

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет  
информационных технологий, механики и оптики

На правах рукописи

**Фаронов Максим Викторович**

**Компенсатор последовательного типа в задачах управления техническими  
системами в условиях возмущений, запаздывания и неучтенной динамики**

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации  
(в технических системах)

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель  
доктор технических наук, доцент  
Фуртат Игорь Борисович

Санкт-Петербург – 2015

## Содержание

Введение.....	4
1 Обзор методов адаптивного и робастного управления по выходу .....	9
1.1 Системы в условии параметрической неопределенности и внешних возмущений .....	9
1.2 Системы с запаздыванием.....	18
1.3 Управление системами с неучтенной динамикой .....	21
1.4 Управление многоканальными системами .....	25
1.5 Алгоритм управления «последовательный компенсатор» .....	27
1.6 Выводы по главе 1 .....	31
2 Адаптивное управление одноканальными объектами .....	33
2.1 Нелинейные системы с неучтенной динамикой при известной относительной степени.....	33
2.1.1 Отсутствие внешнего возмущения .....	33
2.1.1.1 Постановка задачи .....	33
2.1.1.2 Синтез алгоритма управления и доказательство его работоспособности .....	35
2.1.2 Наличие внешнего возмущения .....	41
2.1.2.1 Постановка задачи.....	41
2.1.2.2 Синтез алгоритма управления и доказательство его работоспособности .....	43
2.1.3 Адаптивный алгоритм настройки параметров регулятора...50	
2.1.4 Задача слежения .....	51
2.1.5 Пример использования закона управления .....	53
2.1.5.1 Задача стабилизации.....	54
2.1.5.2 Задача слежения .....	59
2.2 Адаптивное управление нелинейной системой с неучтенной динамикой при неизвестной относительной степени .....	62
2.2.1 Постановка задачи и синтез алгоритма управления .....	62

2.2.2	Адаптивный алгоритм настройки параметров.....	63
2.2.3	Пример использования закона управления .....	64
2.2.3.1.	Задача стабилизации.....	64
2.2.3.2.	Задача слежения.....	70
2.3	Выводы по главе 2 .....	72
3	Адаптивное управление многоканальными нелинейными системами с неучтенной динамикой .....	74
3.1	Постановка задачи .....	74
3.2	Синтез алгоритма управления .....	76
3.3	Адаптивный алгоритм настройки параметров регулятора.....	85
3.4	Случай с неизвестной относительной степенью .....	86
3.5	Пример использования алгоритма управления .....	88
3.5.1	Задача стабилизации.....	88
3.5.2	Задача слежения .....	92
3.6	Выводы по главе 3 .....	97
4	Практическая реализация закона управления на мобильном роботе «Robotino» .....	98
4.1	Описание мобильного робота «Robotino».....	98
4.2	Постановка задачи и синтез математической модели системы управления .....	101
4.3	Синтез алгоритма управления .....	109
4.4	Пример использования закона управления.....	109
4.5	Реализация закона управления на мобильном роботе «Robotino».....	113
4.6	Выводы по главе 4 .....	116
	Заключение .....	118
	Литература .....	120

## Введение

### **Актуальность темы исследования и степень ее разработанности.**

Проблема управления объектами в условиях параметрической неопределенности и внешних возмущений при измерении части вектора состояния – одна из классических задач современной теории управления. Это связано с тем, что зачастую на практике не удается измерить некоторые сигналы в объекте управления из-за отсутствия измерительных устройств или в силу особенностей самого процесса. К тому же параметры объекта управления могут быть неизвестны и изменяться в процессе работы.

Основные результаты в данной области были получены следующими отечественными и зарубежными учеными: Б.Р. Андриевский, А.М. Аннасвами, Р. Битмид, Ю.А. Борцов, В.Н. Буков, А.А. Бобцов, В.А. Брусин, С.Д. Земляков, П. Иоанноу, С.А. Кабанов, П. Кокотович, В.Н. Козлов, А.А. Колесников, М. Кристич, Г.А. Леонов, Р. Мариино, Л. Миркин, И.В. Мирошник, Р.В. Монополи, С. Морз, К. Нарендра, В.О. Никифоров, Б.Н. Петров, Б.Т. Поляк, Н.Д. Поляхов, В.В. Путов, Е.Н. Розенвассер, В.Ю. Рутковский, П. Томей, В.Н. Фомин, А.Л. Фрадков, Х.К. Халил, В.Л. Харитонов, А.М. Цыкунов, Я.З. Цыпкин, П.В. Щербаков, В.А. Якубович и другие.

Однако, несмотря на большое количество результатов в этой области, по-прежнему актуальной задачей остается поиск простых алгоритмов управления с невысоким динамическим порядком. Решение данной задачи особенно актуально при рассмотрении объектов управления, модели которых содержат структурную неопределенность (неучтенную динамику), запаздывание, некоторые типы нелинейностей. Задача существенно усложняется, если рассматривается группа взаимосвязанных объектов. Примерами прикладных задач могут служить управление в робототехнических системах, авиации, химической, нефтяной, газовой и легкой промышленности, металлургии и т.п., то есть практика в изобилии доставляет задачи управления такими объектами.

Таким образом, актуальными являются исследования, связанные с разработкой новых алгоритмов адаптивного и робастного управления с невысоким динамическим порядком для одноканальных и многоканальных объектов, модели которых содержат неучтенную динамику, запаздывание, неизвестные параметры, внешние возмущения и нелинейности.

**Цель работы.** Целью диссертационной работы является синтез алгоритмов управления техническими объектами, математическое описание которых представлено в виде нелинейной одноканальной или многоканальной модели с запаздыванием по состоянию и неучтенной динамикой, в условиях действия возмущений.

**В процессе достижения поставленной цели решены следующие задачи:**

1. Разработан алгоритм управления, обеспечивающий экспоненциальную устойчивость при управлении минимально-фазовыми объектами с запаздыванием по состоянию, с секторно ограниченной нелинейностью и неучтенной динамикой при известной относительной степени в условиях параметрической неопределенности.

2. Полученный алгоритм управления расширен на случай действия внешних ограниченных возмущений на объект управления.

3. Алгоритм управления обобщен для случая неизвестной относительной степени модели объекта управления.

4. Синтезирован алгоритм управления для минимально-фазовых многоканальных систем управления с запаздыванием по состоянию, с секторно ограниченной нелинейностью и неучтенной динамикой при известной относительной степени в условиях параметрической неопределенности.

5. Разработан алгоритм управления мобильным роботом «Robotino».

**Научная новизна.** В работе проанализирована работоспособность предложенных алгоритмов для управления параметрически и структурно неопределенными нелинейными одноканальными и многоканальными объектами управления с запаздыванием по состоянию. Доказана экспоненциальная

устойчивость замкнутой системы при отсутствии внешнего возмущения и ограниченность всех траекторий системы при его наличии. Проведены экспериментальные исследования, подтверждающие полученные результаты.

**Теоретическая значимость работы.** Полученные в работе результаты позволяют расширить базу методов управления параметрически и структурно неопределенными линейными и нелинейными одноканальными и многоканальными объектами управления с запаздыванием по состоянию в условиях действия ограниченных по амплитуде неизвестных гладких возмущений.

**Практическая значимость работы.** Полученные в работе результаты могут быть использованы для программно-алгоритмического решения задач управления параметрически и структурно неопределенными нелинейными одноканальными и многоканальными объектами с запаздыванием, на которые действуют возмущения. В частности, в работе продемонстрировано решение задачи управления мобильным роботом на базе полученных теоретических результатов.

**Методы исследований.** При получении теоретических результатов использовались современные методы адаптивного и робастного управления, прямой метод Ляпунова, метод функционалов Ляпунова-Красовского, преобразования Лапласа, методы решений и анализа обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, методы алгебры многочленов и теории матриц.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Система управления, обеспечивающая экспоненциальную устойчивость минимально-фазовых объектов управления с запаздыванием по состоянию, секторно ограниченной нелинейностью и неучтенной динамикой при известной относительной степени в условиях параметрической неопределенности.
2. Расширение закона управления для случая действия на объект управления внешнего ограниченного возмущения.

3. Обобщение закона управления для случая неизвестной относительной степени модели объекта управления.

4. Расширение закона управления на многоканальные системы управления.

5. Применение результатов к задаче управления мобильным роботом.

**Степень достоверности.** Достоверность результатов обеспечивается строгостью постановок задач и доказательств утверждений, корректным использованием математического аппарата, подтверждением теоретических результатов моделированием с помощью пакета прикладных программ MATLAB, а также результатами эксперимента на реальном оборудовании.

**Апробация результатов работы.** Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. 13th International Student Olympiad on Automatic Control BOAC. Санкт-Петербургский Государственный Политехнический Университет. 26.05.2010 - 28.05.2010.

2. XXXIX Международная научно-практическая конференция «Неделя науки СПбГПУ». Санкт-Петербургский Государственный Политехнический Университет. 06.12.2010 - 11.12.2010.

3. XIII Конференция молодых ученых «Навигация и управление движением». ЦНИИ "Электроприбор". 15.03.2011 - 18.03.2011.

4. The 19th Mediterranean Conference on Control and Automation. Corfu, Greece. 20.06.2011 – 23.06.2011.

5. The 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC). Milano, Italy. 28.08.2011 – 02.09.2011.

6. 14th International Student Olympiad on Automatic Control BOAC. Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики. 21.09.2011 - 23.09.2011.

7. 2011 IEEE International Conference on Control Applications. Denver, USA. 26.09.2011 – 30.09.2011.

8. XIV Конференция молодых ученых «Навигация и управление движением». ЦНИИ "Электроприбор". 13.03.2012 - 16.03.2012.

9. 2012 IEEE International Conference on Control Applications. Dubrovnik, Croatia. 03.10.2012 – 05.10.2012.

10. XV Конференция молодых ученых «Навигация и управление движением». ЦНИИ "Электроприбор". 12.03.2013 - 15.03.2013.

11. II Всероссийский конгресс молодых ученых. НИУ ИТМО. 09.04.2013 – 12.04.2013.

12. ICNPAА 2014 Congress. Narvik University, Norway. 15.07.2014 – 18.07.2014.

13. 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). Санкт-Петербург, 06.10.2014 – 08.10.2014.

**Публикации.** По материалам диссертации опубликовано 14 печатных работ, из которых 3 публикации входят в издания из перечня ВАК, 5 – в базу данных Scopus, 11 статей опубликовано по материалам конференций.

