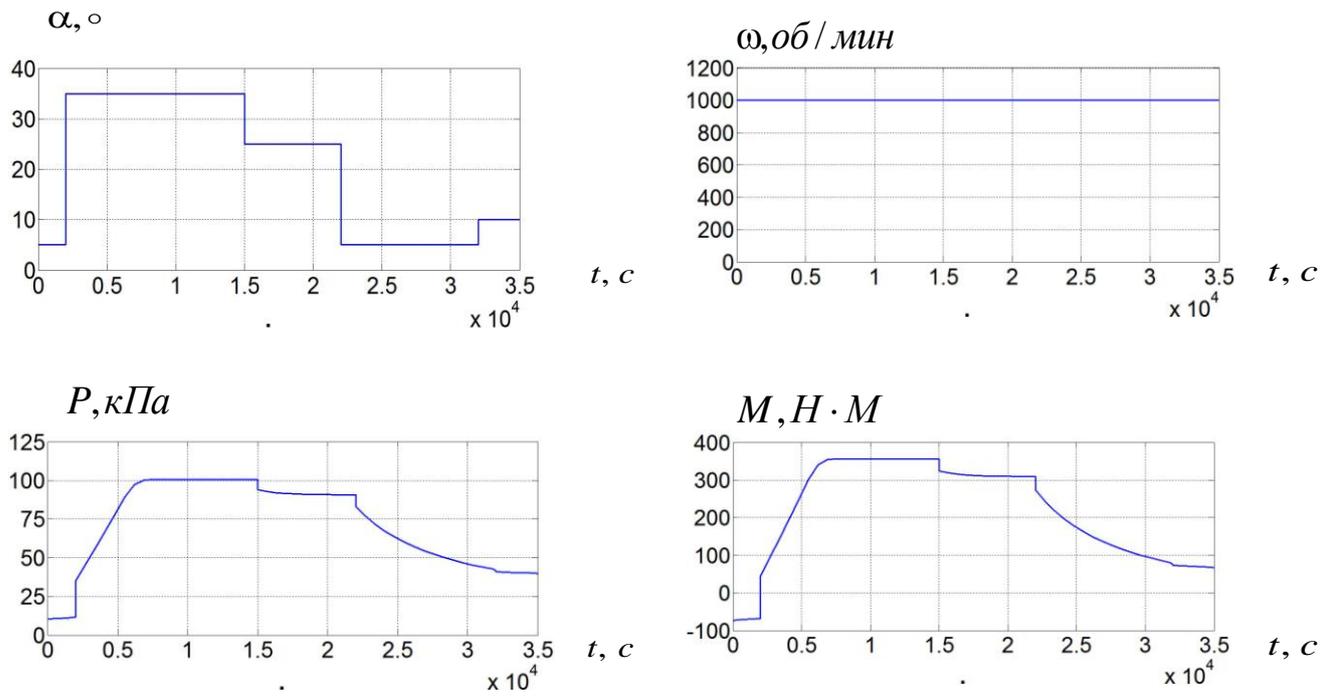


Рис.3.2. Результаты проверки модели

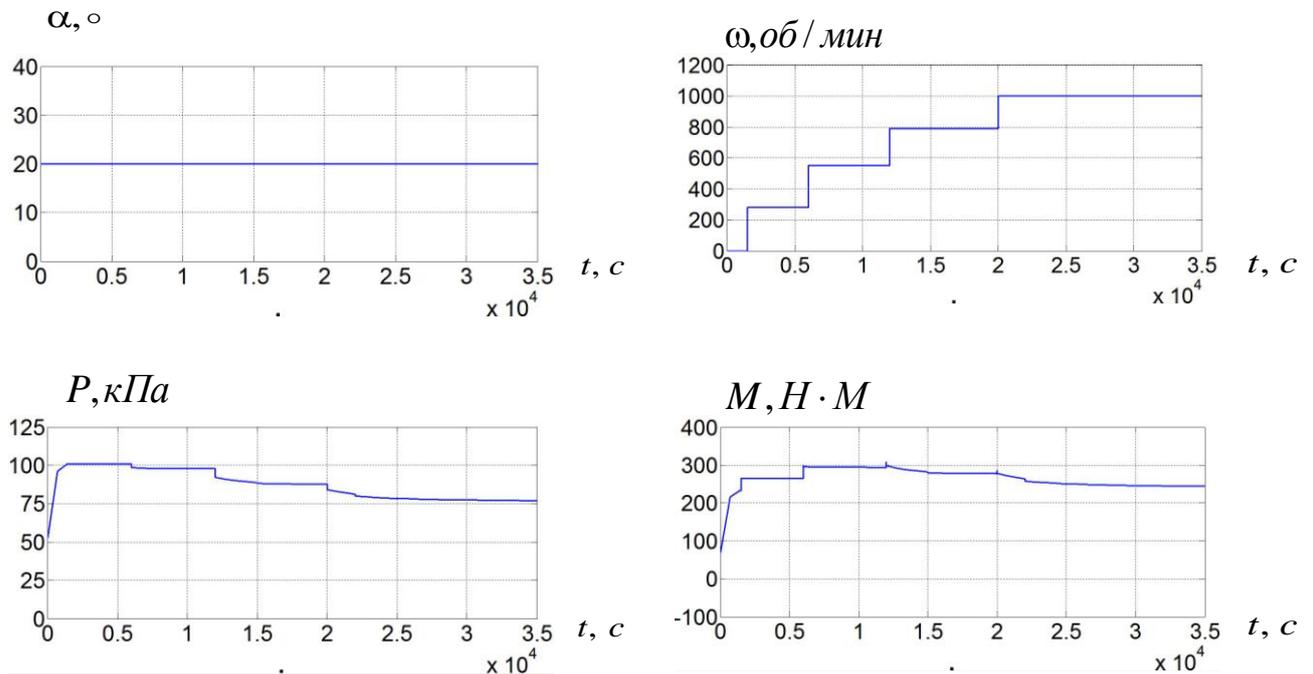


Рис.3.3. Результаты проверки модели

Из графиков можно сделать вывод об адекватности выходов модели адекватна процессам, протекающим в двигателе.

3.4. Построение регулятора

Регулятор строится на основе простого алгоритма адаптации, разработанного в главе 2, и заключается в замыкании объекта настраиваемой “сильной” обратной связью, обеспечивающей устойчивость замкнутой системы и экспоненциальное стремление ошибки управления к окрестности нулевого положения равновесия.

В целях синтеза регулятора сформируем эталонную модель:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{жс1} \\ \dot{x}_{жс2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho_1 & 1 \\ -\rho_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{жс1} \\ x_{жс2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_0 \end{bmatrix} M^*, \\ M_{жс} = x_{жс1} \end{cases} \quad (3.11)$$

где M^* – сигнал задания; $x_{жс1}$, $x_{жс2}$ – переменные вектора состояния эталонной модели; $\rho_0 > 0$, $\rho_1 > 0$ – параметры эталонной модели, определяющие динамику замкнутой системы после настройки параметра регулятора.

Далее вводится ошибка управления $e = x_{жс} - x$, после дифференцирования которой с учетом (3.7) и (3.11) строится модель ошибки:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} (\dot{C}_c / C_c + A_c) & C_c B_c \varphi_2(\alpha) / \alpha \\ 0 & -1 / T_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ K_d / T_d \end{bmatrix} \alpha^* + \delta \quad (3.12)$$

где

$$\delta = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_0 \end{bmatrix} M^* - \begin{bmatrix} \rho_1 + (\dot{C}_c / C_c + A_c) & -1 + C_c B_c \varphi_2(\alpha) / \alpha \\ \rho_0 & -1 / T_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{жс1} \\ x_{жс2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\dot{C}_c / C_c + A_c) D_c - \dot{D}_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

– ограниченный сигнал .

Так как функции A_c, B_c, C_c и D_c непрерывны, дифференцируемы, ограничены и имеют ограниченные производные (что справедливо для физической системы), а функция $C_c B_c \varphi_2(\alpha) / \alpha$ непрерывна,

дифференцируема и положительна, то модель ошибок (3.12) можно отнести относится к классу моделей ошибок (2.70). В связи с этим, учитывая второй динамический порядок и вторую относительную степень модели (3.12), применим разработанный во второй главе закон управления вида

$$\alpha^* = r^2 e_1 + C_1 r e_2, \quad (3.13)$$

где r формируется алгоритмом адаптации

$$\dot{r} = -\sigma r + \gamma e_1^2, \quad (3.14)$$

в котором $\gamma > 0, \sigma > 0$ – постоянные параметры.

3.5. Моделирование

Произведем моделирование замкнутой системы с полученным регулятором простой структуры. Параметры и функции модели (3.7), полученные входе идентификации приведены в таблице 3.1.

Входные сигналы модели принимают следующие значения:
 $\alpha_{ign} = 30^\circ, \lambda = 1.$

Параметры регулятора (3.13), (3.14) и эталонной модели (3.11) имеют следующие значения: $\gamma = 0,02, \sigma = 0,01, r(0) = 0, \rho_0 = 6, \rho_1 = 5.$

Параметры электропривода дроссельной заслонки имеют следующие значения: $T_d = 0,3, K_d = 1.$

В канале измерения момента добавлен аддитивный шум мощностью 0,00000001 с интервалом дискретизации 0,001 с.

Результаты моделирования представлены на рисунке 3.4.

Таблица 3.1 – Параметры модели

Параметр	Значение/ вид функции
α_0	$3,5 \times 10^{-2}$
A_c	$(1,02 \times 10^{-1} - (1,9 \times 10^{-3})P + (2,9 \times 10^{-6})P^2 + (3,68 \times 10^{-8})P^3 - (1,18 \times 10^{-4} + (4,66 \times 10^{-8})\omega^2 - (1,01 \times 10^{-11})\omega^3 + (5,21 \times 10^{-7})P\omega - (6,89 \times 10^{-9})P^2\omega - (2,2 \times 10^{-9})P\omega^2) / \tau$
B_c	$4,745 + (7,66 \times 10^{-3})P - (2,89 \times 10^{-3})P^2 + (8,09 \times 10^{-5})P^3 - (5,37 \times 10^{-7})P^4$
C_c	$162,93 - (5,61 \times 10^{-1})\alpha_{ign} + (9,24 \times 10^{-5})\alpha_{ign}\omega + (6,13 \times 10^{-1})\alpha_{ign}\lambda - (1,21 \times 10^{-3})\alpha_{ign}^2 - (1,75 \times 10^{-2})\omega + (3,77 \times 10^{-2})\omega\lambda - (7 \times 10^{-6})\omega^2 - 189,82\lambda + 57,98\lambda^2$
D_c	$106,72 + (2,36 \times 10^{-2})\omega - (8,32 \times 10^{-6})\omega^2$
τ	$15 / \omega$

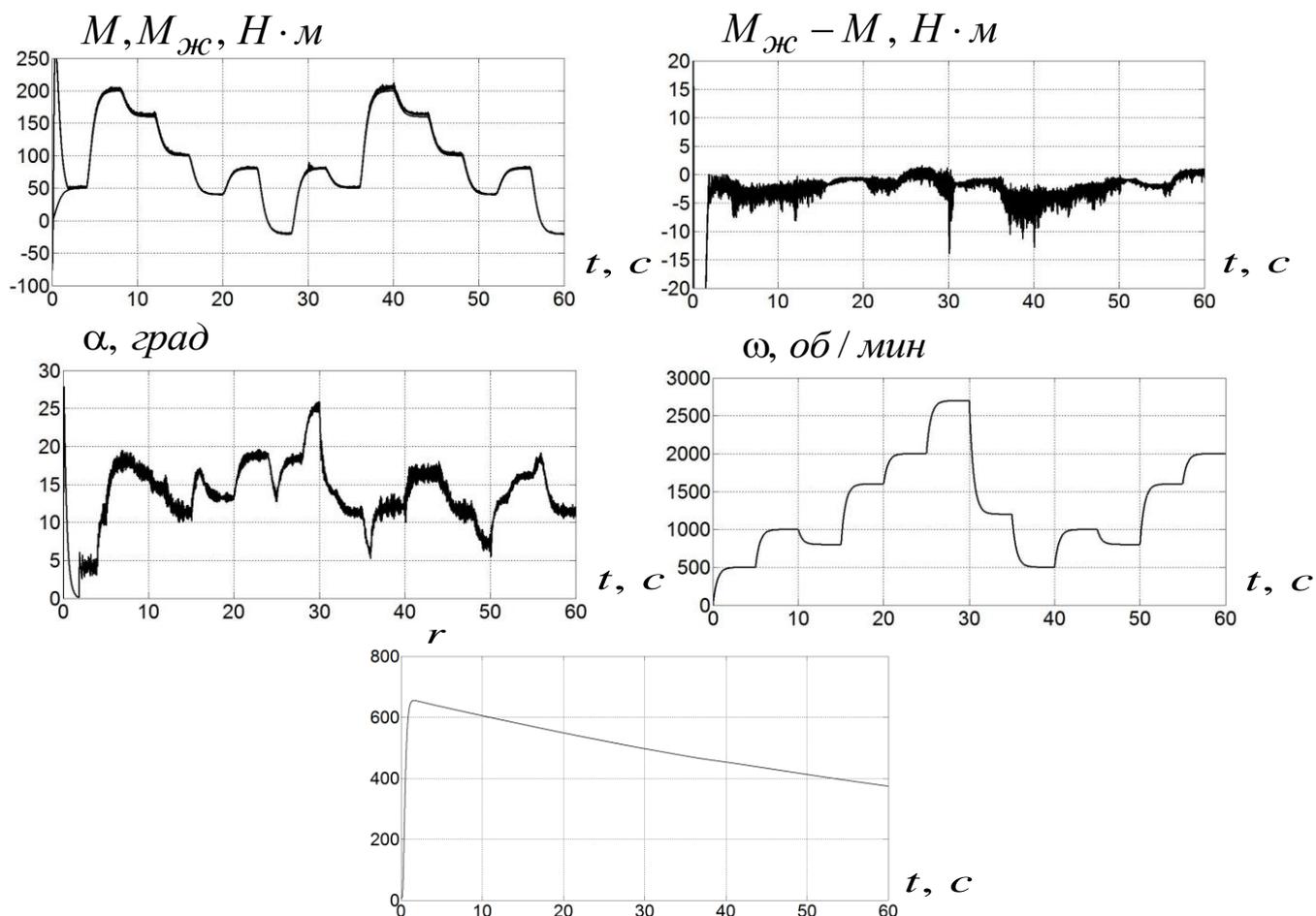


Рисунок 3.4 – Результаты моделирования адаптивной системы управления крутящим моментом.