**Личный вклад автора.** Автором диссертационной работы были проведены теоретические и экспериментальные исследования в задачах синтеза и апробации на мобильном роботе алгоритмов управления для одноканальных или многоканальных объектов, модели которых содержат неизвестные параметры, возмущения, запаздывание по состоянию и неучтенную динамику.

# 1 Обзор методов адаптивного и робастного управления по выходу

## 1.1 Системы в условиях параметрической неопределенности и внешних возмущений

Задача адаптивного управления может быть кратко сформулирована следующим образом [44]. Рассматривается некоторый объект управления с выходной переменной  $y$ , вектором состояния  $x$  и сигналом управления  $u$ . При этом поведение объекта зависит от ряда неизвестных факторов, которые можно обозначить вектором  $\theta$ . Он может включать в себя неизвестные параметры объекта управления, неизмеряемые внешние возмущения, неточности в математической модели и т.д. Целью управления является выполнение следующего предельного целевого неравенства:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(x, t) \leq \Delta, \quad (1.1)$$

где  $Q(x, t)$  – некоторая целевая функция,  $\Delta > 0$  – порог, допустимое значение целевой функции.

Задача адаптивного управления неопределенным объектом состоит в следующем: необходимо найти закон управления, не содержащий неизвестный вектор  $\theta$  и в то же время обеспечивающий ограниченность всех траекторий системы и выполнение целевого неравенства (1.1).

Методы классической теории управления основаны на предположении, что все характеристики объекта управления известны заранее, и потому возможно использование закона управления, в явном виде включающего  $\theta$ :

$$u = U(y, \theta, t). \quad (1.2)$$

Однако в реальности вектор  $\theta$  неизвестен. Поэтому применяется алгоритм управления, решающий задачу одновременного изучения и управления объектом:

$$u = U(y, \hat{\theta}, t), \quad (1.3)$$

$$\hat{\theta} = \Theta(y, \hat{\theta}, t), \quad (1.4)$$

где  $\hat{\theta}$  – оценка вектора  $\theta$ . Уравнение (1.4) представляет собой алгоритм адаптации или робастную обратную связь, компенсирующую неопределенности математической модели объекта.

Проблема управления объектами в условиях неопределенности, отсутствия или наличия неполной информации о параметрах объекта управления, является одной из классических в теории управления. Существует большое количество работ, посвященных адаптивной стабилизации линейных систем, как минимально-фазовых [5], [27], [17], [20], [123], [117], [118], [107] так и неминимально-фазовых. Так, в работе [76] решается задача адаптивной стабилизации линейных неминимально-фазовых объектов при помощи метода рекуррентных целевых неравенств.

Проблема синтеза алгоритмов адаптивного управления при идеальных условиях, то есть в том случае, если отсутствуют внешние возмущения и вектор  $\theta$  представляет собой вектор постоянных параметров, явилась объектом пристальных исследований еще в конце 1970-х – начале 1980-х годов. Основным результатом исследований этого периода состоит в определении структуры и доказательстве работоспособности основных схем:

- адаптивное управление с эталонной моделью по состоянию [111];
- адаптивное управление с эталонной моделью по выходу с использованием сигнала расширенной ошибки [117], [122];
- адаптивные системы с неявной эталонной моделью [124];
- адаптивное управление на базе адаптивных наблюдателей [122].

При этом, как видно, были предложены алгоритмы управления как по состоянию, то есть когда в закон управления включаются переменные состояния объекта управления, так и по выходу, в случае если в законе управления используется только выходная переменная. Очевидно, что в первом случае необходимо иметь информацию о переменных состояниях, то есть измерять их

каким-либо образом, что на практике не всегда выполнимо. Поэтому в первую очередь представляют интерес алгоритмы управления по выходу.

Системы с эталонной моделью по состоянию – это системы, все траектории которых стремятся к траекториям некоторой заданной эталонной модели [36], [127], [112]. Так, в статье [35] рассматривается адаптивное управление с эталонной моделью для нестационарных объектов вида:

$$\dot{\varphi} + (A_0 + \Delta A(t))\varphi = (B_0 + \Delta B(t))g(t) + f(t) + L, \quad (1.5)$$

где  $\varphi, g, f$  - векторы состояния, задающего воздействия и координатного возмущения соответственно, а компоненты вектора  $L$  предназначены для компенсации координатных и параметрических возмущений. Вводится эталонная модель вида:

$$\dot{\varphi}_M + A_0\varphi_M = B_0g(t), \quad (1.6)$$

на которую подается тот же вектор управляющих воздействий. Далее находится алгоритм изменения вектора  $L$  в зависимости от доступной измерению информации, при котором вектор  $\varphi$  асимптотически сходится к желаемому вектору  $\varphi_M$ . При этом сочетаются принципы построения адаптивных систем с эталонной моделью [36], [127], [112] и систем с переменной структурой [34], [39], [139]. Это позволяет использовать положительные свойства обоих подходов, такие, как независимость от интенсивности и спектрального состава входных воздействий, от диапазонов изменения возмущений, высокая динамическая точность движения и предсказуемость, а также возможность применения аналогов принципа обратной связи.

В [47]-[49] синтезируются наблюдатели внешних детерминированных возмущений, которые используют внутреннюю модель для оценки внешних возмущающих воздействий, что позволяет скомпенсировать их в замкнутой системе управления. В [28] с помощью наблюдателя вектора состояния через итеративную процедуру «бэкстеппинг» синтезируется управляющее воздействие, компенсирующее влияние возмущения.

Еще один подход представлен в работе [71], где с помощью эталонной модели решается задача стабилизации неустойчивого объекта с неизвестными параметрами и слежения за ограниченным задающим воздействием с компенсацией ограниченных возмущений с заданной точностью. Рассматривается объект:

$$Q(p)y(t) = kR(p)u(t) + f(t), \quad (1.7)$$

где  $u(t)$ ,  $y(t)$  – входная и выходная скалярные переменные соответственно,  $f(t)$  – возмущение,  $Q(p), R(p)$  – полиномы известных порядков. Вводится также эталонная модель:

$$Q_m(p)y_m(t) = k_m r(t). \quad (1.8)$$

В статье формулируется закон управления вида:

$$u(t) = -\beta Q_m(p)\bar{\zeta}(t), \quad (1.9)$$

$$\dot{\xi}(t) = G_0 \xi(t) + D_0 (\bar{\zeta}(t) - \zeta(t)), \quad (1.10)$$

$$\bar{\zeta}(t) = L\xi(t), \quad (1.11)$$

$$\zeta(t) = y(t) - \tilde{y}(t), \quad (1.12)$$

$$Q_m(p)\tilde{y}(t) = \frac{k_m}{\alpha} u(t). \quad (1.13)$$

Число  $\alpha$  выбирается, исходя из известного множества значений полиномов  $Q(p), R(p)$  и числа  $k$ . При этом обеспечиваются требуемые показатели качества переходного процесса. Результаты обобщаются на нелинейные системы и системы с запаздыванием.

В статье [46] автор решает проблему синтеза наблюдателя внешних возмущений с помощью расширения метода внутренней модели [2]-[4], [43], [30], [54] на случай неопределенных возмущений, математическая модель которых заранее неизвестна. Метод действует как для линейных, так и для нелинейных объектов управления. При этом параметрическая неопределенность не сказывается ни на структуре, ни на параметрах наблюдателя. Поставленная автором задача состоит в построении динамического фильтра вида

$$\dot{\hat{\zeta}} = Z(\hat{\zeta}, y, u), \quad (1.14)$$

где  $y, u$  – выходная переменная и управляющий сигнал соответственно, позволяющего представить возмущение  $\delta$  в виде линейной регрессионной модели:

$$\delta(t) = \theta^T \omega(t), \quad (1.15)$$

где  $\theta^T$  – вектор постоянных параметров, а  $\omega(t) = \omega(\hat{\zeta}(t), y(t))$  – вектор известных функций времени.

В работе [15] рассмотрены принципы построения адаптивных систем управления нестационарными нелинейными электромеханическими объектами. В [74] дается обзор различных алгоритмов адаптации и методов оптимизации.

Касательно подавления возмущений, можно также упомянуть работы [10], [53], [131], [132]. Целью работы [10] является компенсация влияния на объект управления мультигармонического возмущения. Тем не менее, если объект управления неустойчив, то предложенный метод применить невозможно. Статьи [53], [131], [132] посвящены компенсации смещенного гармонического возмущения, действующего на неустойчивый объект управления с запаздыванием. Для достижения цели используется предиктор и алгоритм идентификации частоты возмущения. Авторы показывают, что невязка между реальной частотой и её оценкой при этом сходится к нулю, причем она ограничена некоторой экспонентой.

Далее рассмотрим более подробно некоторые базовые адаптивные алгоритмы: алгоритм адаптивного управления с расширенной ошибкой, алгоритм адаптации высокого порядка и итеративную процедуру синтеза адаптивного алгоритма.

Концепция расширенной ошибки была предложена Р.Монополи в работе [117] и легла в основу синтеза целого класса адаптивных регуляторов по выходной переменной. Рассмотрим следующий объект управления:

$$\dot{x} = Ax + b[\omega^T(t)\theta + u], \quad (1.16)$$

$$y = c^T x, \quad (1.17)$$

где  $x \in R^n$ ,  $A$ ,  $b$ ,  $c$  – матрицы описания объекта,  $\omega(t)$  – регрессор (вектор известных ограниченных функций),  $\theta$  – вектор неизвестных постоянных параметров.

Предположим, что передаточная функция объекта (1.16), (1.17)  $H(p) = c^T (pI - A)^{-1} b$  удовлетворяет условиям строгой вещественной положительности (в частности, это означает, что ее числитель и знаменатель гурвицевы, и относительная степень равна единице), следовательно, матрица  $A$  является гурвицевой.

Структура настраиваемого регулятора определяется в соответствии с принципом непосредственной компенсации, заключающемся в компенсации вектора неизвестных параметров с помощью закона управления:

$$u = -\omega^T(t)\hat{\theta}. \quad (1.18)$$

Для синтеза алгоритма адаптации вводится понятие расширенной ошибки. Рассматриваются дополнительные фильтры:

$$\dot{W} = AW + b\omega^T(t); \quad \varpi(t) = c^T W, \quad (1.19)$$

$$\dot{\eta} = A\eta - W\dot{\theta}; \quad \zeta = c^T \eta. \quad (1.20)$$

Расширенная ошибка  $\hat{y}$  определяется выражением:

$$\hat{y} = y + \zeta, \quad (1.21)$$

причем для нее справедливо соотношение:

$$\hat{y} = \varpi^T \tilde{\theta} + c^T e, \quad (1.22)$$

где  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  и экспоненциально затухающий член  $e$  удовлетворяет уравнению  $\dot{e} = Ae$ .