Вывод: Из результатов моделирования видно, что при существенном изменении скорости вращения двигателя регулятор обеспечивает ограниченность всех сигналов и стремление ошибки к ограниченной окрестности нуля. Радиус окрестности ниже ошибки управления 20 Н·м, что дает основания для дальнейшей практической реализации полученного алгоритма.

Таким образом, на основе разработанной для 8-и цилиндрового двигателя автомобиля Chevrolet Tahoe математической модели крутящего момента синтезирован алгоритм адаптивного управления моментом. Алгоритм предполагает измерение только величин крутящего момента и положения заслонки и имеет один настраиваемый параметр. Алгоритм

обеспечивает ограниченность всех сигналов и стремление ошибки управления к ограниченному множеству нуля. При этом радиус окрестности может быть уменьшен путем увеличения коэффициента γ и/или уменьшения σ в выражении (3.14).

4. СИНТЕЗ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ МИКРОКЛИМАТОМ ПАРНИКОВОЙ ТЕПЛИЦЫ

4.1. Актуальность задачи

В современном мире одним из главных направлений сельского хозяйства является разработка высокоэффективных интеллектуальных систем управления в тепличном производстве, что продиктовано в первую очередь необходимостью в пополнении российского потребительского рынка отечественными фруктами, овощами и декоративными растениями круглый год. Существенное увеличение собственного производства позволит как снизить импортозависимость, так и в максимально возможной мере обеспечить наше население сельскохозяйственной продукцией.

Как известно, тепличное производство относится к дорогостоящим и энергоемким, что обуславливает необходимость в строгом следовании технологиям выращивания растений. С одной стороны для каждой отдельной агрокультуры существуют необходимые показатели температуры, влажности, интенсивности и спектра излучения, концентрации диоксида углерода и т.п., которые важно поддерживать с заданной точностью. С другой стороны излишнее увеличение ряда показателей неизбежно ведет к большим энергетическим затратам. Так, например, в Центральном районе РФ при превышении температуры внутренней воздушной среды теплиц сверх необходимой на 1°C , за год в расчете на 1 га площади теплиц, расходуется дополнительно 100 тонн условного топлива (100 тонн каменного угля), что эквивалентно энергии $7 \cdot 10^8$ ккал. Примерно такие же размеры перерасхода топлива возникают при выходе за требуемые границы управления влажностью воздуха в теплицах.

В связи с этим, во всем мире существует тенденция по формированию и совершенствованию наиболее высокоэффективных сельскохозяйственных

аграрных комплексов, с высокой урожайностью при низких энергетических и трудовых затратах. Исследования и разработки осуществляются как при выведении новых и улучшения существующих сортов растений, повышения качества типов гидропонных грунтов и удобрений, производства систем обогрева теплиц и энергосберегающих ламп, так и при разработке эффективных систем автоматического управления, которые делают возможным поддерживать необходимые микроклиматические параметры теплицы на нужном уровне.

Поддержание микроклимата в теплицах является одной из более приоритетных задач, поскольку, даже несмотря на специально выведенные под определенные условия растения, качество удобрений и грунта, неправильная поддержка микроклимата в помещениях теплиц и несоответствующая необходимым нормам подкормка CO_2 могут привести к снижению урожайности вплоть до гибели растений и, в дальнейшем к значительным убыткам.

Изменение микроклимата теплицы является сложным, многопараметрическим, существенно нелинейным процессом и зависит от большого количества внутренних и внешних факторов. Так, внешними факторами являются температура и влажность наружного воздуха, направление и скорость ветра, интенсивность солнечного излучения и т.п. Внутренними факторами являются геометрические параметры теплиц, расположение элементов систем отопления и вентиляции, К тому же, в замкнутых контурах управления микроклиматом возможно влияние каналов управления друг на друга. К примеру, при открытии форточки для понижения температуры воздуха в помещении теплицы, может быть уменьшена влажность и концентрация CO_2 . Все эти факторы сложно учесть в полной мере, вследствие этого задачи управления микроклиматом стоит решать на основе усовершенствованных методов теории нелинейных и адаптивных систем.

В наше время, одним из наиболее распространенных решений задачи управления микроклиматом является управление, основанное на пропорционально-интегрально-дифференциальном регулировании (т.н. ПИД-регулировании) [68, 69], это можно объяснить простой структурой ПИД-регуляторов и потребностью в измерении всего одной переменной. При этом такие регуляторы имеют существенные ограничения по качеству, так как не могут обеспечить полную компенсацию нелинейной динамики, возмущений и неопределенностей процессов. Другим решением построения систем управления микроклиматом являются регуляторы, в основе которых лежат искусственные нейронные сети [70, 71, 72]. Они с одной стороны обеспечивают сравнительно высокую точность, а с другой стороны нуждаются в долговременной предварительной обработке существенного объема данных. При этом нет гарантии, что обученная на одних данных сеть, будет также хорошо работать при попадании других данных, характерных для других режимов. В настоящее время, одно из наиболее актуальных направлений является синтез управления в основе которого лежит математическая модель [73, 74, 75], которая позволяет учесть нелинейность и динамику микроклиматических процессов теплицы. Наряду с этим во многих имеющихся методах, в основе которых лежат модели, не учитывается неопределенность параметров модели, что может привести к потере качества управления. Ввиду этого, актуальным является использование методов адаптивного управления и идентификации. Так в рамках метода, показанного в работе [76], представлено адаптивное управление температурой воздуха, где в основе синтеза лежит математическая модель. Но при этом не учитывается влияние канала управления температуры на другие параметры микроклимата.

В настоящем разделе диссертационной работы представлено простое решение задачи адаптивного трехканального управления температурой, концентрацией CO_2 и влажностью в теплице. В основе синтеза регулятора лежит параметрически неопределенная нелинейная модель микроклимата

теплицы, полученная в статье [77], и приведенный в главе 2 метод адаптивного управления.

4.2. Постановка задачи управления

Задача управления формулируется и в дальнейшем решается в предположении, что теплица имеет геометрическую форму, показанную на рисунке 4.1, включает в себя две форточки, один контур водяного отопления со штатной системой автоматики, одну автоматическую систему туманообразования и один канал подачи CO_2 . Для простоты предполагается, что система полива и принудительного дренажа отсутствуют.

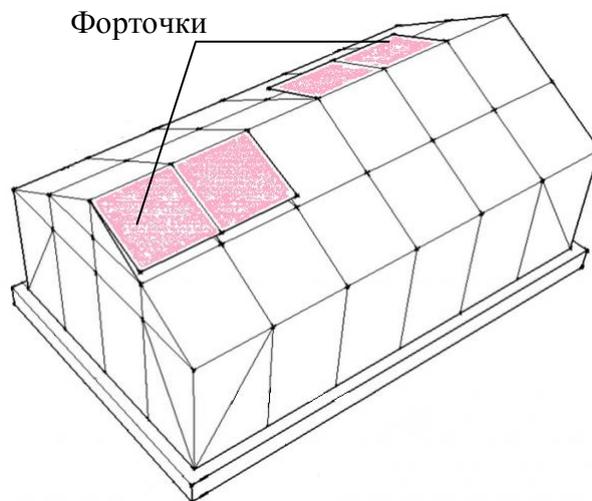


Рисунок. 4.1 – Внешней вид моделируемой теплицы

Цель управления заключается в синтезе:

$$\left| T_{in_des}(t) - T_{in}(t) \right| \leq \Delta_1 \quad \forall t \geq T_1, \quad (4.1)$$

$$\left| w_{in_des}(t) - w_{in}(t) \right| \leq \Delta_2 \quad \forall t \geq T_2, \quad (4.2)$$

$$\left| X_{in_des}(t) - X_{in}(t) \right| \leq \Delta_3 \quad \forall t \geq T_3, \quad (4.3)$$

где T_{in} , w_{in} , X_{in} – текущие значения температуры, влажности и концентрации углекислого газа; T_{in_des} , w_{in_des} , X_{in_des} – желаемые значения регулируемых переменных; $\Delta_1, \dots, \Delta_3$ – максимальные ошибки системы

управления по соответствующим каналам; T_1, \dots, T_3 – время настройки системы по соответствующим каналам.

Поддержание температуры T_{in} может быть обеспечена путем задания уставки T_h^* автоматической системе водяного отопления, если величина T_{in} меньше значения T_{in_des} . Если величина T_{in} больше значения T_{in_des} , то в качестве сигнала управления выступает уставка электропривода форточки $u_{v_t}^*$.

Поддержание необходимого уровня влажности w_{in} может быть обеспечена путем задания уставки Q_f^* системе туманообразования, если влажность воздуха w_{in} меньше желаемой величины w_{in_des} . Если влажность воздуха w_{in} больше величины w_{in_des} , то в качестве сигнала выступает уставка электропривода форточки $u_{v_w}^*$.

Регулирование уровня концентрации углекислого газа X_{in} достигается путем задания уставки системе подкормки CO_2 U_c^* . Если значение X_{in} больше X_{in_des} , то в качестве сигнала также выступает уставка электропривода форточки $u_{v_CO2}^*$.

Стоит отметить, что основная особенность такой многоканальной системы является вероятность конфликтов в каналах управления, когда одновременно активизируется в них сигнал управления форточкой. Для разрешения этих конфликтов формируется обобщенный сигнал управления форточкой с приоритетами открытия форточки по каждому каналу:

$$u_v^* = \alpha_1 u_{v_t}^* + \alpha_2 u_{v_w}^* + \alpha_3 u_{v_CO2}^*, \quad (4.4)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – положительные весовые коэффициенты приоритетов управления форточкой, задаваемые пользователем и удовлетворяющие условию $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

4.3. Построение математической модели микроклимата

Математическая модель микроклимата теплицы ориентирована на синтез регуляторов и объединяет между собой переменные управления T_h^* , Q_f^* , U_c^* , u_v^* и возмущающие воздействия S_r , V_{wind} , T_{out} , X_{out} , w_{out} с регулируемыми переменными T_{in} , w_{in} , X_{in} . Модель базируется на балансе тепловой энергии [78], а также на эмпирических уравнениях, которые описывают изменение концентрации углекислого газа в воздухе теплицы [79 - 83] и динамику локальных систем управления.

Перед формированием уравнений модели сведем все переменные и константы этой модели в таблицу 4.1.

Таблица 4.1 – Основные обозначения переменных и констант модели

№	Наименование	Обозн.	Значение (для физ. констант при моделировании)	ед. изм
1	Суммарная площадь крыши и стен теплицы	A_c	352	m^2
2	Площадь теплицы	A_g	250	m^2
3	Площадь соприкосновения нагревательного элемента с нагреваемым воздухом	A_h	55	m^2
4	Суммарная площадь почвенных грядок	A_s	180	m^2
5	Эффективность вентиляционной решетки	A_v	0.9	-
6	Параметр модели эвапотранспирации	c_0	$2.8 \cdot 10^{-5}$	$кг/с$
7	Параметр модели эвапотранспирации	c_1	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$m^3/с$
8	Параметр модели эвапотранспирации	c_2	$9.2 \cdot 10^{-8}$	$кг/(K \cdot с)$
9	Параметр модели эвапотранспирации	c_3	$7.9 \cdot 10^{-8}$	$кг \cdot m^2 / Дж$
10	Коэффициент преобразования	c_h	25	$Вт/(K \cdot m^2)$

	тепла в системе отопления			
11	Удельная теплоемкость воздуха	C_P	1005	$Дж/(кг \cdot К)$
12	Эффективность нагрева теплицы солнцем	c_r	0.7	-
13	Коэффициент передачи тепла из почвы в теплицу	c_s	5.75	$Вт / (К \cdot м^2)$
14	Коэффициент эффективности ветра	c_w	0.9	-
15	Ускорение свободного падения	g	9.8	$м / с^2$
16	Вертикальное положение форточки	H	-	$м$
17	Скорость эвапоранспирации	E	-	$кг / с$
18	Ширина вентиляционной решетки	l	3	$м$
19	Теплота испарения воды	L	$2.3 \cdot 10^6$	$Дж / кг$
20	Длина вентиляционной решетки	L_v	10	$м$
21	Коэффициент передачи модели автоматической системы водяного обогрева теплицы	w_{in}	1	
22	Коэффициент передачи модели системы туманообразования	k_w	1	-
23	Коэффициент передачи модели системы управления CO_2	k_x	1	-
24	Коэффициент передачи модели электропривода форточки	k_v	1	-
25	Коэффициент преобразования скорости вращения вентилятора в скорость движения воздуха	K_{vent}	0	$м / рад$
26	Производительность системы туманообразования	Q_f	-	$кг / с$
27	Уставка производительности системы туманообразования	Q_f^*	-	$кг / с$
28	Освещенность солнечного излучения	S_r	-	$Вт / м^2$
29	Время	t	-	$с$
30	Температура нагревательных элементов (труб) или воды в системе отопления теплицы	T_h	-	$К$
31	Уставка температуры автоматической системе водяного отопления	T_h^*	-	$К$
32	Температура воздуха в теплице	T_{in}	-	$К$

33	Температура наружного воздуха	T_{out}	-	K
34	Температура почвы	T_s	-	K
35	Производительность системы подкормки CO_2	U_c	-	$кг / с$
36	Уставка системе регулирования CO_2	U_c^*	-	$кг / с$
37	Угол поворота форточка	u_v	-	$рад$
38	Уставка электропривода форточка	u_v^*	-	$рад$
39	Обогреваемый объем теплицы	V_T	750	$м^3$
40	Увлажняемый объем теплицы	V_w	750	$м^3$
41	Скорость вытяжных вентиляторов	V_{vent}	-	$рад / с$
42	Перпендикулярная по отношению к плоскости форточка составляющая скорости ветра	V_{wind}	-	$м / с$
43	Абсолютная влажность воздуха в теплице	w_{in}	-	$кг / м^3$
44	Абсолютная влажность наружного воздуха	w_{out}	-	$кг / м^3$
45	Концентрация CO_2 в воздухе внутри теплицы	X_{in}	-	$кг CO_2 / кг возд$
46	Концентрация CO_2 в наружном воздухе	X_{out}	-	$кг CO_2 / кг возд$
47	Плотность воздуха	ρ	1,29	$кг / м^3$
48	Удельная теплота парообразования воды	λ_f	2256000	$Дж / кг$
49	Коэффициент передачи тепла из теплицы в окружающую среду	φ_c	5.5	$Вт / (K \cdot м^2)$
50	Поток воздуха, обеспечиваемый естественной вентиляцией	ϕ_v		$м / с$
51	Угол уклона крыши, на которой установлена вентиляционная решетка	ψ	0,785 (45)	$рад (град)$
52	Постоянная времени модели автоматической системы водяного обогрева теплицы	τ_h	40	$мин$
53	Постоянная времени модели системы туманообразования	τ_w	10	$мин$
54	Постоянная времени модели системы управления CO_2	τ_x	10	$мин$
55	Постоянная времени модели электропривода форточка	τ_v	30	$мин$

Модель строится с учетом следующих допущений:

Допущение 1: для каждого момента времени переменные состояния модели равны во всех точках пространства теплицы.

Допущение 2: теплообмен с окружающей средой осуществляется равномерно по всей поверхности стен, трубопроводов системы отопления и потолка теплицы. При этом используется усредненное значение коэффициентов передачи тепла c_r, c_s, c_h .

Допущение 3: в системе отсутствует дренаж (рассматривается закрытая система).

Допущение 4: количество теплоты, выделяемое светильниками⁴ и проводниками с током, пренебрежимо мало.

Допущение 5: влажность не влияет на скорость изменения температуры.

Математическая модель состоит из моделей семи подсистем (см. рисунок 4.2).

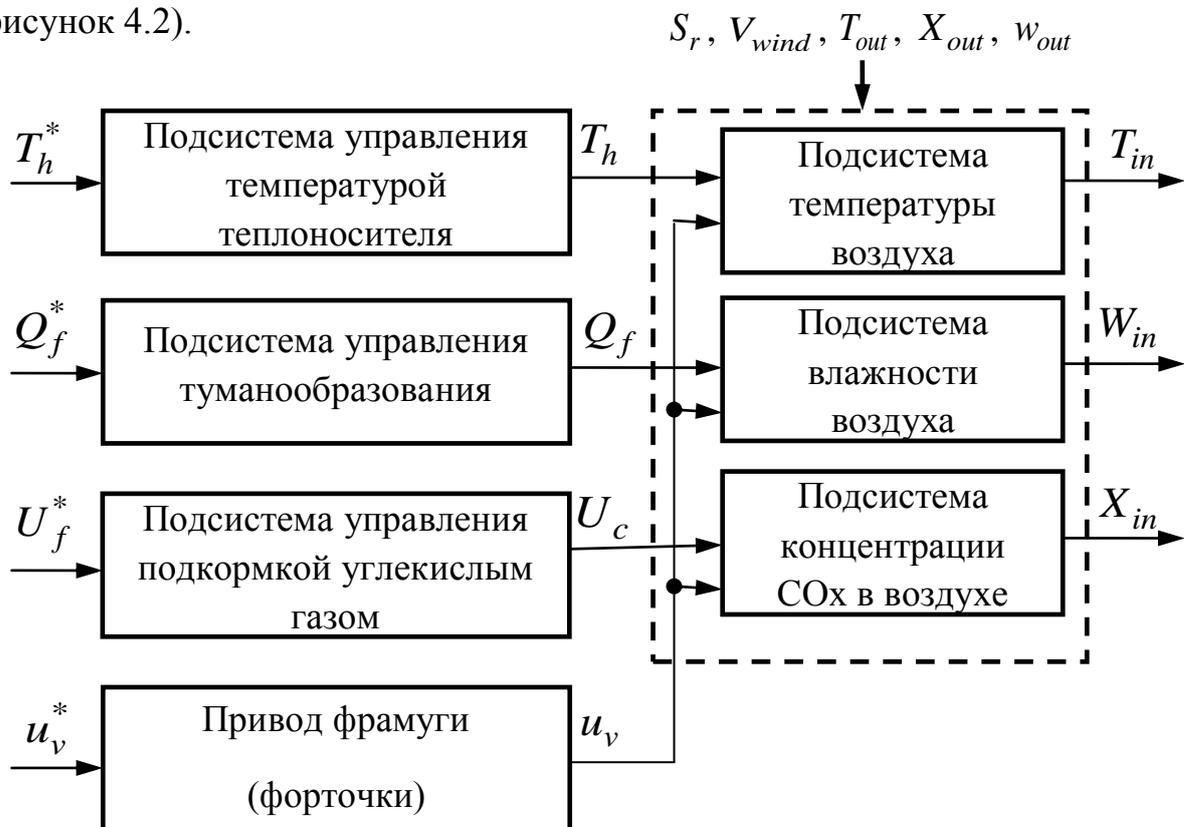


Рисунок 4.2 – Структурная схема модели микроклимата в парниковой теплицы

⁴ Предполагается, что с целью экономии электроэнергии используются светодиодные лампы, излучающие пренебрежимо малое количество тепла.

Подсистема температуры воздуха в теплице. Модель температуры воздуха в помещении основана на законе сохранения тепловой энергии и представляется в следующем виде [83, 84]:

$$\begin{aligned} \frac{\rho C_P V_T}{A_g} \frac{dT_{in}}{dt} = & c_r k S_r - \frac{\lambda_f}{A_g} Q_f + c_h \frac{A_h}{A_g} (T_h - T_{in}) - \\ & - \left(\rho C_P \phi_v(u_v, t) + \varphi_c \frac{A_c}{A_g} \right) (T_{in} - T_{out}) + c_s \frac{A_s}{A_g} (T_s - T_{in}) - L \cdot A_g \cdot E, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где E – скорость эвапотранспирации, зависящая от поглощенного теплицей солнечного излучения и температуры, влажности воздуха внутри помещения. Эта функция определяется как:

$$E = E(S_r, T_{in}, w_{in}) = c_3 S_r + c_2 T_{in} + c_1 w_{in} + c_0, \quad (4.6)$$

где c_0, \dots, c_3 – коэффициенты соответствующих размерностей.

Функция ϕ_v представляется следующим образом [85, 86]:

$$\begin{aligned} \phi_v(u_v, t) = & \frac{A_v L_v T_{out}}{3 A_g g (T_{in} - T_{out})} \left[\left(H(u_v) \cdot g \frac{T_{in} - T_{out}}{T_{out}} + c_w V_{wind}^2 \right)^{\frac{3}{2}} - \left(c_w V_{wind}^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right] + \\ & + K_{vent} V_{vent}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где величина $H(u_v)$ определяется геометрическим путем как (см. рисунок 4.3):

$$H(u_v) = l (\sin(\psi) - \sin(\psi - u_v)). \quad (4.8)$$

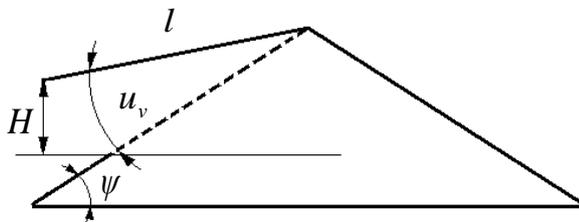


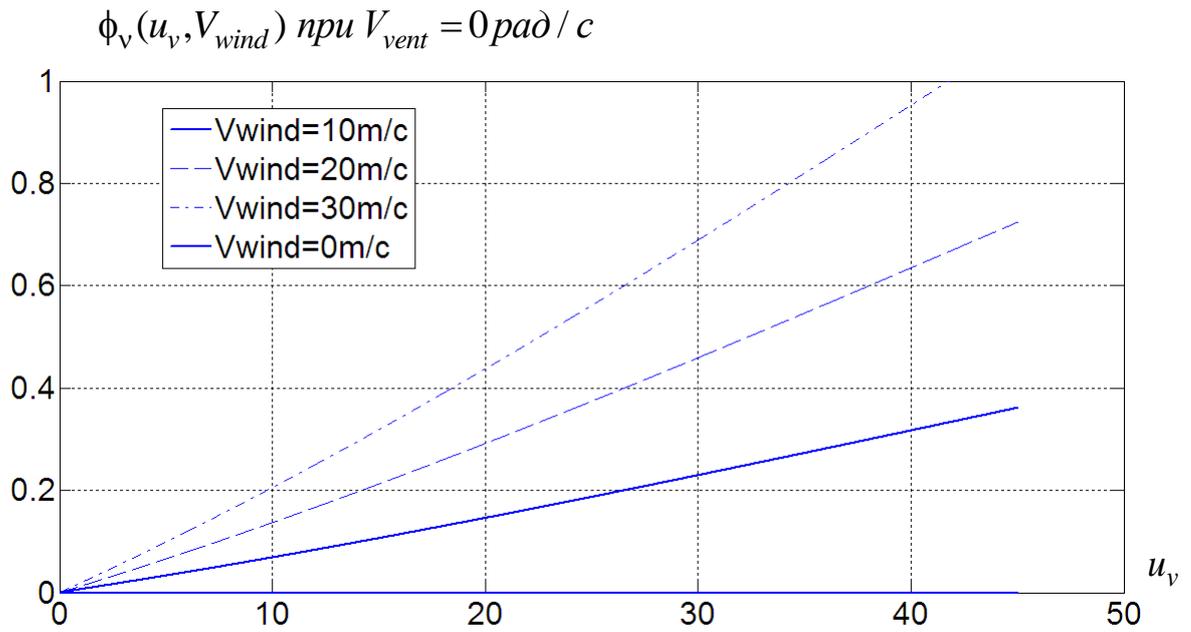
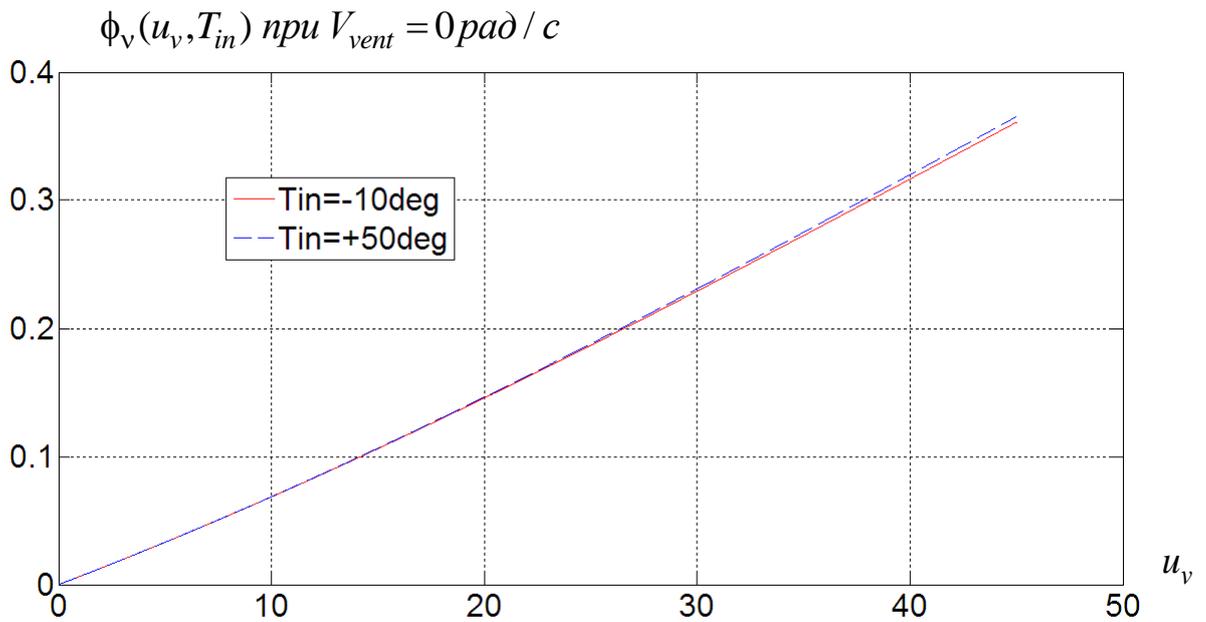
Рисунок. 4.3 – Иллюстрация к выражению (4.8)

Первое слагаемое (4.7) отвечает за естественную вентиляцию и охлаждение воздуха, в то время как второе слагаемое отвечает за принудительную вентиляцию.

Следует отметить, что при отсутствии принудительной вентиляции на функцию $\phi_v(u_v, t)$ существенно влияют две величины — u_v и V_{wind} . Так, при отсутствии ветра (т.е. при $V_{wind} = 0$) эта функция принимает пренебрежимо малые значения при невысоких разностях температур $T_{in} - T_{out}$ и вносит слабый вклад в уменьшение температуры T_{in} . При открытии форточки и отрицательной разности $T_{in} - T_{out}$ охлаждение воздуха в теплице происходит медленно и только за счет конвекции, без принудительного нагнетания воздуха. С точки зрения теории управления при отсутствии ветра и принудительной вентиляции процесс охлаждения воздуха в теплице является неуправляемым. В дальнейшем мы будем полагать, что $V_{wind} > 0$, и снижение температуры будет осуществляться только путем изменения положения форточки без включения принудительной вентиляции (т.е. при $V_{vent} = 0 \text{ рад} / \text{с}$).

Типовой вид функций $\phi_v(u_v, t)$ при $T_{out} = 283\text{K} (+10^\circ\text{C})$, $T_{in} = 293\text{K} (+20^\circ\text{C})$, $V_{vent} = 0 \text{ рад} / \text{с}$ и различных значениях V_{wind} представлен на рисунке 4.4.

Типовой вид функций $\phi_v(u_v, t)$ при $T_{out} = 283\text{K} (+10^\circ\text{C})$, $V_{wind} = 10 \text{ м} / \text{с}$, $V_{vent} = 0 \text{ рад} / \text{с}$ и различных значениях T_{in} представлен на рисунке 4.5.

Рисунок. 4.4 – Графики зависимостей $\phi_v(u_v, V_{wind})$ Рисунок. 4.5 – Графики зависимостей $\phi_v(u_v, T_{in})$

Из графиков видно, что в первом приближении функцию $\phi_v(u_v, t)$ можно считать линейной по отношению к u_v , т.е.

$$\phi_v(u_v, t) \approx k(V_{wind})u_v, \quad (4.9)$$

где коэффициент $k(V_{wind}) = k(t)$ не зависит от температуры воздуха в теплице T_{in} .

Подсистема влажности воздуха в теплице. Подсистема влажности воздуха представлена следующим выражением [87, 88]:

$$\frac{dw_{in}}{dt} = -\frac{A_g \phi_v(u_v, t)}{V_w} (w_{in} - w_{out}) + \frac{1}{V_w} Q_f + \frac{1}{V_w} E. \quad (4.10)$$

Подсистема подкормки углекислым газом (CO2). Концентрация углекислого газа в теплице X_{in} зависит, в основном, от скорости фотосинтеза и биомассы растений, скорости воздухообмена системы вентиляции и концентрации оксида углерода в наружном воздухе. Модель подсистемы подкормки CO2 можно представить в следующем виде [87, 89]:

$$\frac{dX_{in}}{dt} = \varphi(S_r, T_{in}, X_{in}) + \frac{1}{V_T} U_c - \frac{A_g}{V_T} \phi_v(u_v, t) (X_{in} - X_{out}), \quad (4.11)$$

где φ – эмпирическая функция влияния скорости фотосинтеза [87] и биомассы растений, определяемая экспериментальным путем или с помощью методов идентификации.