Алгоритм адаптации выбирается следующим образом:

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma \frac{1}{1 + \varpi^T \varpi} \varpi \hat{y}, \quad (1.23)$$

где  $\varpi$  и  $\hat{y}$  определяются уравнениями (1.19), (1.21), а  $\gamma$  – постоянный коэффициент. Тогда для любых  $\gamma > 0$  и произвольных начальных условий  $x_0, \hat{\theta}_0$  вектор настраиваемых параметров  $\hat{\theta}$  является ограниченным, а его производная  $\dot{\hat{\theta}}$

– ограниченная квадратично интегрируемая функция времени. Более того, если вектор  $\omega(t)$  также является ограниченным, то все сигналы в замкнутой системе ограничены, величина  $\varpi^T \tilde{\theta}$  квадратично интегрируема, и  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ .

Отметим, что когда регрессор  $\omega$  зависит от переменных  $y$  или  $u$ , то нельзя заранее предположить его ограниченность. Также в данном случае не удастся получить оценок качества переходных процессов.

Рассмотрим далее следующую систему:

$$y = kH(p) \left[ \omega^T(t)\theta + u + \delta \right], \quad (1.24)$$

где  $k > 0$  – неизвестный параметр,  $\theta$  –  $q$ -мерный вектор, элементами которого являются не зависящие от времени параметры, значения которых неизвестны,  $\delta(t)$  – ограниченный по амплитуде сигнал возмущения, а передаточная функция  $H(p)$  является минимально фазовой. Введем новую передаточную функцию:

$$W(p) = (p + \lambda)H(p). \quad (1.25)$$

Тогда модель (1.24) можно представить в виде:

$$y = \frac{k}{p + \lambda} \left[ \varpi^T(t)\theta + W(p)u + \bar{\delta} \right] + e, \quad (1.26)$$

где  $e(t)$  – экспоненциально сходящаяся к нулю функция, порождаемая ненулевыми начальными условиями,  $\bar{\delta}(t) = W(p)\delta(t)$ ,  $\varpi(t) = W(p)\omega(t)$ .

Тогда закон управления может быть выбран по принципу непосредственной компенсации:

$$u = -W(p)^{-1} \left[ \varpi(t)\hat{\theta} \right]. \quad (1.27)$$

Подставляя (1.16) в (1.15), имеем:

$$y = \frac{k}{p + \lambda} \left[ \varpi^T(t)\tilde{\theta} + \bar{\delta} \right] + e. \quad (1.28)$$

Алгоритм адаптации выбирается следующим образом:

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma \varpi y. \quad (1.29)$$

Передаточная функция  $W(p)$  имеет относительную степень  $\rho - 1$ , где  $\rho$  – относительная степень передаточной функции  $H(p)$ . В таком случае при  $\rho = 1$

практическая реализация закона (1.27) является тривиальной, однако для более высоких относительных степеней для настройки регулятора (1.27) не может использоваться алгоритм адаптации (1.29), так как для этого необходимы старшие производные вектора настраиваемых параметров  $\hat{\theta}$ , а он не позволяет их получить. Для решения этой проблемы можно использовать алгоритм адаптации высокого порядка, предложенный С. Морзом в работе [120]. Алгоритмом адаптации порядка  $N$  называется алгоритм, генерирующий не только вектор настраиваемых параметров, но и его производные по времени до  $N$ -го порядка включительно.

Пусть задана модель (1.28) и  $\bar{\delta} \equiv 0$ , а первые  $\rho^* = \rho - 2$  производных  $\varpi$  являются доступными измерению. Выбирается нормированный асимптотически устойчивый полином  $\bar{\alpha}(p)$  степени  $\rho^*$  и минимальная реализация  $(\bar{C}, \bar{A}, \bar{b})$  передаточной функции  $\frac{\bar{\alpha}(0)}{\bar{\alpha}(p)} = \bar{C}^T (pI - \bar{A})\bar{b}$ . Тогда алгоритм адаптации порядка

$\rho^*$  определяется в виде:

$$\dot{\hat{\psi}}_i = \varpi_i y, \quad (1.30)$$

$$\dot{\eta}_i = (1 + \mu \varpi^T \varpi)(\bar{A}\eta_i + \bar{b}\hat{\psi}_i), \quad (1.31)$$

$$\hat{\theta}_i = \bar{C}^T \eta_i, \quad (1.32)$$

где  $i = \overline{1, q}$ , а  $\mu$  – постоянная величина. Тогда для замкнутой системы (1.28), (1.30) – (1.32) выполняется следующее утверждение:

Если

$$\mu > \frac{3q}{4\lambda} \left( k_{\max} |\bar{C}| + |P\bar{A}^{-1}\bar{b}| \right)^2, \quad (1.33)$$

где матрица  $P = P^T > 0$  является решением уравнения  $\bar{A}^T P + P\bar{A} = -2I$ , а  $k_{\max}$  – максимально возможное значение параметра  $k$ , то для любых начальных условий сигналы  $y(t), \hat{\psi}_i(t), \eta_i(t)$  ограничены, а также ограничены нормы  $L_2$  и  $L_\infty$  выходного сигнала  $y(t)$ . Если регрессор  $\omega(t)$  ограничен, то все сигналы в замкнутой системе являются ограниченными и  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ .

Таким образом, алгоритм адаптации высокого порядка может рассматриваться как последовательное включение ненормированного алгоритма настройки (1.29) и нестационарного фильтра (1.31), (1.32) порядка  $\rho^* = \rho - 2$ . Также особенностью является то, что данный алгоритм генерирует не только сами настраиваемые параметры, но и их производные до порядка  $\rho - 1$  включительно. По сравнению с регулятором с расширенной ошибкой его структура является более сложной.

Альтернативный метод синтеза адаптивных регуляторов по выходу, настраиваемых ненормализованными алгоритмами адаптации, предполагает использование итеративных методов синтеза, иначе называемых адаптивным обходом интегратора, или бэкстеппингом. Первоначально данные методы синтеза были предложены в работах [104], [108]. Итеративный характер данных процедур означает, что синтез управления осуществляется последовательно, в несколько шагов. На каждом очередном шаге выбирается виртуальный закон управления – функция стабилизации, обеспечивающая стабилизацию некоторой динамической системы. Искомое управление определяется на последнем шаге через все предыдущие функции стабилизации. Аналитические выражения, используемые для расчета сигнала управления, являются достаточно сложными (по крайней мере, для систем высокого порядка с большим числом неизвестных параметров).

Так, итеративные методы синтеза [37], [109] используются в работе [50], ставящей задачу синтеза робастного алгоритма управления линейным объектом по выходу при некоторых допущениях и при отсутствии априорной информации о диапазоне возможных вариаций параметров и амплитуды внешнего возмущения. При этом не используется идентификация неизвестных параметров или адаптивная настройка параметров регулятора, а инвариантность по отношению к неопределенностям достигается за счет специальной нелинейной обратной связи.

Из краткого обзора базовых методов адаптивного управления можно сделать следующие выводы. Регулятор с расширенной ошибкой является наиболее простым с точки зрения структуры и простоты процедуры синтеза, но в то же

время обеспечивает наихудшие показатели замкнутой системы. Регулятор, получаемый на основе итеративной процедуры адаптивного обхода интегратора, напротив, является наиболее сложным, однако он обеспечивает лучшее качество переходных процессов, а также придает замкнутой системе желательные свойства, такие, как нечувствительность к параметрическим возмущениям и возможность использования некоторой известной информации о параметрах объекта управления. Регулятор с алгоритмом адаптации высокого порядка занимает промежуточное положение между двумя вышеупомянутыми алгоритмами управления.

Одним из значительных недостатков данных регуляторов является их высокая динамическая размерность. Так, для системы порядка  $n$ , имеющей относительную степень  $\rho = n - m$ , размерность регулятора с расширенной ошибкой равна  $2n(\rho + 2) - 1$ , размерность регулятора с алгоритмом адаптации высокого порядка –  $2n(2\rho - 1) - 2$ , а у регулятора, получаемого на основе итеративных процедур синтеза, она может достигать  $3n + m + 2$ .

## *1.2 Системы с запаздыванием*

Задача обеспечения устойчивости линейных систем при наличии запаздывания в последние годы широко исследовалась. Например, в работе [96] авторы описывают достижения и новые разработки в этой области, раскрывают способы и инструменты использования алгоритмов оптимизации и численных методов, обращая внимание на системы с неопределенностями и критерии устойчивости, которые могут быть вычислительно реализованы. В книге [135] описываются отличия, характерные для систем с запаздыванием, а также некоторые способы управления ими, например, с использованием скользящего режима. Также уделяется внимание таким открытым вопросам, как использование входных сигналов с запаздыванием, информации о величине запаздывания и цифровая реализация распределенных задержек.

Нелинейным системам с запаздыванием было уделено меньше внимания. Вообще говоря, о задаче обеспечения абсолютной устойчивости нелинейных систем, в частности, в форме Лурье, то есть представляемых в виде линейного блока и нелинейной обратной связи, говорилось ещё очень давно [40]. Проблема являлась объектом достаточно широкого круга исследований. Так, например, в обзоре [106] описывается, как со временем описательные концепции устойчивости, оптимальности и неопределенности привели к появлению инструментов и процедур синтеза регуляторов.

Ряд статей [85], [105], [114] посвящен стабилизации систем, в которых выходной сигнал нелинейного блока может быть скомпенсирован соответствующим управляющим сигналом, если выходной сигнал нелинейного блока поддается измерению. Однако с использованием такого подхода невозможно обеспечить выполнение цели управления в более общем случае, когда указанное условие не выполняется.