Подсистемы регулятора температуры теплоносителя в системе водяного отопления, автоматической системы туманообразования, системы управления подкормки углекислым газом и электропривода форточек. В первом приближении модели представляются в виде апериодических звеньев первого порядка:

$$\frac{dT_h}{dt} = -\frac{1}{\tau_h} T_h + \frac{k_h}{\tau_h} T_h^*, \quad (4.12)$$

$$\frac{dQ_f}{dt} = -\frac{1}{\tau_w} Q_f + \frac{k_w}{\tau_w} Q_f^*, \quad (4.13)$$

$$\frac{dU_c}{dt} = -\frac{1}{\tau_X} U_c + \frac{k_X}{\tau_X} U_c^*, \quad (4.14)$$

$$\frac{du_v}{dt} = -\frac{1}{\tau_v} u_v + \frac{k_v}{\tau_v} u_v^*. \quad (4.15)$$

Объединим представленные подсистемы в соответствии с каналами управления температурой, влажностью и концентрацией. При этом разделим модель каждого канала в зависимости от типа сигнала управления, который в свою очередь зависит от соотношения регулируемой переменной и ее желаемого значения. Приведем полученные модели в более компактных формах и сведем их в таблицу 4.2.

Таблица 4.2 – Модели подсистем, объединенные в соответствии с каналами управления

№	Модель	Сигнал управления	Режим
Канал управления температурой			
1	$\begin{cases} \dot{T}_{in} = -\left(a_1 + \frac{A_g}{V_T} \phi_v(u_v, t)\right) T_{in} + a_3 T_h + f_1(t) \\ \dot{T}_h = -\frac{1}{\tau_h} T_h + \frac{k_h}{\tau_h} T_h^* \end{cases}$	T_h^*	$T_{in} < T_{in_des}$
2	$\begin{cases} \dot{T}_{in} = -a_1 T_{in} - \frac{A_g}{V_T} \phi_v(u_v, t) (T_{in} - T_{out}) + f_2(t) \\ \dot{u}_v = -\frac{1}{\tau_v} u_v + \frac{k_v}{\tau_v} u_v^* \end{cases}$	u_v^* (компонента $u_{v_t}^*$ в (4.4))	$T_{in} > T_{in_des}$
Канал управления влажностью			
3	$\begin{cases} \dot{w}_{in} = -\frac{A_g}{V_w} \phi_v(u_v, t) w_{in} + \frac{1}{V_w} Q_f + f_3(t) \\ \dot{Q}_f = -\frac{1}{\tau_w} Q_f + \frac{k_w}{\tau_w} Q_f^* \end{cases}$	Q_f^*	$w_{in} < w_{in_des}$
4	$\begin{cases} \dot{w}_{in} = -\frac{A_g}{V_w} \phi_v(u_v, t) (w_{in} - w_{out}) + f_4(t) \\ \dot{u}_v = -\frac{1}{\tau_v} u_v + \frac{k_v}{\tau_v} u_v^* \end{cases}$	u_v^* (компонента $u_{v_w}^*$ в (4.4))	$w_{in} > w_{in_des}$
Канал управления концентрацией			
5	$\begin{cases} \dot{X}_{in} = -\frac{A_g}{V_T} \phi_v(u_v, t) X_{in} + \varphi(S_r, T_{in}, X_{in}) + \frac{1}{V_T} U_c + f_5(t) \\ \dot{U}_c = -\frac{1}{\tau_X} U_c + \frac{k_X}{\tau_X} U_c^* \end{cases}$	U_c^*	$X_{in} < X_{in_des}$
6	$\begin{cases} \dot{X}_{in} = -\frac{A_g}{V_T} \phi_v(u_v, t) (X_{in} - X_{out}) + \varphi(S_r, T_{in}, X_{in}) + f_6(t) \\ \dot{u}_v = -\frac{1}{\tau_v} u_v + \frac{k_v}{\tau_v} u_v^* \end{cases}$	u_v^* (компонента $u_{v_x}^*$ в (4.4))	$X_{in} > X_{in_des}$

В силу физической ограниченности всех переменных модели и несущественной зависимости ϕ_v от T_{in} величины f_1, \dots, f_6 представляют собой ограниченные возмущения, определяемые как

$$f_1(t) = -a_2 w_{in} + a_4 S_r - a_5 Q_f + a_6 T_{out} + a_7 T_s - a_8 + \frac{A_g}{V_T} \phi_v(u_v, t) T_{out},$$

$$f_2(t) = -a_2 w_{in} + a_3 T_h + a_4 S_r - a_5 Q_f + a_6 T_{out} + a_7 T_s - a_8,$$

$$f_3(t) = \frac{1}{V_w} E + \frac{A_g}{V_w} \phi_v(u_v, t) w_{out}, \quad f_4(t) = \frac{1}{V_w} E + \frac{1}{V_w} Q_f,$$

$$f_5(t) = \frac{A_g}{V_T} \phi_v(u_v, t) X_{out}, \quad f_6(t) = \frac{1}{V_T} U_c,$$

где

$$a_1 = \frac{(c_h A_h + \phi_c A_c + c_s A_s + c_2 L)}{\rho C_P V_T}, \quad a_2 = \frac{c_1 L}{\rho C_P V_T}, \quad a_3 = \frac{A_h c_h}{\rho C_P V_T}, \quad a_4 = \frac{A_g c_r k - c_3 L}{\rho C_P V_T},$$

$$a_5 = \frac{\lambda_f}{\rho C_P V_T}, \quad a_6 = \frac{\phi_c A_c}{\rho C_P V_T}, \quad a_7 = \frac{A_s c_s}{\rho C_P V_T}, \quad a_8 = \frac{c_0 L}{\rho C_P V_T}.$$

Отметим, что с учетом (4.9) приведенные в таблице 4.2 модели каналов описываются с помощью обобщенной системы уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a(t)x_1 + b(x_1, t)x_2 + \xi(t), \\ \dot{x}_2 = -cx_2 + du, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (4.16)$$

где $a(t), b(x_1, t)$ — ограниченные положительные параметры; c, d — положительные постоянные параметры; x_1 — переменная состояния, соответствующая переменным T_{in}, w_{in}, X_{in} ; x_2 — переменная состояния, соответствующая u_v ; u — переменная управления, соответствующая переменным T_h^*, Q_f^*, U_c^* ; y — регулируемая переменная; $\xi(t)$ — возмущение, представленное функциями f_1, \dots, f_6 .

Таким образом, математические модели подсистем, ориентированные на синтез управления температурой, влажностью воздуха в теплице и концентрацией CO_2 в воздухе теплицы, относятся к классу линейных нестационарных объектов, обладающих следующими свойствами:

1. Все параметры моделей являются неизвестными, что мотивирует необходимость применения методов адаптивного управления;

2. Переменные состояния модели доступны прямому измерению.

3. Величина $b(x_1, t)$ и возмущение ξ ограничены, что позволяет отнести модель к классу моделей (2.1) и применить разработанный метод адаптивного управления для решения поставленной задачи.

Моделирование процессов в теплице.

С целью установления реакции модели теплицы на изменения сигналов управления и возмущения и проверки адекватности этой реакции реальным процессом приведем результаты математического моделирования теплицы, параметры которой приведены в таблице 4.1.

Начальные условия для дифференциальных уравнений (4.5), (4.10)-(4.15) принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} x(0) &= [T_{in}(0), w_{in}(0), X_{in}(0), T_h(0), Q_f(0), U_c(0), u_v(0)]^T = \\ &= [290,14 \cdot 10^{-3}, 14 \cdot 10^{-3}, 310,9 \cdot 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-1}]^T. \end{aligned}$$

Управляющие воздействия, если не претерпевают изменений в ходе эксперимента, то принимают следующие фиксированные значения:

$$T_h^* = 343K, Q_f^* = 5 \cdot 10^{-3} \text{ кг} / \text{с}, U_c^* = 5 \cdot 10^{-3} \text{ кг} / \text{с}, u_v^* = 15^\circ,$$

Возмущающие воздействия, если не претерпевают изменений в ходе эксперимента, то принимают следующие фиксированные значения:

$$\begin{aligned} S_r &= 170 \text{ Вт} / \text{м}^2, V_{wind} = 1.5 \text{ м} / \text{с}, T_{out} = 283K, \\ w_{out} &= 4 \cdot 10^{-4} \text{ кг} / \text{м}^3, X_{out} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ CO}_2 / \text{кг возд}. \end{aligned}$$

На рис.4.6-4.14, приведены результаты моделирования, отражающие реакции выходных сигналов на изменение управляющих и возмущающих воздействий.

На рисунках не приведены выходные сигналы, реакция которых отсутствует в связи с отсутствием зависимости от входного сигнала или является пренебрежимо малой.

Результаты моделирования теплицы в условиях роста температуры теплоносителя в системе отопления приведены на рисунке 4.6 и показывают рост температуры воздуха внутри помещения с 14,5 °С до 20,3 °С при температуре наружного воздуха 10,0 °С и открытой на 15° форточке. На влажность воздуха в помещении скачок T_{in} почти не влияет.

Результаты моделирования, приведенные на рисунке 4.7, иллюстрируют незначительный рост температуры воздуха в помещении при уменьшении расхода воды в системе туманообразования, что обусловлено снижением теплотерь, связанных с охлаждением воздуха системой туманообразования. В тех же результатах наблюдается незначительное падение температуры при увеличении расхода воды в системе туманообразования. При приоткрытой форточке изменение расхода воды Q_f^* слабо сказывается на изменении влажности воздуха в помещении w_{in} в связи со стремлением w_{in} к равновесному значению — влажности наружного воздуха. В случае, если форточка полностью закрыта, то величина w_{in} неограниченно растет при ненулевом Q_f^* и отсутствии дренажа (что видно из уравнения (4.10), согласно которому происходит интегрирование Q_f).

Результаты моделирования, приведенные на рисунке 4.8, показывают, что при приоткрытой форточке, рост производительности CO_2 ведет к росту концентрации двуоксида углерода, а снижение производительности ведет к снижению концентрации двуоксида. В случае, если форточка закрыта, то даже при низкой производительности CO_2 концентрация растет неограниченно (что можно увидеть из анализа уравнения (4.11)).

На рисунке 4.9 показана реакция температуры T_{in} , влажности w_{in} и концентрации CO_2 в воздухе X_{in} на изменение положения форточки.

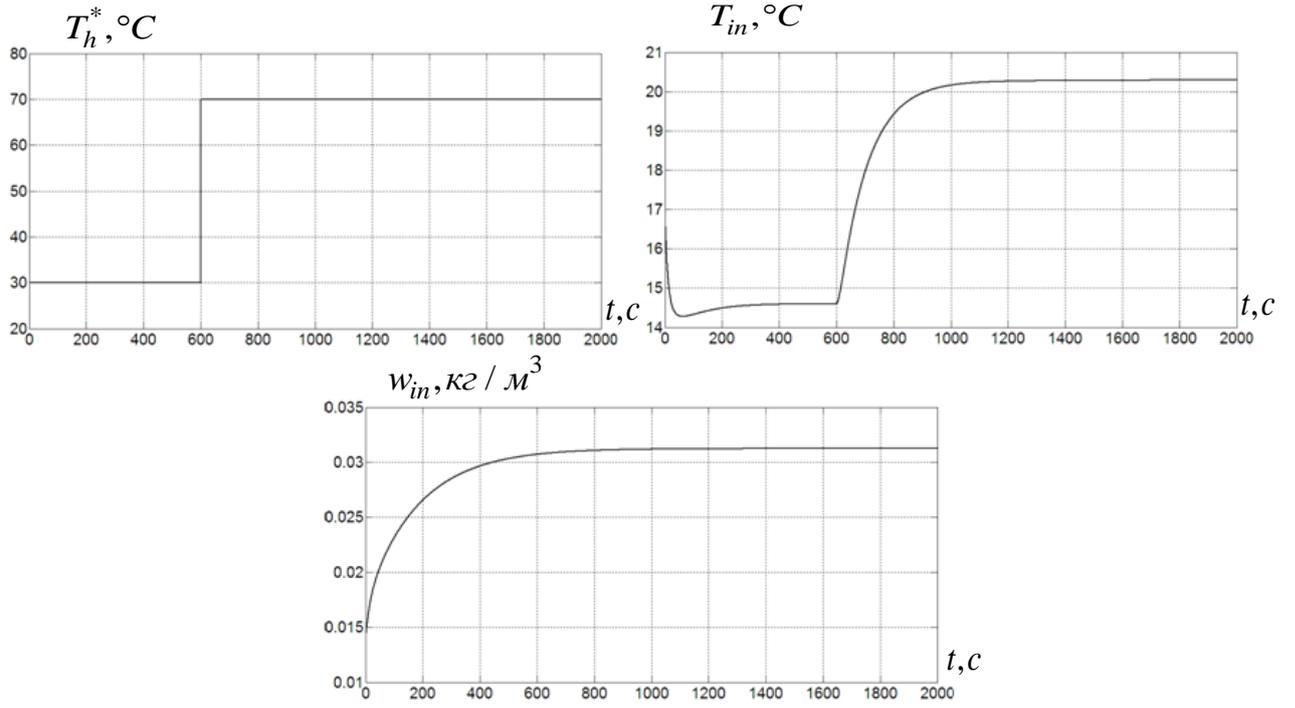


Рисунок 4.6 - Реакция выходов модели на изменение уставки системы подогрева воздуха

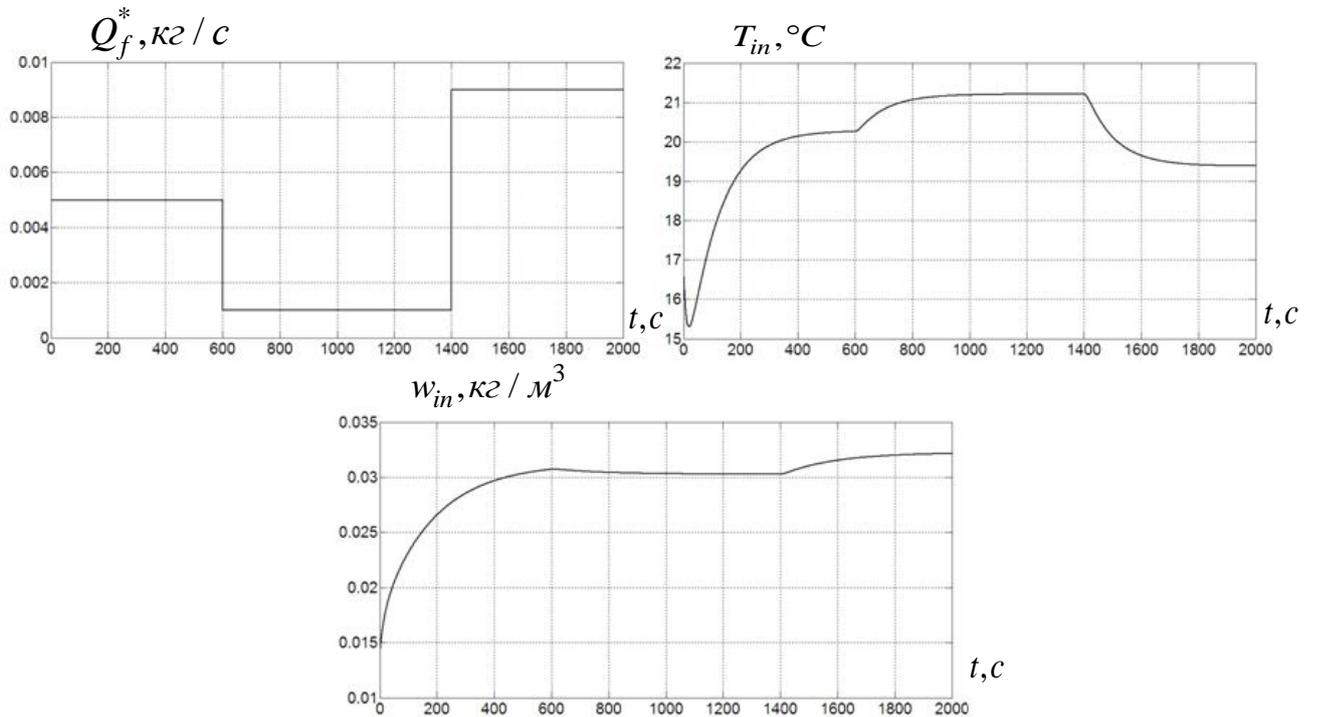


Рисунок 4.7 - Реакция выходов модели на изменение уставки системы увлажнения воздуха

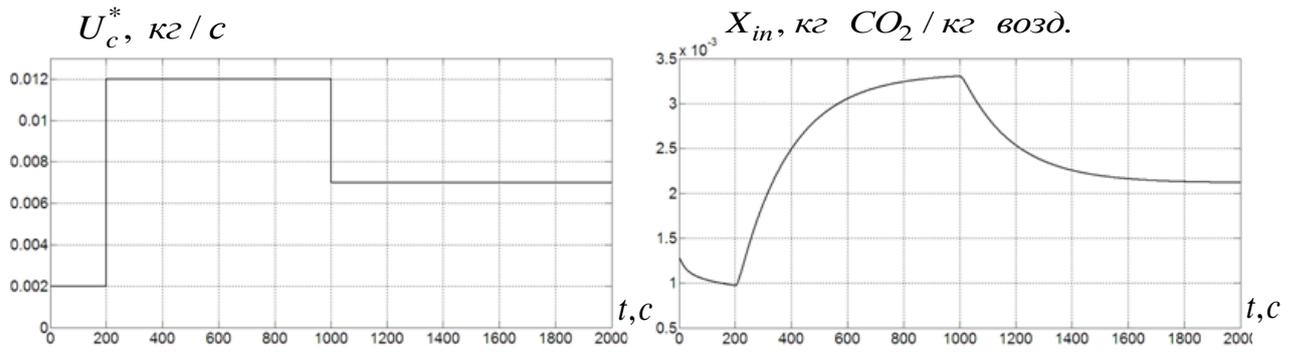


Рисунок 4.8 - Реакция выходов модели на изменение
уставки системы подкормки углекислым газом

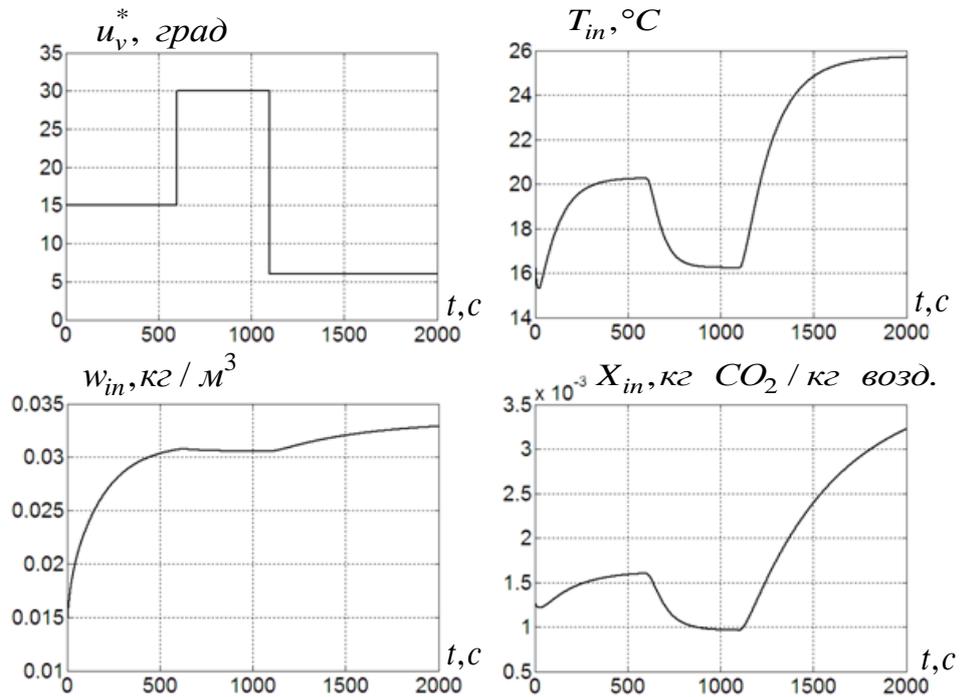


Рисунок 4.9 - Реакция выходов модели на изменение
уставки привода форточки

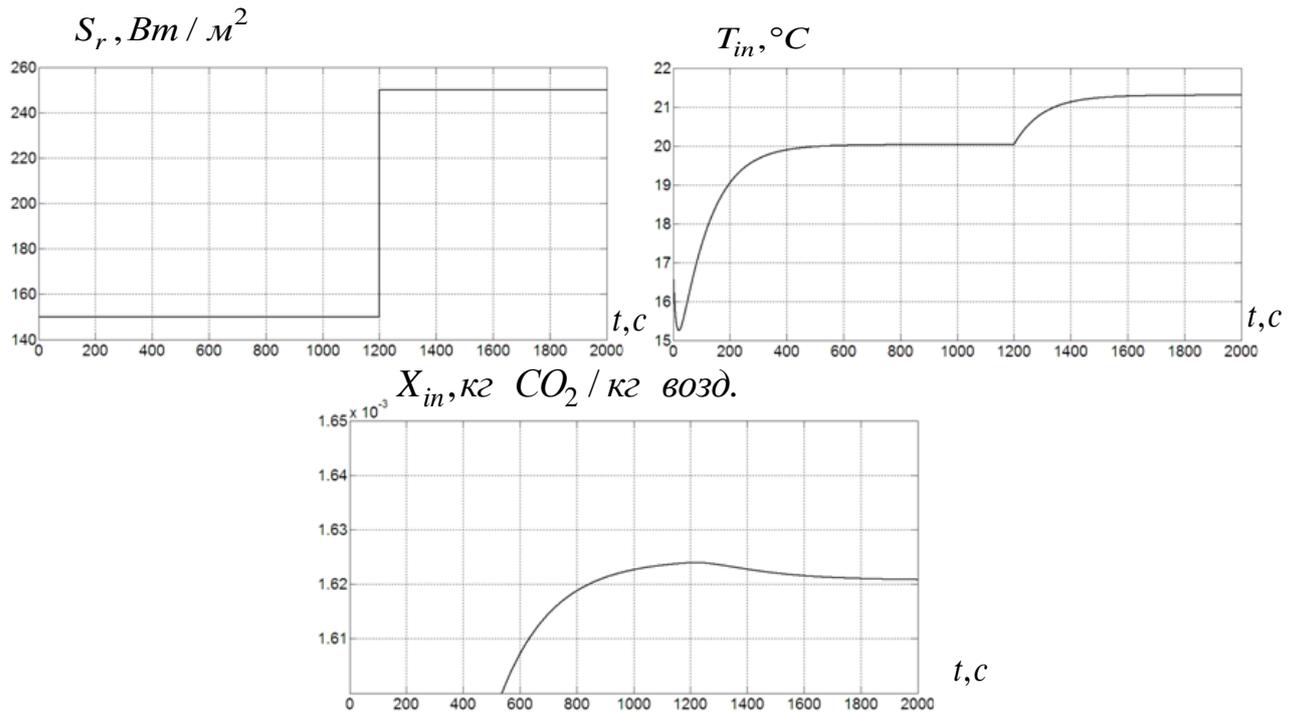


Рисунок 4.10. - Реакция выходов модели на изменение интенсивности солнечной радиации

Результаты моделирования реакции системы на изменение интенсивности солнечной радиации приведены на рисунке 4.10. С ростом интенсивности температура воздуха в теплице растет, что обусловлено преобразованием световой энергии, передаваемой теплице солнцем, в тепловую энергию. В связи с увеличением интенсивности эвапотранспирации, в ходе которого растениями поглощается углекислый газ, снижается концентрация CO_2 .

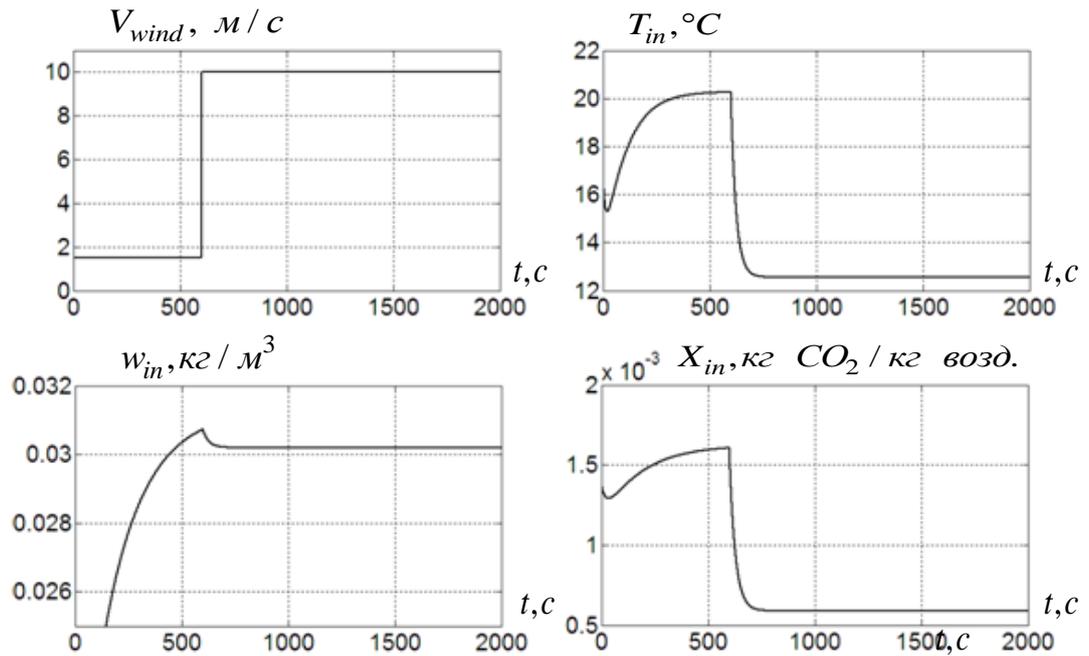


Рисунок 4.11 - Реакция выходов модели на изменение скорости ветра в области вентиляционной форточки

Результаты моделирования, приведенные на рисунке 4.11, показывают, что при увеличении скорости ветра при приоткрытой форточке увеличивается отток воздуха из теплицы, содержащий накопленную влагу, двуоксид углерода и тепловую энергию. Как следствие, происходит снижение температуры T_{in} влажности w_{in} и концентрации X_{in} .

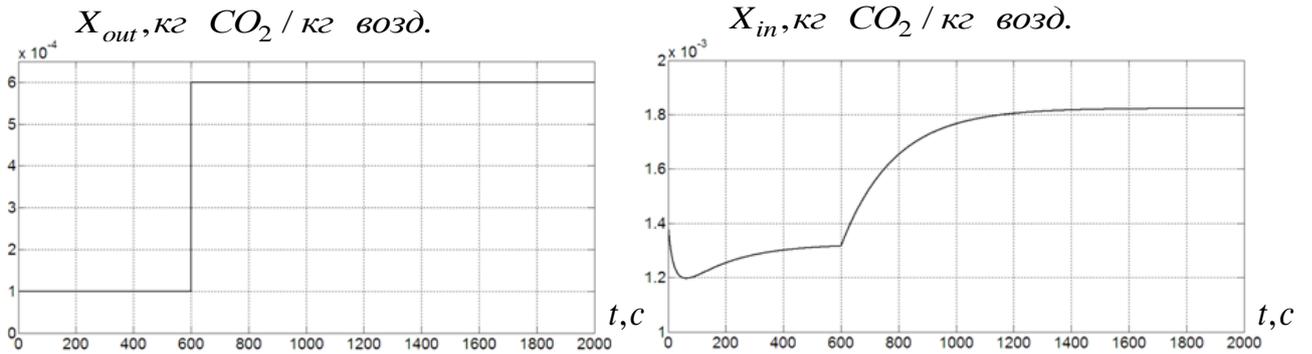


Рисунок 4.12 - Реакция выхода модели X_{in} на изменение концентрации двуоксида углерода в наружном воздухе

Результаты моделирования, представленные на рисунке 4.12, показывают влияние концентрации двуоксида углерода в наружном воздухе на концентрацию двуоксида углерода в воздухе внутри помещения при приоткрытой форточке. При увеличении X_{out} растет X_{in} . В случае, когда форточка закрыта, это влияние не существенно и определяется только процессом фотосинтеза растений, который описывается функцией $\varphi(S_r, T_{in}, X_{in})$ в уравнении (4.11).