Проблемы устойчивости нелинейных систем с запаздыванием рассматривались в публикациях [93], [95], [97], [100], [126]. В статье [93] для нелинейных систем со строгой обратной связью и неизвестными запаздываниями используется адаптивный алгоритм управления, синтезируемый с помощью функционалов Ляпунова-Красовского, который позволяет компенсировать влияние запаздываний. Также разрешается проблема вырождения регулятора через использование интегральной функции Ляпунова. Публикация [95] посвящена проблеме точной линеаризации и парирования влияния запаздываний для нелинейных систем. Выводятся геометрические условия, гарантирующие существование преобразования координат, позволяющего преобразовать уравнение объекта в линейное уравнение без запаздывания, для которого можно легко синтезировать регулятор. Геометрические методы также являются инструментом исследования в работах [94], [115], [119], где авторы синтезируют с их помощью регуляторы, некоторые из которых используют в качестве информации только выходную переменную, а другие – переменные состояния. Однако объекты управления в этом случае должны удовлетворять строгим

ограничениям. В [126] с помощью модификации производной Ли также выводится преобразование координат, позволяющее линеаризовать нелинейную систему с запаздыванием по состоянию. В преобразовании могут использоваться как текущие, так и предыдущие значения переменных состояния. Кроме того, показывается, что такое преобразование обратимо в окрестности положения равновесия. Работа [100] также посвящена проблеме робастной стабилизации нелинейных систем с запаздываниями и возмущениями по состоянию, причем предполагается их ограничение неизвестной линейной функцией. Предложены два типа регуляторов по состоянию: на основе функции Ляпунова-Красовского и леммы Разумихина. Оба алгоритма управления робастны по отношению к запаздыванию и обеспечивают глобальную устойчивость замкнутой системы. В статье [97] приводится достаточное условие абсолютной устойчивости систем в форме Лурье, выраженное в виде линейных матричных неравенств. Используется метод системных дескрипторов и декомпозиции матриц. Определяется также верхняя граница значений запаздывания.

Авторы работы [22], опираясь на метод интегральных оценок и элементы качественной теории динамических систем в бесконечномерных нормированных пространствах, с помощью метода, изложенного в [18], [21], синтезируют адаптивный регулятор для конечномерного линейного объекта вида:

$$\dot{x} = Ax + B \int_0^g C(h) \varphi(\mu(t-h)) dh + Mu(t) + \xi(t), \quad (1.34)$$

$$y = c^* x(t), \quad (1.35)$$

где  $x \in R^n$  - вектор состояния,  $u$  - скалярный сигнал управления,  $C, \varphi$  - скалярные функции времени и величины  $\mu$ , зависящей от  $y$ .

Закон управления имеет вид:

$$R(p)v_i(t) = (p + \beta)^{i-1} v(t), \quad R(p)y_i(t) = (p + \beta)^{i-1} y(t),$$

$$\dot{\lambda}_i = -\rho_{\lambda_i} y(t) v_i(t), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\dot{\mu}_i = -\rho_{\mu_i} y(t) y_i(t), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$v = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(t) v_i + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i(t) y_i,$$

$$u = (p + \gamma)^{\rho-1} v,$$

где  $R(p)$  - гурвицев полином, а числа  $\rho_{\lambda_i} > 0$ ,  $\rho_{\mu_i} > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$  и коэффициенты полинома являются параметрами регулятора и могут выбираться произвольно с учетом определенных ограничений.

### *1.3 Управление системами с неучтенной динамикой*

Ещё одной актуальной проблемой является компенсация влияния малоинерционной паразитной неучтенной динамики на устойчивость и качество переходных процессов в системах управления. При управлении реальными техническими объектами могут возникать неточности в определении их размерности, такие, как неучтенная динамика или сингулярные возмущения. Например, неучтенной динамикой являются переходные процессы в электрических цепях. Ставится задача синтеза такого закона управления, который бы обеспечивал устойчивость замкнутой системы, если динамический порядок объекта управления не совпадает с расчетным. Наиболее распространенные методы робастного управления основаны на использовании регуляторов, обеспечивающих определенный запас устойчивости замкнутой системы [52], различные виды наблюдателей [6], [7], [11], [19], [71], [78], [125] и т.д., однако там задача робастного управления решалась при условии известного порядка характеристического полинома и известной относительной степени. Так, в работе [136] анализируется работоспособность некоторых известных адаптивных законов управления в случае присутствия в модели объекта управления неучтенной динамики. Авторы приходят к выводу, что паразитная динамика может привести к потере свойства устойчивости замкнутой системы. После этой публикации появились различные модификации алгоритмов адаптивного управления, робастных по отношению к паразитной динамике, например,  $\sigma$ -

модификация [101],  $e$ -модификация [121], алгоритмы с гладким отображением [128] и иные алгоритмы управления [74], [86].

Общий смысл  $\sigma$ -модификации заключается в следующем. Исходный алгоритм адаптации «чисто интегрального типа» имеет вид:

$$\dot{\hat{\theta}} = \Theta(x, t). \quad (1.36)$$

В алгоритме (1.36) отсутствует обратная связь по настраиваемым параметрам, входящим в вектор оценок  $\hat{\theta}$ . В этом случае при наличии возмущений операция интегрирования может привести к неограниченному возрастанию вектора  $\hat{\theta}$ . Это явление называется неограниченным параметрическим дрейфом. В целях борьбы с ним в алгоритм адаптации вводится дополнительное слагаемое:

$$\dot{\hat{\theta}} = \Theta(x, t) - \sigma \hat{\theta}. \quad (1.37)$$

Такая модификация обеспечивает экспоненциальную сходимость переменных состояния и параметрических ошибок в некоторую допустимую окрестность. Недостаток состоит в том, что это приводит к ненулевой установившейся ошибке даже при отсутствии возмущения и стационарности вектора оцениваемых параметров. Возник вопрос, каким образом можно уменьшить эту ошибку. Существовало предположение [101], что малое значение установившейся ошибки достигается уменьшением  $\sigma$ , однако в работе [99] было доказано, что при этом может появиться «взрывной эффект», то есть редких всплесках ошибки стабилизации. Впоследствии появились также работы, ставящие целью устранение этого явления [87], [122].

В обзорной работе [31] рассматриваются результаты исследования задачи управления системами с неучтенной динамикой, начиная с 1982 года. Рассматривается следующий класс систем:

$$\dot{\chi}_1 = f_1(\chi_1, \chi_2, u, t), \quad (1.38)$$

$$\mu \dot{\chi}_2 = f_2(\chi_1, \chi_2, u, t), \quad (1.39)$$

где  $\chi_1, \chi_2$  – вектор состояния системы (вектор медленных переменных) и вектор состояния, относящейся к неучтенной динамике (вектор быстрых переменных)

соответственно,  $f_1, f_2$  – некоторые нелинейные функции,  $u(t)$  – сигнал управления,  $\mu > 0$  – малый параметр, характеризующий быстроту переходных процессов неучтенной динамики.

Для подобных систем рассматриваются методы оптимального управления, способы управления распределенными системами, управление в условиях неопределенностей и прочие подходы.

В работах [108], [60], [61] авторы исследовали задачи анализа систем при наличии паразитной динамики и синтеза регуляторов для них. Для анализа устойчивости применяется построение функций Ляпунова, схемы декомпозиции систем разделением разноскоростных движений, основанные на известных классических результатах [25], [38], [45], [46], а также метод скоростного градиента. Авторы книги [52] анализируют робастную устойчивость объектов управления в зависимости от типа неопределенностей и вида возмущений. Для робастной стабилизации применяются такие методы, как  $H_\infty$ -оптимизация,  $\mu$ -синтез, D-разбиение, построение общей квадратичной функции Ляпунова и т.д.

Как пример решения проблемы адаптивного управления в условиях неучтенной динамики можно привести [44], где для систем вида:

$$\dot{\chi}_1 = f(\chi_1) + g_x(\chi_1)(\omega(\chi_1)^T \theta + v), \quad (1.40)$$

$$\mu \dot{\chi}_2 = F_x \chi_2 + qu, \quad v = l^T \chi_2, \quad (1.41)$$

где  $f(\chi_1)$ ,  $g_x(\chi_1)$ ,  $\omega(\chi_1)$  – гладкие вектор-функции,  $\theta$  – вектор неизвестных постоянных параметров, а матрица  $F_x$  – гурвицева, на основе второго метода Ляпунова был разработан закон адаптивного управления, гарантирующий данной системе асимптотическую устойчивость положения равновесия  $\chi_1 = 0$ . Алгоритм управления выглядит следующим образом:

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma_x \omega(\chi_1) \frac{\partial V(\chi_1)}{\partial \chi_1} g_x(\chi_1), \quad (1.42)$$

где  $\hat{\theta}$  – вектор настраиваемых параметров,  $\gamma_x > 0$ , и для функции  $V(\chi_1)$  справедливы следующие выражения:

$$c_1 |\chi_1|^2 \leq V(\chi_1) \leq c_2 |\chi_1|^2, \quad (1.43)$$

$$\dot{V}(\chi_1) = \frac{\partial V(\chi_1)}{\partial \chi_1} [f(\chi_1) + g_x(\chi_1)U_0(\chi_1)] \leq -c_3 |\chi_1|^2, \quad (1.44)$$

$$\left| \frac{\partial V(\chi_1)}{\partial \chi_1} \right| \leq c_4 |\chi_1|, \quad (1.45)$$

где  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$ ,  $c_3 > 0$ ,  $c_4 > 0$ ,  $U_0$  – непрерывно дифференцируемая функция.

Иной подход представлен в [67]. В данной статье задача решена с помощью определенной параметризации математической модели объекта управления с использованием модифицированного алгоритма высокого порядка [73], который что приводит к снижению динамической размерности замкнутой системы. Точность слежения за эталонным воздействием определяется выбором параметров замкнутой системы.

Применение алгоритма адаптации высокого порядка, предложенного изначально Морзом [120], предложено автором в работе [7] для решения задачи управления по выходу системами с неопределенностями. Алгоритм робастного управления, полученный в данной работе, обладает более простой реализацией и более низкой размерностью по сравнению с робастной модификацией [125] и нелинейной робастной модификацией [44] алгоритма адаптации высокого порядка.

В работе [77] предлагается закон управления нелинейными системами с паразитной динамикой по выходу, и утверждается, что если процессы, вызванные этой динамикой, протекают быстро, то осуществляется стабилизация замкнутой системы.

В целом, работ, посвященных управлению объектами с неизвестным порядком и относительной степенью, достаточно немного [98], [138]. Однако существует подход [68], позволяющий решать задачу стабилизации и слежения за задающим воздействием при управлении объектами с неизвестными параметрами, подверженными параметрическим возмущениям, которые могут влиять на порядок объекта управления.