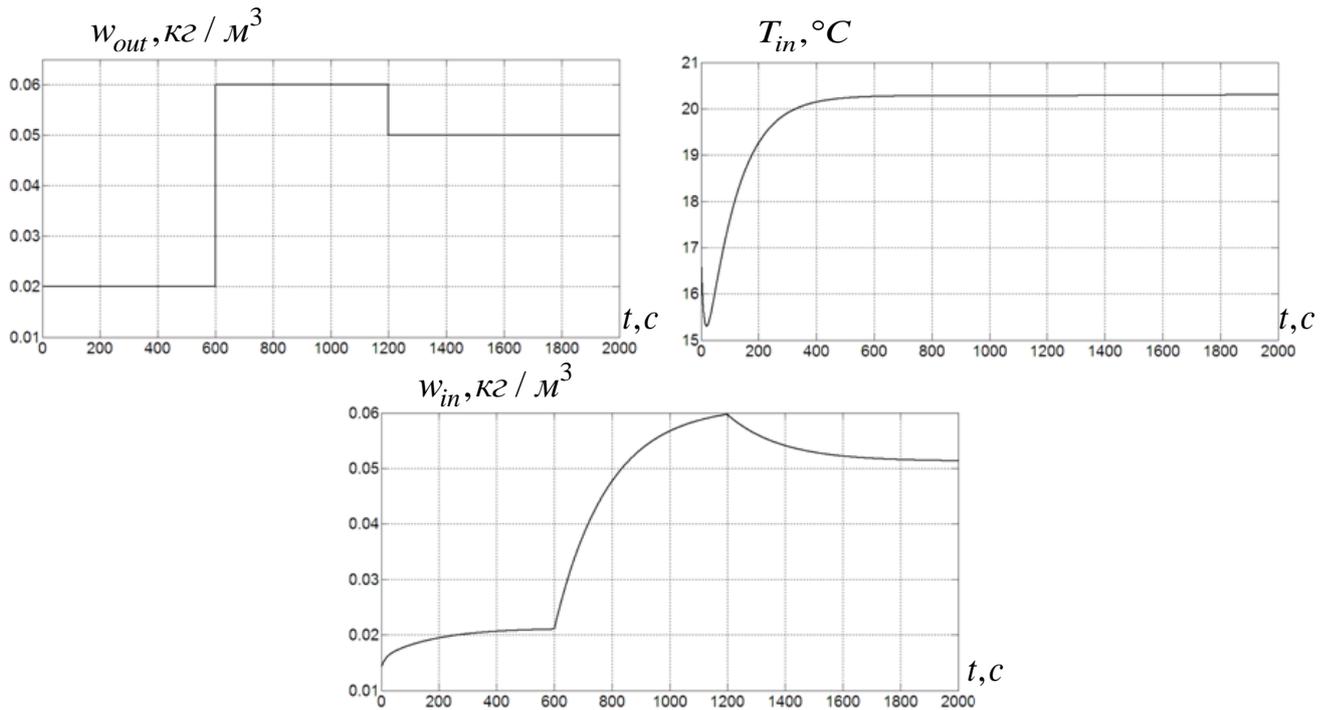


Рисунок 4.13 - Реакция выходов модели на изменение влажности наружного воздуха

Результаты моделирования, представленные на рисунке 4.13, показывают реакцию температуры и влажности воздуха в теплице на изменение влажности наружного воздуха при приоткрытой форточке.

4.4. Построение регулятора

В целях синтеза многоканального регулятора используем обобщенную модель канала управления (4.16). Применим метод, разработанный в главе 2, совместно с процедурой поэтапного синтеза [1].

Пусть, $U = x_2$ — виртуальный закон управления, обеспечивающий слежение x_1 за выходом эталонной модели

$$\dot{x}_{M1} = -\lambda_1 x_{M1} + \lambda_1 g, \quad (4.17)$$

где g — задающее воздействие; λ_1 — положительная константа, определяющая быстродействие системы, после настройки адаптивной системы. Следует отметить, что в исходной постановке задачи x_{M1} представляет собой T_{in_des} , w_{in_des} и X_{in_des} .

Сформируем ошибку управления $e_1 = x_{M1} - x_1$ и проанализируем ее производную с учетом первого уравнения (4.16) и (4.17):

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{x}_{M1} - \dot{x}_1 = -\lambda_1 x_{M1} + \lambda_1 g + a(t)x_1 - b(x_1, t)U - \xi = \\ &= -a(t)e_1 - b(x_1, t)U - \xi + (-\lambda_1 + a(t))x_{M1} + \lambda_1 g = \\ &= -a(t)e_1 - b(x_1, t)U + \zeta, \end{aligned}$$

или

$$\dot{e}_1 = -a(t)e_1 - b(x_1, t)U + \zeta_1, \quad (4.18)$$

где $\zeta_1 = -\xi + (-\lambda_1 + a(t))x_{M1} + \lambda_1 g$. Важно отметить, что в силу ограниченности задающего воздействия g и возмущения ξ величина ζ_1 также ограничена. Следовательно, так как величина $b(x_1, t)$ положительна и ограничена, то выражение (4.18) относится к классу моделей ошибок (2.70), для которой разработан следующий закон управления:

$$U = \omega_1 e_1, \quad (4.19)$$

$$\dot{\omega}_1 = -\sigma_1 \omega_1 + \gamma_1 e_1^2, \quad (4.20)$$

где γ_1 , σ_1 — положительные константы.

Далее, принимаем (4.19) в качестве задающего воздействия, которое необходимо обеспечить искомым законом управления. С этой целью используем эталонную модель вида

$$\dot{x}_{M2} = -\lambda_2 x_{M2} + \lambda_2 U$$

или с учетом (4.19)

$$\dot{x}_{M2} = -\lambda_2 x_{M2} + \lambda_2 \omega_1 e_1, \quad (4.21)$$

где λ_2 — положительный параметр эталонной модели. Сформируем ошибку управления $e_2 = x_{M2} - x_2$ и аналогичным образом проанализируем ее производную с учетом второго уравнения (4.16) и (4.21):

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 &= \dot{x}_{M2} - \dot{x}_2 = -\lambda_2 x_{M2} + \lambda_2 \omega_1 e_1 + cx_2 - du = \\ &= -ce_2 - du + (-\lambda_2 + c)x_{M2} + \lambda_2 \omega_1 e_1. \end{aligned}$$

или

$$\dot{e}_2 = -ce_2 - du + \zeta_2,$$

где $\zeta_2 = (-\lambda_2 + c)x_{M2} + \lambda_2 \omega_1 e_1$. Поскольку доказанные в главе 2 свойства замкнутой системы, состоящей из модели ошибки (4.18) и регулятора (4.19), (4.20), предполагают ограниченность всех сигналов e_1 и ω_1 , то величина ζ_2 ограничена. Следовательно, принимая во внимание положительность d , искомым законом управления представим как

$$u = \omega_2 e_2, \quad (4.22)$$

$$\dot{\omega}_2 = -\sigma_2 \omega_2 + \gamma_2 e_2^2, \quad (4.23)$$

где γ_2, σ_2 — положительные константы.

Таким образом, алгоритм адаптивного управления, разработанный для каждого канала управления микроклиматом, представляется настраиваемым регулятором (4.22), алгоритмами адаптации (4.20), (4.23) и эталонными моделями (4.17), (4.21). В зависимости от канала управления алгоритм обеспечивает цель управления (4.1), (4.2) или (4.3).

На основе полученного алгоритма управления построим алгоритмы управления температурой и влажностью воздуха, а также концентрацией CO_2

в теплице. Сведем соответствующие регуляторы в таблицу 4.3 (по аналогии с моделями в таблице 4.2).

Таблица 4.3 – Регуляторы микроклимата многоканальной системы

№	Регулятор	Режим
Канал управления температурой		
1	<p>Регулятор: $T_h^* = \omega_{t2} e_{t2}$;</p> <p>Алг. адаптации: $\dot{\omega}_{t1} = -\sigma_{t1} \omega_{t1} + \gamma_{t1} e_{t1}^2$,</p> $\dot{\omega}_{t2} = -\sigma_{t2} \omega_{t2} + \gamma_{t2} e_{t2}^2$; <p>Ошибки: $e_{t1} = x_{tM1} - x_{t1}$, $e_{t2} = x_{tM2} - x_{t2}$;</p> <p>Эталон. модели: $\dot{x}_{tM1} = -\lambda_{t1} x_{tM1} + \lambda_{t1} T_{in_des}$,</p> $\dot{x}_{tM2} = -\lambda_{t2} x_{tM2} + \lambda_{t2} \omega_{t1} e_{t1}$	$T_{in} < T_{in_des}$
2	<p>Регулятор: $u_{v_t}^* = \omega_{vt2} e_{vt2}$;</p> <p>Алг. адаптации: $\dot{\omega}_{vt1} = -\sigma_{vt1} \omega_{vt1} + \gamma_{vt1} e_{vt1}^2$,</p> $\dot{\omega}_{vt2} = -\sigma_{vt2} \omega_{vt2} + \gamma_{vt2} e_{vt2}^2$; <p>Ошибки: $e_{vt1} = x_{vtM1} - x_{vt1}$, $e_{vt2} = x_{vtM2} - x_{vt2}$;</p> <p>Эталон. модели: $\dot{x}_{vtM1} = -\lambda_{vt1} x_{vtM1} + \lambda_{vt1} T_{in_des}$,</p> $\dot{x}_{vtM2} = -\lambda_{vt2} x_{vtM2} + \lambda_{vt2} \omega_{vt1} e_{vt1}$	$T_{in} > T_{in_des}$
Канал управления влажностью		
3	<p>Регулятор: $Q_h^* = \omega_{w2} e_{w2}$;</p> <p>Алг. адаптации: $\dot{\omega}_{w1} = -\sigma_{w1} \omega_{w1} + \gamma_{w1} e_{w1}^2$,</p> $\dot{\omega}_{w2} = -\sigma_{w2} \omega_{w2} + \gamma_{w2} e_{w2}^2$; <p>Ошибки: $e_{w1} = x_{wM1} - x_{w1}$, $e_{w2} = x_{wM2} - x_{w2}$;</p> <p>Эталон. модели: $\dot{x}_{wM1} = -\lambda_{w1} x_{wM1} + \lambda_{w1} w_{in_des}$,</p> $\dot{x}_{wM2} = -\lambda_{w2} x_{wM2} + \lambda_{w2} \omega_{w1} e_{w1}$	$w_{in} < w_{in_des}$
4	<p>Регулятор: $u_{v_w}^* = \omega_{vw2} e_{vw2}$;</p> <p>Алг. адаптации: $\dot{\omega}_{vw1} = -\sigma_{vw1} \omega_{vw1} + \gamma_{vw1} e_{vw1}^2$,</p> $\dot{\omega}_{vw2} = -\sigma_{vw2} \omega_{vw2} + \gamma_{vw2} e_{vw2}^2$; <p>Ошибки: $e_{vw1} = x_{vwM1} - x_{vw1}$, $e_{vw2} = x_{vwM2} - x_{vw2}$;</p> <p>Эталон. модели: $\dot{x}_{vwM1} = -\lambda_{vw1} x_{vwM1} + \lambda_{vw1} w_{in_des}$,</p> $\dot{x}_{vtM2} = -\lambda_{vt2} x_{vtM2} + \lambda_{vt2} \omega_{vt1} e_{vt1}$	$w_{in} > w_{in_des}$
Канал управления концентрацией		

5	<p>Регулятор: $U_c^* = \omega_{x2} e_{x2};$</p> <p>Алг. адаптации: $\dot{\omega}_{x1} = -\sigma_{x1} \omega_{x1} + \gamma_{x1} e_{x1}^2,$ $\dot{\omega}_{x2} = -\sigma_{x2} \omega_{x2} + \gamma_{x2} e_{x2}^2;$</p> <p>Ошибки: $e_{x1} = x_{xM1} - x_{x1}, e_{x2} = x_{xM2} - x_{x2};$</p> <p>Эталон. модели: $\dot{x}_{xM1} = -\lambda_{x1} x_{xM1} + \lambda_{x1} X_{in_des},$ $\dot{x}_{xM2} = -\lambda_{x2} x_{xM2} + \lambda_{x2} \omega_{x1} e_{x1}$</p>	$X_{in} < X_{in_des}$
6	<p>Регулятор: $u_{v_x}^* = \omega_{vx2} e_{vx2};$</p> <p>Алг. адаптации: $\dot{\omega}_{vx1} = -\sigma_{vx1} \omega_{vx1} + \gamma_{vx1} e_{vx1}^2,$ $\dot{\omega}_{vx2} = -\sigma_{vx2} \omega_{vx2} + \gamma_{vx2} e_{vx2}^2;$</p> <p>Ошибки: $\omega = \gamma_3 r(y, t), e_{vx2} = x_{vxM2} - x_{vx2};$</p> <p>Эталон. модели: $\dot{x}_{vxM1} = -\lambda_{vx1} x_{vxM1} + \lambda_{vx1} X_{in_des},$ $\dot{x}_{vxM2} = -\lambda_{vx2} x_{vxM2} + \lambda_{vx2} \omega_{vx1} e_{vx1}$</p>	$X_{in} > X_{in_des}$

Результирующий сигнал управления форточки определяется выражением (4.4).

4.5. Моделирование

С целью проверки работоспособности замкнутой системы проведено моделирование в среде MatLab/Simulink. Параметры и физические константы модели теплицы приведены в таблице 4.1. Параметры регулятора, структура которого приведена в таблице 4.3, сведены в таблицу 4.4.

Таблица 4.4 – Параметры регулятора

№	Параметр	Значение	№	Параметр	Значение
1	γ_{t1}	10^{-3}	19	γ_{x2}	10^2
2	σ_{t1}	$5 \cdot 10^{-2}$	20	σ_{x2}	10^{-2}
3	γ_{t2}	10^{-8}	21	γ_{vx1}	0,2
4	σ_{t2}	$5 \cdot 10^{-2}$	22	σ_{vx1}	10^{-2}
5	γ_{vt1}	$2 \cdot 10^{-8}$	23	γ_{vx2}	2,0
6	σ_{vt1}	$5 \cdot 10^{-3}$	24	σ_{vx2}	10^{-2}
7	γ_{vt2}	$2 \cdot 10^{-9}$	25	λ_{t1}	0,1
8	σ_{vt2}	$5 \cdot 10^{-3}$	26	λ_{t2}	10
9	γ_{w1}	10^4	27	λ_{vt1}	0,05
10	σ_{w1}	1,0	28	λ_{vt2}	10,0
11	γ_{w2}	10,0	29	λ_{w1}	0,1
12	σ_{w2}	1,0	30	λ_{w2}	0,8
13	γ_{vw1}	2,0	31	λ_{vw1}	0,05
14	σ_{vw1}	0,1	32	λ_{vw2}	0,8
15	γ_{vw2}	2,0	33	λ_{x1}	0,05
16	σ_{vw2}	0,1	34	λ_{x2}	1,0
17	γ_{x1}	10^5	35	λ_{vx1}	0,05
18	σ_{x1}	0,01	36	λ_{vx2}	1,0

Закон управления форточкой представляется следующей суперпозицией:

$$u_v = 0,4u_{v_t} + 0,5u_{v_w} + 0,1u_{v_x}.$$

Результаты моделирования системы управления представлены на рисунках 4.14 и 4.15.

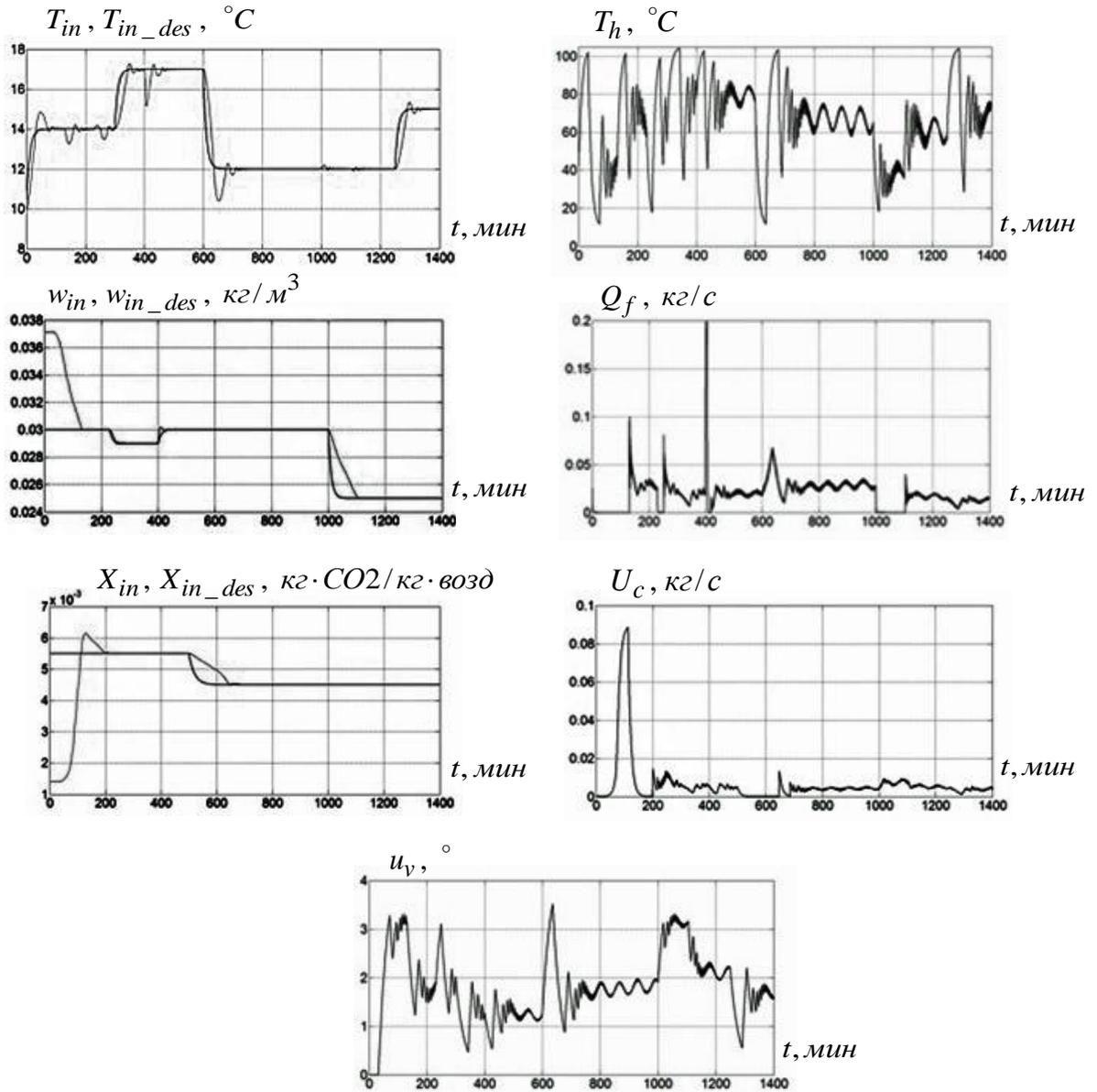


Рисунок 4.14 – Переходные процессы в адаптивной системе управления микроклиматом парниковой теплицы.

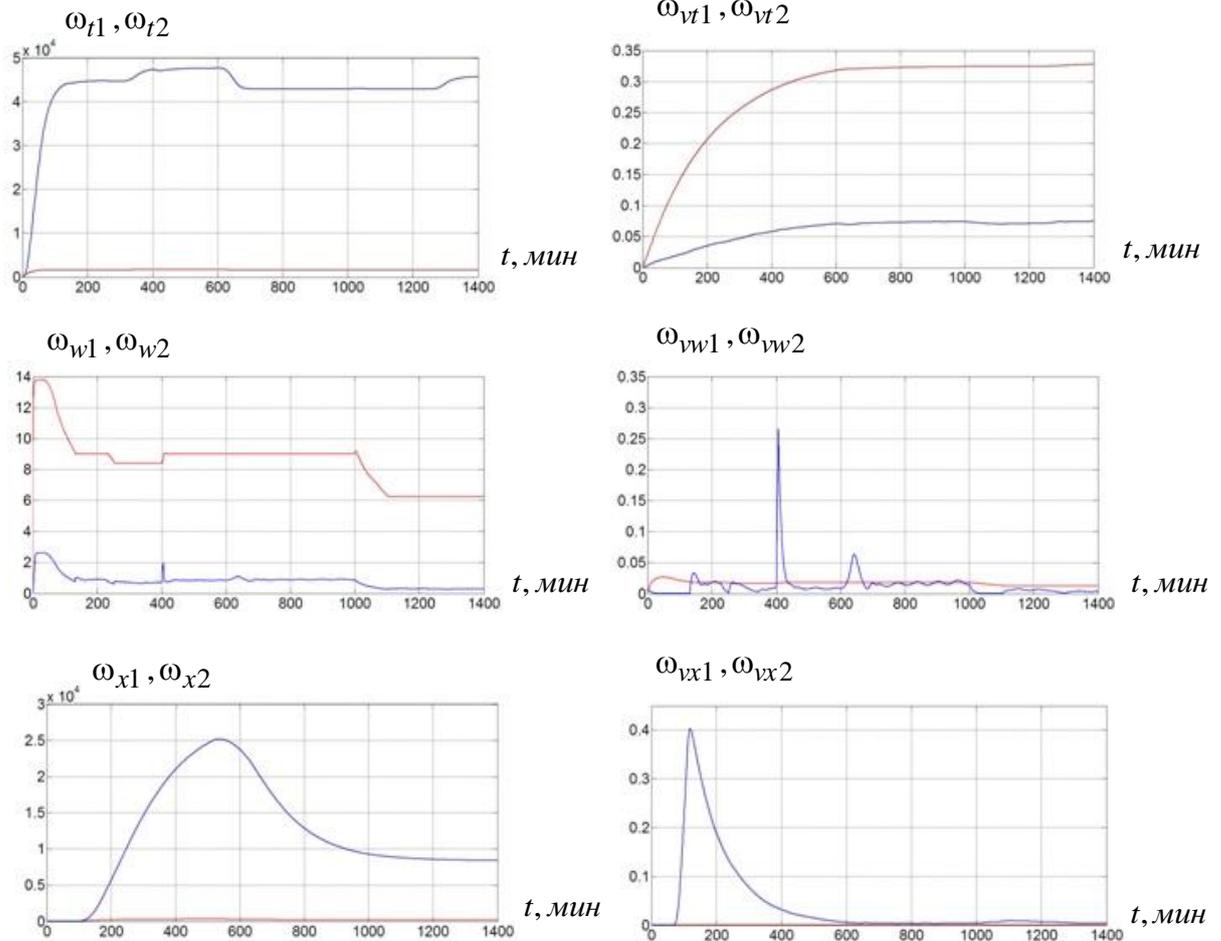


Рисунок 4.15 – Поведение настраиваемых параметров в адаптивной системе управления микроклиматом парниковой теплицы

Результаты моделирования, приведенные на рисунке 4.14, 4.15, показывают, что полученный закон управления обеспечивает выполнение цели (4.1), (4.2) или (4.3).

4.6. Выводы по главе

Таким образом, в главе построена математическая модель микроклимата парниковой теплицы, ориентированная на синтез трехканального управления температурой, влажностью воздуха, и концентрацией углекислого газа в парниковой теплице. На основе разработанного метода в главе 2 и математической модели получен алгоритм адаптивного трехканального управления температурой, влажностью воздуха и концентрацией CO₂ в парниковой теплице. Алгоритм управления обеспечивает выполнение целевых неравенств (4.1) – (4.3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе решены следующие задачи:

1. Разработан метод адаптивного управления нестационарными параметрически неопределенными линейными объектами с треугольной матрицей состояния и произвольной относительной степенью. Закон управления имеет простую структуру, которая заключается в относительно низком динамическом порядке регулятора, равным единице.

2. Построена математическая модель крутящего момента инжекторного ДВС, неизвестные параметры и статические функции которой идентифицируются на основе алгоритма наименьших квадратов и данных, полученных в ходе тестирования автомобиля Chevrolet Tahoe с 8-и цилиндровым V-образным двигателем.

3. На основе разработанного метода синтезирован алгоритм адаптивного управления крутящим моментом ДВС.

4. Построена математическая модель микроклимата парниковой теплицы, ориентированная на синтез трехканального управления температурой, влажностью воздуха, а также концентрацией CO_2 в парниковой теплице.

5. На основе разработанного метода получен алгоритм адаптивного трехканального управления температурой и влажностью воздуха и концентрацией CO_2 в парниковой теплице.

Одним из недостатков предложенного метода является возможное усиление высокочастотных шумов в канале управления, что ограничивает его применение в практических приложениях. Решение этой проблемы выходит за рамки диссертационной работы и может стать логическим продолжением проводимых исследований.

Литература

1. Khalil, H.K. Nonlinear Systems / H.K. Khalil // N.J.:Prentice-Hall, 2002.
2. Никифоров, В.О. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность [Текст] / В.О. Никифоров, А.В. Ушаков // - СПб.: СПб ГИТМО (ТУ), 2002. - С.232.
3. Rugh, W.J. Analytical framework for gain scheduling [Text] / W.J. Rugh // IEEE Contr.Sys. Mag. - 1991. Vol. 11, no. 1. - P.79 - 84.
4. Wu, F. Gain-scheduling control of LFT systems using parameter-dependent Lyapunov functions [Text] / F. Wu, K. Dong // Automatica. - 2006. - Vol.42, no. 1. – P.39-50.
5. Bruzelius, F. Linear Parameter-Varying Systems an approach to gain scheduling [Text] / F. Bruzelius. - Chalmers University of Technology, 2004.
6. Packard, A. K. Gain scheduling via linear fractional transformations [Text] / A. K. Packard // Systems Control Letters. - 1994 - Vol.22. – P.79 - 92.
7. Becker, G. Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically-dependent linear feedback [Text] / G. Becker, A. Packard // Systems Control Letters. – 1994. - Vol.23. - P.205 - 215.
8. Wu, F. Induced L2 norm control for LPV systems with bounded parameter variation rates [Text] / F. Wu, X.H. Yang, A. Packard, G. Becker // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 1996. - Vol.6. – P. 983 - 998.
9. Apkarian, P. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems [Text] / P. Apkarian, R. Adams // IEEE Control Systems Society. – 1997. - Vol. 6, no. 1. - P.21–32.
10. Apkarian, P. Self-scheduled H_∞ control of linear parameter-varying systems [Text] / P. Apkarian, P. Gahinet, G. Becker // Automatica. – 1995. - Vol. 31. – P. 1251 – 1261.

11. Apkarian, P. A convex characterization of gainscheduled H_∞ controllers [Text] / P. Apkarian, P. Gahinet // IEEE Trans. Automat. Control. - 1995. - Vol. 40, no. 5. – P.853-864.
12. Rugh, W.J. Research on gain scheduling [Text] / W.J. Rugh, J.S. Shamma // Automatica. – 2000. - Vol. 36, no. 10. - P. 1401 - 1425.
13. Shamma, J.S. Analysis of gain scheduled control for nonlinear plants [Text] / J. Shamma, M. Athans // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1990. - Vol.35. – P.898 - 907.
14. Ilchmann, A. A behavioral approach to time-varying linear systems [Text] / A. Ilchmann, V. Mehrmann // SIAM Journal of Control Optimization. – 2005. – Vol. 44, no. 5. – P. 1725 – 1747.
15. Boyd, S. Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory [Text] / S. Boyd, L. Ghaoui El, E. Feron, V. Balakrishnan I// Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1994.
16. Ioannou, P.A. Sun J. Robust Adaptive Control [Text] / P. Ioannou, J. Sun // – PTR Prentice-Hall, 1996.
17. Marino, R. Adaptive control of linear time-varying systems [Text] / R. Marino, P. Tomei // Automatica. - 2003. - Vol. 39. - P. 651–659.
18. Wu, F. LQG control design for LPV systems [Text] / F. Wu, A. Packard // Proceedings of the American Control Conference. – 1995. - P. 4440–4444.
19. Krstic, M. Nonlinear and adaptive control design [Text] / M. Krstic, I. Kanellakopoulos, P. Kokotovic. - New York: John Wiley and Sons Inc., 1995.
20. Tsakalis, K. S. Linear Time Varying Plants: Control and Adaptation [Text] / K. S. Tsakalis, P. A. Ioannou // N.J.:Prentice-Hall, 1993.
21. Tsakalis, K. S. Adaptive Control of Linear Time Varying Systems [Text] / K. S. Tsakalis, P. A. Ioannou // IEEE Decision and Control. - 1996. Vol. 1. - P. 837 - 842.
22. Мирошник, И. В. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами [Текст] / И. В. Мирошник, В. О. Никифоров, А. Л. Фрадков. — СПб : Наука, 2000.

23. Ioannou, A. Robust Adaptive Control [Text] / P.A. Ioannou, J. Sun // Courier Corporation, 2012.
24. Narendra, K.S. Stable adaptive systems [Text] / K.S. Narendra, A.S. Annaswamy // N.J.: Prentice-Hall, 1989.
25. Michino R. High gain adaptive output feedback tracking control of uncertain nonlinear systems without relative degree restriction [Text] / R. Michino, I. Mizumoto // Asian Control Conference. - 2009. - Vol. 6. - P. 244 - 249.
26. Ilchmann, A. High-gain control without identification: a survey [Text] / A. Ilchmann, E. Ryan // GAMM-Mitteilungen. - 2008. Vol. 31. - P. 115-125.
27. Blanchini, F. High-gain adaptive control: A derivative-based approach [Text] / F. Blanchini, T. Parisini, F. Pellegrino, G. Pin // IEEE Decision and Control. - 2008. - P. 3233 - 3238
28. Ilchmann, A. Adaptive Sampling Control of High-Gain Stabilizable Systems [Text] / A. Ilchmann, T. Stuart // IEEE Trans. on Autom. Control. - 1999. - Vol. 44. - P.1961 – 1966.
29. Niculescu, S.I. An adaptive smith-controller for time-delay systems with relative degree $n^* \leq 2$ [Text] / S.I. Niculescu, A.M. Annaswamy // Systems and control letters. - 2003. - Vol. 49, no. 5. - P. 347 - 358.
30. Ilchmann A. Tracking with prescribed transient behaviour for nonlinear systems of known relative degree [Text] / A. Ilchmann, E. Ryan, Ph. Townsend // Systems and control letters. - 2006. - Vol. 55, no. 5. - P. 396-406.
31. Hackl, C. Funnel control for systems with relative degree two [Text] / C. Hackl, N. Hopfe, A. Ilchmann, M. Mueller, S. Trenn // SIAM J. of Control and Optimization. - 2013. - Vol. 51, no.2.- P. 965 - 995.
32. Ilchmann, A. Tracking control with prescribed transient behavior for systems of known relative degree [Text] / A. Ilchmann, E.P. Ryan, P. Townsend // Systems and control letters. - 2006. - Vol.55. - P.396 - 406.
33. Андриевский Б. Р. Метод пассивации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации [Текст] / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков // Автоматика и телемеханика. - 2006. - № 11. - С. 3-37.