## *1.4 Управление многоканальными системами*

В последнее время наблюдается рост интереса к проблемам управления многоканальными объектами. Это связано с появлением новых задач в биологии, физике, робототехнике, энергетических и телекоммуникационных сетях и т.п. При этом возникает новая проблема, связанная с управлением сетями взаимосвязанных объектов [33]. В настоящее время существует множество методов и подходов для управления многоканальными объектами. Важными задачами являются стабилизация и синхронизация подсистем, входящих в многоканальный объект. Задача синхронизации состоит в обеспечении согласования во времени локальных подсистем. Наиболее распространенным законом управления в задачах синхронизации является так называемое консенсусное управление (цель управления – сближение траекторий подсистем со временем – и называется консенсусом). В этом случае управление для каждой подсистемы синтезируется как взвешенная сумма разностей переменных состояния или выхода соседних подсистем [1], [83], [75], [113], [116], [134]. В работах [103], [133], [142] рассмотрены частные случаи, при которых подсистемы являются интеграторами, двойными интеграторами и двойными интеграторами с запаздыванием. Если измерению доступны только выходные переменные, существующие регуляторы включают использование дополнительных динамических звеньев и наблюдателей, что усложняет реализацию [91], [113], [141]. В статье [32] предложен метод синтеза статических консенсусных регуляторов, обеспечивающих синхронизацию динамических систем при неполных измерениях и управлениях в сетях идентичных линейных объектов при произвольном порядке модели подсистемы без использования наблюдателей.

Одним из средств решения вышеописанных задач является децентрализованное управление, когда для каждой подсистемы строится свой регулятор, использующий данные только текущей подсистемы и информацию о цели управления. Существуют исследования на данную тему [26], [42], [60], [88],

[137], однако возникают более сложные задачи, требующие нетривиальных решений, например, ограничения в каналах управления.

В работе [33] рассматриваются сети взаимосвязанных объектов в форме Лурье:

$$\dot{x}_i = Ax_i + Bu_i + \varphi_0(x_i) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \varphi_{ij}(x_i - x_j), \quad (1.46)$$

$$y_i = C^T x_i, \quad i = 1 \dots n, \quad (1.47)$$

где  $x_i \in R^n$  – вектор состояния  $i$ -й подсистемы,  $u_i \in R^1, y_i \in R^l$  – скалярное управление и вектор выходных сигналов  $i$ -й подсистемы, функция  $\varphi_0$  описывает нелинейность в обратной связи по состоянию, а функции  $\varphi_{ij}$  определяют перекрестные связи между подсистемами.

Выделяется ведущая подсистема, не связанная с остальными, и решается задача синтеза децентрализованного алгоритма управления и нахождения условий, при которых обеспечивается синхронизация между ведущей и остальными подсистемами.

Существуют и другие подходы к управлению многомерными объектами. Например, в статье [72] синтезируется робастная децентрализованная система управления для многосвязных объектов при наличии неизвестных перекрестных связей и параметрических и внешних возмущений в каждой локальной подсистеме. В [41] рассматривается компенсация перекрестных связей для управления многосвязными объектами управления. В работах [102], [122] используется адаптивный регулятор с эталонной моделью для каждой из локальных подсистем автономно, а затем с помощью аппарата М-матриц выводятся ограничения на величины коэффициентов в функциях взаимосвязей, при которых объединенная взаимосвязанная система остается устойчивой. В [92] предложены адаптивные регуляторы для подстройки сложных систем с неизвестными перекрестными связями к эталонной модели при некоторых ограничениях, налагаемых на взаимосвязи. Авторы работы [140] предлагают адаптивный регулятор переменной структуры, обеспечивающий сходимость к

нулю ошибки слежения даже при наличии взаимосвязей между нелинейными подсистемами, включающими запаздывание. Работа [23] посвящена вопросу компенсации нелинейных взаимосвязей между подсистемами в случае, если известны функции, описывающие данные взаимосвязи, причем в ряде подсистем относительная степень отлична от единицы.

В [24] предложен новый метод вложения систем, позволяющий синтезировать статические регуляторы, обеспечивающие инвариантность по отношению к возмущениям. В [71] предложен метод вспомогательного контура для компенсации возмущений, обобщенный затем для управления линейными [63], [64], нелинейными [65] и неминимально-фазовыми [66] многоканальными объектами. В [69] предложен алгоритм, позволяющий синтезировать простые алгоритмы компенсации возмущений. В [51] рассмотрено адаптивное управление многосвязными объектами с неминимальной реализацией эталонной модели. В [60] предложены алгоритмы управления многоканальными объектами с использованием метода скоростного градиента.

### *1.5 Алгоритм управления «последовательный компенсатор»*

В данной диссертации в основе полученного результата лежит использование адаптивного регулятора «Последовательный компенсатор», впервые полученного в [8] для линейных одномерных объектов. Далее этот подход был развит, например, в работах [14], [55], [56], [80], [81], [89], [90], [129], [130]. Приведем кратко исходный, наиболее простой случай.

Рассмотрим следующую линейную систему

$$y(t) = \frac{b(p)}{a(p)} u(t), \quad (1.48)$$

где  $p = d/dt$  обозначает оператор дифференцирования; выходная переменная  $y = y(t)$  измеряется, ее производные не поддаются измерению;  $b(p) = b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0$ , и  $a(p) = p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$  — полиномы с

неизвестными коэффициентами; число  $m \leq n-1$ ; передаточная функция  $\frac{b(p)}{a(p)}$  имеет известную относительную степень  $\rho = n - m$ ; полином  $b(p)$  – гурвицев и параметр  $b_m > 0$ .

Цель управления состоит в том, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость замкнутой системы, то есть сходимость выходной переменной к положению равновесия  $y = 0$ .

Для синтеза регулятора можно воспользоваться известным подходом к стабилизации на основе сильной обратной связи [62] для случая единичной относительной степени передаточной функции объекта управления (1.48).

Выберем управление:

$$u(t) = -\mu y(t). \quad (1.49)$$

Согласно [44], существует такое число  $\mu_0$ , что для любого числа  $\mu > \mu_0$  передаточная функция замкнутой системы  $W(p) = \frac{b(p)}{a(p) + \mu b(p)}$  строго вещественно положительна, в частности, характеристический полином  $a(p) + \mu b(p)$  замкнутой системы является гурвицевым, то есть цель управления обеспечивается.

Однако если относительная степень больше единицы, применить этот подход в приведенном варианте нельзя. Для компенсации относительной степени нужно использовать производные выходного сигнала, а они по условию задачи неизмеряемы. Поэтому вводится специальный фильтр. Выбирается управление в форме:

$$u(t) = -\mu \alpha(p) \hat{y}(t), \quad (1.50)$$

где число  $\mu$  и полином  $\alpha(p)$  таковы, что передаточная функция замкнутой системы  $W(p) = \frac{b(p)\alpha(p)}{a(p) + \mu b(p)\alpha(p)}$  строго вещественно положительна; функция

$\hat{y}(t)$  – оценка выходной переменной  $y(t)$ , вычисляемая как:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1(t) = \sigma \xi_2(t), \\ \dot{\xi}_2(t) = \sigma \xi_3(t), \\ \dots \\ \dot{\xi}_{\rho-1}(t) = \sigma(-k_1 \xi_1(t) - \dots - k_{\rho-1} \xi_{\rho-1}(t) + k_1 y(t)), \end{cases} \quad (1.51)$$

$$\hat{y}(t) = \xi_1(t), \quad (1.52)$$

где число  $\sigma > k$ , и параметры  $k_i$  определяются из условия асимптотической устойчивости системы (1.51) при нулевом входном сигнале  $y(t)$ .

Подставляя (1.50) в уравнение (1.48), получаем

$$y(t) = \frac{b(p)}{a(p)}[-\mu\alpha(p)\hat{y}(t)] = \frac{b(p)}{a(p)}[-\mu\alpha(p)y(t) + \mu\alpha(p)\varepsilon(t)], \quad (1.53)$$

где ошибка  $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ .

После несложных преобразований, модель (1.53) можно представить в виде

$$a(p)y(t) + \mu\alpha(p)b(p)y(t) = b(p)\alpha(p)[(\mu + \kappa)\varepsilon(t) - \kappa y(t)] + c(p)\omega(t),$$

и

$$y(t) = \frac{\mu b(p)\alpha(p)}{a(p) + \mu b(p)\alpha(p)} \varepsilon(t). \quad (1.54)$$

Представим модель вход-выход (1.54) в форме вход-состояние-выход

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b\varepsilon(t), \quad (1.55)$$

$$y(t) = c^T x(t) \quad (1.56)$$

где  $x(t) \in R^n$  – вектор состояния системы (1.55);  $A$ ,  $b$ ,  $c$  – матрицы перехода от модели (1.54) к (1.55), (1.56).

Так как передаточная функция  $W(p) = \frac{b(p)\alpha(p)}{a(p) + \mu b(p)\alpha(p)}$  является строго

вещественно положительной, то, согласно лемме Якубовича-Калмана, имеют место соотношения

$$A^T P + PA = -Q_1, \quad Pb = c, \quad (1.57)$$

где  $Q_1 = Q_1^T > 0$ .

Представим модель (1.51), (1.52) в форме

$$\dot{\xi}(t) = \sigma(\Gamma \xi(t) + dk_1 y(t)),$$

$$\hat{y}(t) = h^T \xi(t),$$

$$\text{где } \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \dots & -k_{\rho-1} \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \text{ и } h^T = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0].$$

Рассмотрим вектор отклонения

$$\eta(t) = hy(t) - \xi(t),$$

тогда ошибка  $\varepsilon(t)$  примет вид

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) = h^T hy(t) - h^T \xi(t) = h^T (hy(t) - \xi(t)) = h^T \eta(t).$$

Дифференцируя вектор  $\eta(t)$ , получаем

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= h\dot{y}(t) - \sigma(\Gamma(hy(t) - \eta(t)) + dk_1 y(t)) \\ &= h\dot{y}(t) + \sigma\Gamma \eta(t) - \sigma(dk_1 + \Gamma h)y(t). \end{aligned}$$

Поскольку  $dk_1 = -\Gamma h$  (в чем легко убедиться с помощью подстановки), то

$$\dot{\eta}(t) = h\dot{y}(t) + \sigma\Gamma \eta(t), \quad \varepsilon(t) = h^T \eta(t), \quad (1.58)$$

где матрица  $\Gamma$  – гурвицева, поскольку параметры  $k_i$  выбраны так, чтобы обеспечить устойчивость автономной системе (1.51), и, следовательно

$$\Gamma^T N + N\Gamma = -Q_2, \quad (1.59)$$

где  $N = N^T > 0$  и  $Q_2 = Q_2^T > 0$ .

Рассмотренные преобразования позволяют сформулировать и доказать следующее утверждение:

**Утверждение 1.1.** Рассмотрим линейную систему (1.55), (1.56), (1.58).

Пусть относительная степень известна и  $\rho = n - m \geq 1$ .

Пусть число  $\sigma$  такое, что имеет место следующее неравенство

$$-\sigma Q_2 + \delta^{-1} hh^T + Nhc^T bb^T ch^T N + hh^T + \delta^{-1} Nhc^T AA^T ch^T N \leq -Q, \quad (1.60)$$

где малое число  $\delta > 0$  такое, что

$$-Q_1 + \delta I + \delta Pbb^T P \leq -Q. \quad (1.61)$$

Тогда система (1.55), (1.56), (1.58) асимптотически устойчива.

Доказательство аналогичных утверждений для более сложных случаев приведено в главах 2 и 3 диссертации.

Полученные оценки (1.60), (1.61) предполагают наличие информации о параметрах системы. Однако, поскольку они неизвестны, можно использовать адаптивный алгоритм настройки параметров  $\mu, \sigma$ . Известно, что при  $\mu > \mu_0, \sigma > \sigma_0$ , где  $\mu_0, \sigma_0$  - нижние границы соответствующих параметров, зависящие от параметров системы, выполняется условие строгой вещественной положительности передаточной функции по ошибке и условия устойчивости (1.60), (1.61). В этом случае можно увеличивать их значения до тех пор, пока сходимость траекторий системы к положению равновесия не будет обеспечена. Адаптивный алгоритм приводится более подробно в следующих главах.

## *1.6 Выводы по главе 1*

Как было отмечено ранее, задача управления системами в условиях неопределенностей, то есть задача адаптивного управления, является одной из классических и наиболее важных в теории управления. Часто на практике параметры объекта управления и даже его порядок являются неизвестными частично или полностью, могут изменяться в широких пределах, или определенные промежуточные сигналы не поддаются измерению. Более того, на объект управления могут действовать неизвестные возмущения, и способы его парирования с использованием различных робастных алгоритмов также исследуются и находят свое применение.

Важной проблемой остается управление многоканальными системами, то есть сетями взаимосвязанных объектов, из-за появления новых вызовов в таких областях, как робототехника, телекоммуникации, биология и т.д.

Однако по-прежнему актуальна задача построения регуляторов, обладающих простотой реализации, низким динамическим порядком, и решающих при этом задачу стабилизации или слежения при управлении объектами в условиях параметрической и структурной неопределенности и воздействия

неопределенных возмущений. Развитию результатов в этой области и применению их на практике и посвящена данная диссертация.

## 2 Адаптивное управление одноканальными объектами

### 2.1 Нелинейные системы с неучтенной динамикой при известной относительной степени

#### 2.1.1 Отсутствие внешнего возмущения

##### 2.1.1.1 Постановка задачи

Рассмотрим нелинейный объект управления вида

$$\begin{cases} \dot{\chi}_1(t) = A_\chi \chi_1(t) + d_\chi(t)\varphi(y(t-h)) + b_\chi v(t), \\ y(t) = c_\chi^T \chi_1(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \mu \dot{\chi}_2(t) = F_\chi \chi_2(t) + qu(t), \\ v(t) = l^T \chi_2(t), \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $\chi_1(t) \in R^n$  – вектор переменных состояния системы (1);  $\chi_2(t) \in R^r$  – вектор переменных состояния системы (2.2);  $y(t) \in R$  – измеряемая выходная переменная объекта; функция  $v(t) \in R$  – неизмеряемая функция;  $u(t) \in R$  – сигнал управления;  $A_\chi$ ,  $F_\chi$ ,  $b_\chi$ ,  $c_\chi$ ,  $d_\chi$ ,  $q$  и  $l$  – матрицы и векторы соответствующей размерности с неизвестными коэффициентами; как и в [44], будем полагать, что  $-F_\chi l = q$ ; уравнение (2.2) представляет асимптотически устойчивую динамику (т.е. матрица  $F_\chi$  гурвицева), которая не учитывается при синтезе закона управления; число  $\mu > 0$  – определяет быстродействие системы (2.2);  $d_\chi(t)$  – вектор ограниченных нестационарных параметров;  $\omega(t) = \varphi(y(t-h))$  – гладкая нелинейная функция, удовлетворяющая условиям секторных ограничений вида

$$|\omega(t)| = |\varphi(y(t-h))| \leq C |y(t-h)|, \quad (2.3)$$

где числа  $C > 0$  и  $h > 0$  неизвестны.

Систему (2.1) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\chi}_1(t) = A_\chi \chi_1(t) + \sum_{i=1}^n D_i d_i(t)\varphi(y(t-h)) + b_\chi v(t), \\ y(t) = c_\chi^T \chi_1(t), \end{cases} \quad (2.4)$$

где  $D_1 = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ ;  $D_2 = [0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ ;  $D_n = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1]^T$ ;  $d_i(t)$  – компоненты вектора нестационарных параметров  $d_x(t) = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ \dots \ d_n]^T$ .

Структура объекта управления представлена на рисунке 2.1.

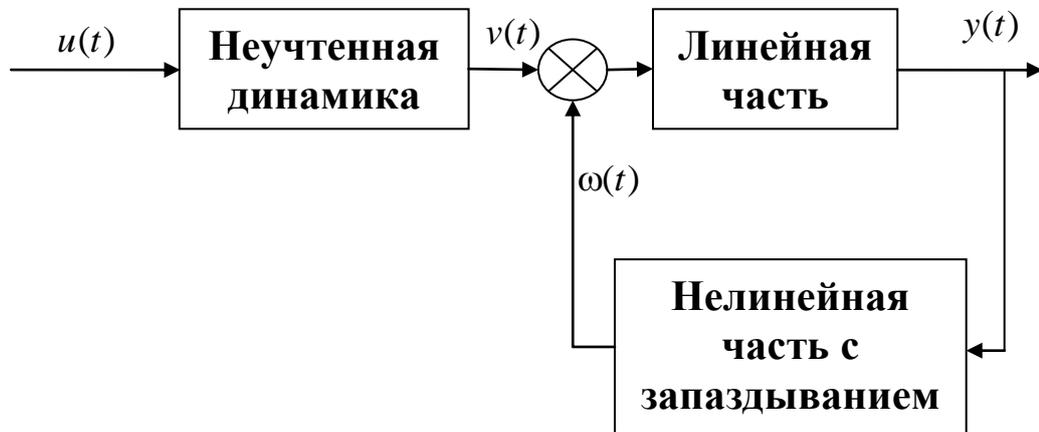


Рисунок 2.1 – Структура объекта управления (2.1), (2.2)

Перепишем систему (2.1), (2.2) в форме вход-выход

$$a(p)y(t) = b(p)v(t) + \sum_{i=1}^n g_i(p)d_i(t)\varphi(y(t-h)), \quad (2.5)$$

$$d(p)v(t) = c(p)u(t), \quad (2.6)$$

где  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования; выходная переменная  $y = y(t)$  измеряется, но ее производные не поддаются измерению;

$$b(p) = b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0, \quad a(p) = p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0,$$

$$e(p) = e_k p^k + \dots + e_1 p + e_0, \quad d(p) = d_r p^r + d_{r-1} p^{r-1} + \dots + d_1 p + d_0, \quad c(p) = d(0) \quad -$$

полиномы с неизвестными коэффициентами;  $m \leq n-1$ ; относительная степень

передаточной функции  $\frac{b(s)}{a(s)}$  известна и равна  $\rho$ ;  $s$  – комплексная переменная;

полином  $b(p)$  гурвицев и коэффициент  $b_m > 0$ ;  $\infty > h > 0$  – неизвестное

запаздывание, полиномы  $g_i(p)$  определяются как

$$\frac{g_i(p)}{a(p)} = c_\chi^T (pI - A_\chi)^{-1} D_i. \quad (2.7)$$

Необходимо синтезировать управляющее воздействие  $u(t)$ , которое гарантировало бы экспоненциальную устойчивость замкнутой системе управления.

### 2.1.1.2 Синтез алгоритма управления и доказательство его работоспособности

Выберем закон управления следующим образом ([7], [8], [9], [12], [14], [80], [81], [90], [129]):

$$u(t) = -\tilde{k}\alpha(p)\xi_1(t), \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1(t) = \sigma\xi_2(t), \\ \dot{\xi}_2(t) = \sigma\xi_3(t), \\ \dots \\ \dot{\xi}_{\rho-1}(t) = \sigma(-k_1\xi_1(t) - k_2\xi_2(t) - \dots - k_{\rho-1}\xi_{\rho-1}(t) + k_1y(t)), \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\tilde{k} = k + \gamma, \quad (2.10)$$

где число  $k > 0$  и полином  $\alpha(p)$  степени  $\rho - 1$  выбираются так, чтобы передаточная функция  $H(s) = \frac{\alpha(s)b(s)}{a(s) + k\alpha(s)b(s)}$  была строго вещественно положительной, положительный параметр  $\gamma$  служит для компенсации нелинейности  $\varphi(y(t-h))$ , число  $\sigma > k$ , а коэффициенты  $k_i$  определяются из условия асимптотической устойчивости системы (2.9) при нулевом входном сигнале  $y(t)$ .

Как было доказано в [7], [8], [9], [12], технически реализуемый алгоритм (2.8)-(2.10) обеспечивает асимптотическую сходимость к нулю переменной  $y(t)$  в случае отсутствия возмущения. Однако в данном разделе рассматриваются аналитические условия применимости закона управления (2.8)-(2.10) для обеспечения экспоненциальной устойчивости объекта (2.1), (2.2) при наличии в его описании нестационарных параметров. Таким образом, требуется найти

ограничения на числа  $\tilde{k}$  и  $\sigma$ , при которых для системы (2.5), (2.6), (2.8)-(2.10) выполнено целевое условие:

$$|y(t)| \leq \delta e^{-\beta t} |y(0)|. \quad (2.11)$$

Проведем ряд преобразований. Подставляя (2.8) в (2.6), а затем в уравнение (2.5), получаем:

$$y(t) = \frac{\alpha(p)b(p)}{a(p) + k\alpha(p)b(p)} (\tilde{k}\varepsilon_1(t) - \gamma y(t)) + \frac{\sum_{i=1}^n g_i(p)d_i(t)}{a(p) + k\alpha(p)b(p)} \varphi(y(t-h)), \quad (2.12)$$

где  $\varepsilon_1(t) = y(t) - \hat{y}(t)$  и  $\hat{y}(t) = \frac{c(p)}{d(p)} \xi_1(t)$ .