34. Полушин И. Г. Пассивность и пассивация нелинейных систем [Текст] / И. Г. Полушин, А. Л. Фрадков, Д. Д. Хилл. // Автоматика и телемеханика. - 2000 - № 3. - С. 3-37.

35. Бобцов, А.А. Алгоритм робастного управления линейными объектами по выходу с компенсацией неизвестного детерминированного возмущения [Текст] / А.А. Бобцов // Известия РАН. Теория и системы управления. - 2003. - №2. - С. 93-97.

36. Бобцов, А.А. Алгоритм управления по выходной переменной для линейного объекта с неизвестными параметрами и динамической размерностью [Текст] / А.А. Бобцов, А.А. Пыркин // Научно-технический вестник СПбГУИТМО. - 2011. - № 4. - С. 16 -161.

37. Barkana, I. Simple adaptive control – a stable direct model reference adaptive control methodology – brief survey [Text] / I. Barkana // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. - 2013. - Vol.28, no 7-8. - P.567 - 603.

38. Barkana, I. Classical and simple adaptive control for nonminimum phase autopilot design [Text] / I. Barkana // Journal of Guidance Control and Dynamics. - 2005. Vol.28, no.8. - P.631 - 638.

39. Бобцов, А.А. Управление по выходу нелинейными системами с запаздыванием в условиях неучтенной динамики [Текст] / А.А. Бобцов, М.В.Фаронов // Известия РАН. Теория и системы управления. - 2011. - № 3. - С. 79-87.

40. Герасимов, Д. Н., Никифоров, В. О., Лызлова, М. В. Простые алгоритмы адаптивного и робастного управления классом линейных объектов с переменными параметрами [Текст] / Д. Н. Герасимов, В. О. Никифоров, М. В. Лызлова // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. - 2015. - Т. 58, № 5. - С. 351 – 361.

41. Gerasimov, D. N. Simple Adaptive and Robust Control for a Class of Time Varying Systems [Text] / D. N. Gerasimov, M.V. Lyzlova, V.O. Nikiforov

//1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems, IET - 2015, P. 521-526

42. Воронов, В.С. Показатели устойчивости и качества робастных систем управления [Текст] / В.С. Воронов // Изв. РАН. Теория и системы управления. - 1995. - №6. - С. 49-54.

43. Луканин, В.Н. Двигатели внутреннего сгорания [Текст] //. В 3 кн. Кн.1 Теория рабочих процессов: Учебник для ВУЗов / В.Н. Луканин, К.А. Морозов, А.С. Хачиян и др.; Под ред. В.Н. Луканина. - М.: Высшая школа. 2005. - С.479.

44. Герасимов, Д. Н. Инжекторный двигатель как объект управления: I. схема двигателя и синтез математической модели [Текст] / Д. Н. Герасимов, Х. Джавахериан, Д.В. Ефимов и др. // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2010. - № 5. - С.135 - 147.

45. Stefanopoulou, A. G. Engine air-fuel ratio and torque control using secondary throttles [Text] / A.G. Stefanopoulou, J.W. Grizzle, J.S. Freudenberg // IEEE Conference on Decision and Control. - 1994. - Vol.3. - P. 2748 - 2753.

46. Jankovic, M. Torque management of engines with variable cam timing [Text] / M. Jankovic, F. Frischmuth, A. Stefanopoulou, J.A. Cook // IEEE Control Systems Magazine. - 1998. - Vol.18. - P. 34 - 42.

47. Jankovic, M. Transient effects and torque control of engines with variable cam timing [Text] / M. Jankovic, S. Magner, S. Hsieh, J. Konesol // American Control Conference. - 2000. - Vol.1. - P.50 - 54.

48. Karnik, A.Y. Electronic throttle and wastegate control for turbocharged gasoline engines / A.Y. Karnik, J.H. Buckland, J.S. Freudenberg // American Control Conference. - 2005. - Vol.7. - P.4434 - 4439.

49. Ali, A. Nonlinear torque control of a spark-ignited engine [Text] / A. Ali, J.P. Blath // American Control Conference. - 2006. - P.3266 - 3271.

50. Ali, A. Application of Modern Techniques to SI-Engine Torque Control [Text] / A. Ali, J.P. Blath // IEEE International Symposium on Intelligent Control. - 2006. - P.2405 - 2410.

51. Hong, M. Model-based PI feedback control of engine torque [Text] / M. Hong, M. Ouyang, Jing-Feng Li // IEEE International Conference on Control and Automation. 2010. - P.12 - 15.

52. Kolmanovsky, I.V. Speed-gradient approach to torque and air-to-fuel ratio control in DISC engines [Text] / I.V. Kolmanovsky, M. Druzhinina, J. Sun // IEEE Transactions on Control Systems Technology. - 2002. - Vol.10. - P.671 - 678.

53. Hong, M. Nonlinear observer-based torque control for SI engine [Text] / M. Hong, T. Shen, M. Ouyang [Text] // ICROS-SICE International Joint Conference. - 2009. - P.4114 - 4119.

54. Vermillion, C. Model predictive engine torque control with real-time driver-in-the-loop simulation results [Text] / C. Vermillion, K. Butts, K. Reidy // American Control Conference. - 2010. - P.1459 - 1464.

55. Sakai, Y. Torque demand control by nonlinear MPC with constraints for vehicles with variable valve lift engine [Text] / Y. Sakai, M. Kanai, M. Yamakita // IEEE International Conference on Control Applications. - 2010. - P. 1642 – 1647.

56. Javaherian, H. Automotive Engine Torque and Air-Fuel Ratio Control Using Dual Heuristic Dynamic Programming [Text] / H. Javaherian, D. Liu, O. Kovalenko // International Joint Conference on Neural Networks. - 2006. - P.518 - 525.

57. Zweiri, Y.H. Diesel Engine Indicated Torque Estimation Based on Artificial Neural Networks [Text] / Y.H. Zweiri, L.D. Seneviratne, K. Jordan // IEEE/ACS International Conference on Computer Systems and Applications. - 2007. - P.791 - 798.

58. Huang, K. Feedforward Method of Engine Torque Estimation [Text] / K. Huang, Sh. Wang, Zh. Jin, D.Jiang // IEEE International Conference on Vehicular Electronics and Safety. - 2006. - P.246 - 249.

59. Nagata, T. Robust engine torque control by iterative learning control [Text] / T. Nagata, M. Tomizuka // American Control Conference. - 2009. - P.2064 - 2069.

60. Колюбин, С.А. Двухканальное адаптивное гибридное управление соотношением воздух-топливо и крутящим моментом автомобильных двигателей [Текст] / С.А. Колюбин, Д.В. Ефимов, В.О. Никифоров, А.А. Бобцов // Автоматика и телемеханика. - 2012. - № 11. С. 42-60.

61. Герасимов, Д.Н. Адаптивное управление соотношением воздух-топливо и крутящим моментом в инжекторных двигателях внутреннего сгорания [Текст] / Д.Н. Герасимов, С.А. Колюбин, В.О. Никифоров // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2009. - № 1. С.14 - 21.

62. Герасимов, Д.Н. Инжекторный двигатель как объект управления. Часть II: Задачи автоматического управления двигателем [Текст] / Д.Н. Герасимов, Х. Джавахериан, Д.В. Ефимов, В.О. Никифоров // Известия РАН. Теория и системы управления. - 2010. - № 6. - С. 170 - 181.

63. Герасимов, Д.Н. Адаптивное управление крутящим моментом в инжекторных двигателях внутреннего сгорания [Текст] / Д.Н. Герасимов, В.О. Никифоров // Мехатроника, Автоматизация, Управление. – 2013. - №3. – С. 47 - 55.

64. Герасимов Д.Н. Адаптивное управление крутящим моментом в инжекторных двигателях с переменными фазами газораспределения [Текст] / Д.Н. Герасимов, В.О. Никифоров, А.В. Парамонов, Д.С. Серов // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. - 2014. -Т. 57, № 12. - С. 28-33.

65. Герасимов, Д.Н. Адаптивный регулятор стабилизации простой структуры. [Текст] / Д.Н. Герасимов, В.О. Никифоров // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики СПб: НИУИТМО. - 2012. – .№ 5 (81) - С.48 - 52.

66. Ginoux S. Engine torque determination by crankangle measurements: State of the art, future prospects [Text] / S. Ginoux, J. Champoussin // SAE Technical Paper. – 1997. - № 970532.

67. Герасимов Д.Н. Алгоритм адаптивного управления крутящим моментом инжекторного двигателя внутреннего сгорания [Текст] / Д.Н.

Герасимов, М.В. Лызлова, Ф.Л. Могилевцев, В.О. Никифоров // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Том15. №4. С. 623–631.

68. Токмаков, Н. М. Математическая модель системы управления микроклиматом ангарных теплиц [Текст] / Н. М. Токмаков, В.С. Грудинин // Гавриш. – 2008. - №3.

69. Zeng, S. Nonlinear Adaptive PID Control for Greenhouse Environment Based on RBF Network [Text] / S. Zeng, H. Hu, L. Xu, G. Li // Sensors. – 2012. - Vol.12. – P. 5328 - 5348.

70. Seginer, I. Neural network models of the greenhouse climate [Text] / I. Seginer, T. Boulard, B.J. Bailey. // J. Agric. Eng. Res. - 1994. - Vol. 59. - P.203 - 216.

71. Kok, R. Imitation of a procedural greenhouse model with an artificial neural network [Text] / R. Kok, R. Lacroix, G. Clark, E. Taillefer // Canadian Agricultural Engineering. -1994. - Vol. 36, no. 2. - P.117 - 126.

72. Park, J. Universal approximation using radial basis function networks [Text] / J. Park, I.W. Sandberg // Neural Computation. - 1991. - Vol.3. - P.246–257.

73. Ferreira, P.M. Discrete Model-Based Greenhouse Environmental Control using the Branch & Bound Algorithm [Text] / P.M. Ferreira, A.E. Ruano // The International Federation of Automatic Control Seoul. - 2008. - Vol.17, no. 1. – P.2937 – 2943.

74. Blasco, X . Model-based predictive control of greenhouse climate for reducing energy and water consumption [Text] / X. Blasco, M. Martínez, J.M. Herrero, C. Ramos, J. Sanchis // Computers and electronics in agriculture. – 2007. - Vol.55, no. 1. - P.49 - 70.

75. Klaring, H.-P. Model-based control of CO₂ concentration in greenhouses at ambient levels increases cucumber yield [Text] / H.-P. Klaring, C. Hauschild, A. Beibner, B. Bar-Yosef // Agricultural and Forest Meteorology. - 2006. - Vol.143.- P.208-216.

76. Berenguel, M. Adaptive control strategies for greenhouse temperature control [Text] / M. Berenguel, L.J. Yebra, F. Rodríguez // E 04120. - 2003.

77. Герасимов, Д.Н. Адаптивное управление микроклиматом в теплицах [Текст] / Д.Н. Герасимов, М.В. Лызлова // Известия РАН. Теория и системы управления . - 2014. - № 6. - С. 124–135.

78. Zabeltitz, C. Greenhouse structures [Text] / C. Zabeltitz // Ecosystems of the world. - 1999. - Vol. 20. - P.17 - 71.

79. Jones, J.W. Modeling tomato growth for greenhouse environment control [Text] / J.W. Jones, E. Dayan, P. Jones, Y. Hwang, B.K. Jacobson // American Society of Agricultural Engineers, 1988.

80. Takakura, T.K. Dynamic simulation of plant growth and environment in the greenhouse [Text] / T.K. Takakura, A. Jordan, L.L. Boyd // Trans. ASAE. - 1971. - Vol. 14, no.5. - P.964-971.

81. Al-Helal, I.M. A computational fluid dynamics study of natural ventilation in arid region greenhouses [Text] / I.M. Al-Helal // Ph.D. Thesis. - 1998. - P.186.

82. Dayan, J. Simulation and control of ventilation rates in greenhouses [Text] / J. Dayan, E. Dayan, Y. Strassberg, E. Presnov // Mathematics and Computers in Simulation. - 2004. - Vol. 65, no.1-2. - P.3 - 17.

83. De Jong, T. Natural ventilation of large multi-span greenhouses [Text] / T. De Jong // Ph.D. Thesis. - 1990. - P.116.

84. Jones, P. Simulation for determining greenhouse temperature set points [Text] / P. Jones, J.W. Jones, Y. Hwang // Transactions of the ASAE . - 1990. - Vol. 33, no. 5. - P.1722 - 1728.

85. Van Straten, G. Optimal Greenhouse Cultivation Control: Survey and Perspectives [Text] / G. Van Straten, E. J. Van Henten // Dept. Agrotechnology and Food Science. - 2010. Vol. 3, no.1. - P.18-33.

86. van Ooteghem, R.J.C. Optimal Control Design for a Solar Greenhouse [Text] / R.J.C. van Ooteghem // Ph.D. thesis. - 2007.

87. Rodríguez, F. Feedforward controllers for greenhouse climate control based on physical models [Text] / F. Rodríguez, M. Berenguel, M.R. Arahál // Control Conference (ECC). - 2001. - P. 2158 - 2163.
88. Boulard, T. Natural ventilation of a greenhouse with continuous roof vents: measurements and data analysis [Text] / T. Boulard, B. Draoui // Journal of Agricultural Engineering Research. -1995. - Vol. 61, no.1. - P.27-36.
89. Boulard, T. Characterization and modelling of the air fluxes induced by natural ventilation in a greenhouse [Text] / T. Boulard, R. Haxaire, M.A. Lamrani, J.C. Roy, A. Jaffrin // Journal of Agricultural Engineering Research. - 1999. - Vol. 74, no.2. - P.135 - 144.