Теперь представим модель вход-выход (2.2) в виде следующей модели в пространстве состояний:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(\tilde{k}\varepsilon_1(t) - \gamma y(t)) + \sum_{i=1}^n \chi_i \theta_i(t) \varphi(y(t-h)), \quad (2.13)$$

$$y(t) = c^T x(t), \quad (2.14)$$

где  $x \in R^n$  – вектор состояния модели (2.13);  $A$ ,  $b$ ,  $\chi_i$  и  $c$  – матрицы перехода от модели вход-выход к модели в пространстве состояний, причем в силу известной леммы Якубовича-Калмана (см., например, [44]) существует симметрическая положительно определенная матрица  $P$ , удовлетворяющая следующим матричным уравнениям:

$$A^T P + PA = -Q_1, \quad Pb = c, \quad (2.15)$$

где  $Q_1 = Q_1^T$  – некоторая положительно определенная матрица.

Перепишем (2.2) и (2.9) в следующей форме:

$$\dot{\xi}(t) = \sigma(\Gamma \xi(t) + dk_1 y(t)), \quad \xi_1(t) = \bar{h}^T \xi(t), \quad (2.16)$$

$$\mu \dot{z}(t) = Fz(t) + q\xi_1(t), \quad \hat{y}(t) = l^T z(t), \quad (2.17)$$

где  $\xi \in R^{\rho-1}$  и  $z \in R^r$  – векторы переменных состояния моделей (2.16) и (2.17)

соответственно; матрица  $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \dots & -k_{\rho-1} \end{bmatrix}$  – гурвицева в силу

расчета коэффициентов  $k_i$  модели (2.9),  $d = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1]^T$ ,

$\bar{h} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ ;  $F$ ,  $q$  и  $l$  – матрицы перехода от модели вход-выход к модели в пространстве состояний, причем, следуя [44], будем допускать, что  $-Fl = q$ .

Введем в рассмотрение векторы отклонений

$$\eta_1(t) = ly(t) - z(t), \quad (2.18)$$

$$\eta_2(t) = \bar{h}y(t) - \xi(t). \quad (2.19)$$

Вычисляя производные векторов отклонений (2.18) и (2.19), с учетом того, что  $dk_1 = -\Gamma\bar{h}$  и  $-Fl = q$ , можно записать

$$\dot{\eta}_1(t) = l\dot{y}(t) + \mu^{-1}F\eta_1(t) + \mu^{-1}q\varepsilon_2(t), \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_1(t) = y(t) - \hat{y}(t) = l^T\eta_1(t), \quad (2.21)$$

$$\dot{\eta}_2(t) = h\dot{y}(t) + \sigma\Gamma\eta_2(t), \quad (2.22)$$

$$\varepsilon_2(t) = y(t) - \xi_1(t) = \bar{h}^T\eta_2(t). \quad (2.23)$$

Таким образом, имеем систему дифференциальных уравнений (2.16), (2.17), (2.20)-(2.23).

Положительно определенные матрицы  $R = R^T$  и  $N = N^T$  удовлетворяют уравнениям Ляпунова:

$$F^TR + RF = -Q_2, \quad (2.24)$$

$$\Gamma^TN + N\Gamma = -Q_3, \quad (2.25)$$

где  $Q_2 = Q_2^T$  и  $Q_3 = Q_3^T$  – положительно определены.

Условия работоспособности закона управления (2.8)-(2.10) для стабилизации системы (2.13), (2.14), (2.20)-(2.23) приведены в следующем утверждении.

**Утверждение 2.1.** Пусть для стабилизации системы (2.1), (2.2) используется закон управления (2.8)-(2.10). Пусть система удовлетворяет допущениям об известной относительной степени, минимальной фазовости и ограниченности нелинейной функции согласно неравенству (2.3).

Пусть число  $k$  обеспечивает строгую вещественную положительность передаточной функции  $H(s) = \frac{\alpha(s)b(s)}{a(s) + k\alpha(s)b(s)}$ . Тогда для любых чисел  $0 < \mu < \infty$ ,

$0 < \gamma < \infty$ ,  $0 < \sigma < \infty$  и  $0 < \delta < 0.5$ , удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned} & -\sigma Q_3 + \mu^{-2} \bar{h} \bar{h}^T + \delta^{-1} N \bar{h} \bar{h}^T N + \delta^{-1} \tilde{k}^2 N \bar{h} c^T b b^T c \bar{h}^T N + C^2 \gamma N \bar{h} c^T \bar{\chi}_i^T \bar{\chi}_i c \bar{h}^T N \\ & + 2\gamma N \bar{h} c^T b b^T c \bar{h}^T N \leq -Q < 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$-Q_1 + C^2 \delta P \bar{\chi}_i^T \bar{\chi}_i P + \delta P b b^T P + 2\delta A^T c^T c A \leq -Q < 0, \quad (2.27)$$

$$\gamma \geq e^h (\gamma^{-1} + 2\delta^{-1}) \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} & -\mu^{-1} Q_2 + (\delta^{-1} \tilde{k}^2 + \tilde{k} + \delta) l l^T + R q q^T R + \delta^{-1} R l l^T R + (\tilde{k} + 2\gamma) R l c^T b b^T c l^T R \\ & + \delta C^2 R l c^T \bar{\chi}_i^T \bar{\chi}_i c l^T R \leq -Q < 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где  $\|\bar{\chi}_i\| \geq \left\| \sum_{i=1}^n \chi_i \theta_i(t) \right\|$ , справедливо целевое условие (2.11), то есть система (2.1),

(2.2), (2.8)-(2.10) экспоненциально устойчива в смысле нормы:

$$N(t) = \left( \|x(t)\|^2 + \|\eta_1(t)\|^2 + \|\eta_2(t)\|^2 + \int_{t-h}^t e^{-t+\vartheta} y^2(\vartheta) d\vartheta \right)^{1/2}. \quad (2.30)$$

**Доказательство.** Рассмотрим функционал Ляпунова-Крассовского в следующей форме:

$$V(t) = x^T(t) P x(t) + \eta_1^T(t) R \eta_1(t) + \eta_2^T(t) N \eta_2(t) + \gamma \int_{t-h}^t e^{-t+\vartheta} y^2(\vartheta) d\vartheta. \quad (2.31)$$

Дифференцируя (2.31) с учетом выражений (2.13)-(2.25), получаем:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) = & x^T(t)(A^T P + PA)x(t) + \mu^{-1}\eta_1^T(t)(F^T R + RF)\eta_1(t) + \eta_2^T(t)\sigma(\Gamma^T N + N\Gamma)\eta_2(t) \\
& + 2\tilde{k}x^T(t)Pbl^T\eta_1(t) + 2\tilde{k}\eta_1^T(t)Rlc^T bl^T\eta_1(t) + 2\tilde{k}\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T bl^T\eta_1(t) + 2\mu^{-1}\eta_1^T(t)Rq\bar{h}^T\eta_2(t) \\
& - 2\gamma y^2(t) + 2x^T(t)P\sum_{i=1}^n\chi_i\theta_i(t)\omega(t) + 2\eta_1^T(t)Rlc^T\sum_{i=1}^n\chi_i\theta_i(t)\omega(t) + 2\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T\sum_{i=1}^n\chi_i\theta_i(t)\omega(t) \\
& + 2\eta_1^T(t)Rlc^T Ax(t) + 2\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T Ax(t) - 2\gamma\eta_1^T(t)Rlc^T bb^T Px(t) - 2\gamma\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T bb^T Px(t) \\
& + \gamma y^2(t) - \gamma e^{-h}y^2(t-h) - \gamma \int_{t-h}^t e^{-t+\vartheta} y^2(\vartheta) d\vartheta. \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Принимая во внимание следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
2x^T(t)P\sum_{i=1}^n\chi_i\theta_i(t)\omega(t) & \leq \delta C^2 \left( \sum_{i=1}^n\chi_i\theta_i(t) \right)^2 (x^T(t)P)^2 \\
+\delta^{-1}C^{-2}(\omega(t))^2 & \leq C^2\delta(x^T(t)P\bar{\chi}_i)^2 + \delta^{-1}C^{-2}(\omega(t))^2 \leq C^2\delta(x^T(t)P\bar{\chi}_i)^2 + \delta^{-1}y^2(t-h), \\
2\tilde{k}x^T(t)Pbl^T\eta_1(t) & \leq \delta(x^T(t)Pb)^2 + \delta^{-1}\tilde{k}^2(l^T\eta_1(t))^2, \\
2\mu^{-1}\eta_1^T(t)Rq\bar{h}^T\eta_2(t) & \leq (\eta_1^T(t)Rq)^2 + \mu^{-2}(\bar{h}^T\eta_2(t))^2, \\
2\eta_1^T(t)Rlc^T Ax(t) & \leq \delta^{-1}(\eta_1^T(t)Rl)^2 + \delta(c^T Ax(t))^2, \\
2\tilde{k}\eta_1^T(t)Rlc^T bl^T\eta_1(t) & \leq \tilde{k}(\eta_1^T(t)Rlc^T b)^2 + \tilde{k}(l^T\eta_1(t))^2, \\
2\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T Ax(t) & \leq \delta(c^T Ax(t))^2 + \delta^{-1}(\eta_2^T(t)N\bar{h})^2, \\
2\tilde{k}\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T bl^T\eta_1(t) & \leq \delta^{-1}\tilde{k}^2(\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T b)^2 + \delta(l^T\eta_1(t))^2, \\
2\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T\sum_{i=1}^n\chi_i\theta_i(t)\omega(t) & \leq C^2\gamma \left( \sum_{i=1}^n\chi_i\theta_i(t) \right)^2 (\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T)^2 + \gamma^{-1}C^{-2}(\omega(t))^2 \leq \\
C^2\gamma(\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T\bar{\chi}_i)^2 + \gamma^{-1}C^{-2}(\omega(t))^2 & \leq C^2\gamma(\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T\bar{\chi}_i)^2 + \gamma^{-1}y^2(t-h), \\
-2\gamma\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T by(t) & \leq 2\gamma(\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T b)^2 + \frac{1}{2}\gamma y^2(t), \\
2\eta_1^T(t)Rlc^T\sum_{i=1}^n\chi_i\theta_i(t)\omega(t) & \leq \delta C^2 \left( \sum_{i=1}^n\chi_i\theta_i(t) \right)^2 (\eta_1^T(t)Rlc^T)^2 + \delta^{-1}C^{-2}(\omega(t))^2 \leq \\
\delta C^2(\eta_1^T(t)Rlc^T\bar{\chi}_i)^2 + \delta^{-1}C^{-2}(\omega(t))^2 & \leq \delta C^2(\eta_1^T(t)Rlc^T\bar{\chi}_i)^2 + \delta^{-1}y^2(t-h), \\
-2\gamma\eta_1^T(t)Rlc^T by(t) & \leq 2\gamma(\eta_1^T(t)Rlc^T b)^2 + \frac{1}{2}\gamma y^2(t),
\end{aligned}$$

где  $\|\bar{\chi}_i\| \geq \left\| \sum_{i=1}^n \chi_i \theta_i(t) \right\|$ , имеем:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq -x^T(t)Q_1x(t) - \mu^{-1}\eta_1^T(t)Q_2\eta_1(t) - \sigma\eta_2^T(t)Q_3\eta_2(t) \\
&+ x^T(t) \left[ C^2\delta P\bar{\chi}_i^T\bar{\chi}_iP + \delta Pbb^TP + 2\delta c^TAA^Tc \right] x(t) + \eta_1^T(t) \left[ (\delta^{-1}\tilde{k}^2 + \tilde{k} + \delta)ll^T + Rqq^TR \right. \\
&+ \delta^{-1}Rll^TR + (\tilde{k} + 2\gamma)Rlc^Tbb^Tcl^TR + \delta C^2Rlc^T\bar{\chi}_i^T\bar{\chi}_icl^TR \left. \right] \eta_1(t) \\
&+ \eta_2^T(t) \left[ \mu^{-2}\bar{h}\bar{h}^T + \delta^{-1}N\bar{h}\bar{h}^TN + \delta^{-1}\tilde{k}^2N\bar{h}c^Tbb^Tc\bar{h}^TN + C^2\gamma N\bar{h}c^T\bar{\chi}_i^T\bar{\chi}_ic\bar{h}^TN \right. \\
&+ \left. 2\gamma N\bar{h}c^Tbb^Tc\bar{h}^TN \right] \eta_2(t) - 2\gamma y^2(t) + \gamma y^2(t) + (\gamma^{-1} + 2\delta^{-1} - \gamma e^{-h})y^2(t-h) + \gamma y^2(t) \\
&- \gamma \int_{t-h}^t e^{-t+\vartheta} y^2(\vartheta) d\vartheta. \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Если условия (49) – (52) выполнены, получим:

$$\dot{V}(t) \leq -x^T(t)Qx(t) - \eta_1^T(t)Q\eta_1(t) - \eta_2^T(t)Q\eta_2(t) - \gamma \int_{t-h}^t e^{-t+\vartheta} y^2(\vartheta) d\vartheta. \tag{2.34}$$

Покажем теперь экспоненциальную устойчивость системы. Переходя к неравенству для собственных чисел, из (2.34) получим:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq -\lambda_{\min}\{Q\}\|x(t)\|^2 - \lambda_{\min}\{Q\}\|\eta_1(t)\|^2 - \lambda_{\min}\{Q\}\|\eta_2(t)\|^2 \\
&- \gamma \int_{t-h}^t e^{-t+\vartheta} y^2(\vartheta) d\vartheta \leq -\nu_1 \left( \|x(t)\|^2 + \|\eta_1(t)\|^2 + \|\eta_2(t)\|^2 + \int_{t-h}^t e^{-t+\vartheta} y^2(\vartheta) d\vartheta \right), \tag{2.35}
\end{aligned}$$

где  $\nu_1 = \min(\lambda_{\min}\{Q\}, \gamma)$  и  $\lambda_{\min}\{Q\}$  - минимальное собственное число матрицы Q. Из (2.31) получаем:

$$V(t) \leq \nu_2 \left( \|x(t)\|^2 + \|\eta_1(t)\|^2 + \|\eta_2(t)\|^2 + \int_{t-h}^t e^{-t+\vartheta} y^2(\vartheta) d\vartheta \right), \tag{2.36}$$

где  $\nu_2 = \max(\lambda_{\max}\{P\}, \lambda_{\max}\{F\}, \lambda_{\max}\{N\}, \gamma)$ . Подстановка (2.36) в (2.37) дает выражение:

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{\nu_1}{\nu_2} V(t) \tag{2.37}$$

Из выражения (2.37) видно, что при отсутствии возмущения рассматриваемая система экспоненциально устойчива, что и требовалось доказать.

## 2.1.2 Наличие внешнего возмущения

### 2.1.2.1 Постановка задачи

Рассмотрим нелинейный объект управления вида

$$\begin{cases} \dot{\chi}_1(t) = A_\chi \chi_1(t) + d_\chi(t)\varphi(y(t-h)) + b_\chi v(t) + e_\chi f(t), \\ y(t) = c_\chi^T \chi_1(t), \end{cases} \quad (2.38)$$

$$\begin{cases} \mu \dot{\chi}_2(t) = F_\chi \chi_2(t) + qu(t), \\ v(t) = l^T \chi_2(t), \end{cases} \quad (2.39)$$

где  $\chi_1(t) \in R^n$  – вектор переменных состояния системы (2.38);  $\chi_2(t) \in R^r$  – вектор переменных состояния системы (2.39);  $y(t) \in R$  – измеряемая выходная переменная объекта; функция  $v(t) \in R$  – не измеряется;  $u(t) \in R$  – сигнал управления;  $A_\chi$ ,  $F_\chi$ ,  $b_\chi$ ,  $c_\chi$ ,  $d_\chi$ ,  $e_\chi$ ,  $q$  и  $l$  – матрицы и векторы соответствующей размерности с неизвестными коэффициентами; как и в [44], будем полагать, что  $-F_\chi l = q$ ; уравнение (2.39) представляет асимптотически устойчивую динамику (т.е. матрица  $F_\chi$  гурвицева), которая не учитывается при синтезе закона управления; число  $\mu > 0$  – определяет быстродействие системы (2.39);  $f(t)$  – ограниченное по амплитуде возмущающее воздействие;  $d_\chi(t)$  – вектор ограниченных нестационарных параметров;  $\omega(t) = \varphi(y(t-h))$  – гладкая нелинейная функция, удовлетворяющая условиям секторных ограничений вида (2.3).

Структура объекта управления (2.38), (2.39) представлена на рисунке 2.2.

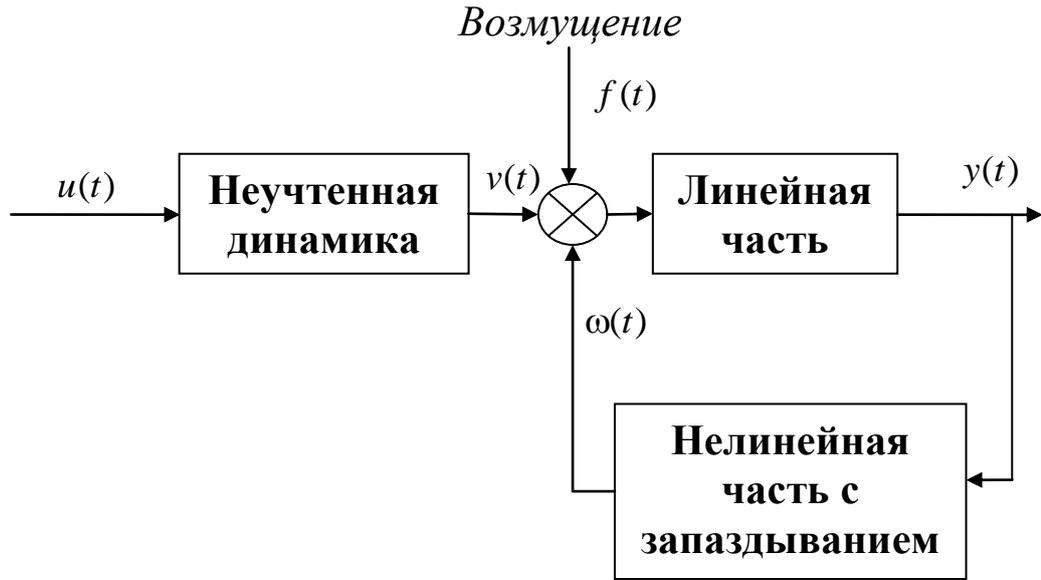


Рисунок 2.2 – Структура объекта управления (2.38), (2.39)

Систему (2.38) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\chi}_1(t) = A_\chi \chi_1(t) + \sum_{i=1}^n D_i d_i(t) \varphi(y(t-h)) + b_\chi v(t) + e_\chi f(t), \\ y(t) = c_\chi^\top \chi_1(t), \end{cases} \quad (2.40)$$

где  $D_1 = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ ;  $D_2 = [0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ ;  $D_n = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1]^T$ ;  $d_i(t)$  - компоненты вектора нестационарных параметров  $d_\chi(t) = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ \dots \ d_n]^T$ .

Перепишем систему (2.38), (2.39) в форме вход-выход

$$a(p)y(t) = b(p)v(t) + e(p)f(t) + \sum_{i=1}^n g_i(p)d_i(t)\varphi(y(t-h)), \quad (2.41)$$

$$d(p)v(t) = c(p)u(t), \quad (2.42)$$

где  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования; выходная переменная  $y = y(t)$  измеряется, но ее производные не поддаются измерению;

$$b(p) = b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0, \quad a(p) = p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0,$$

$$e(p) = e_\kappa p^\kappa + \dots + e_1 p + e_0, \quad d(p) = d_r p^r + d_{r-1} p^{r-1} + \dots + d_1 p + d_0, \quad c(p) = d(0) \quad -$$

полиномы с неизвестными коэффициентами;  $m \leq n-1$ ; относительная степень

передаточной функции  $\frac{b(s)}{a(s)}$  известна и равна  $\rho$ ;  $s$  – комплексная переменная; полином  $b(p)$  гурвицев и коэффициент  $b_m > 0$ ;  $\infty > h > 0$  – неизвестное запаздывание, полиномы  $g_i(p)$  определяются как  $\frac{g_i(p)}{a(p)} = c_\chi^T (pI - A_\chi)^{-1} D_i$ .

Целью данного раздела является поиск аналитических условий, выполнение которых гарантирует устойчивость системе управления (2.38), (2.39) с регулятором типа «последовательный компенсатор». Иначе говоря, необходимо найти условия, при которых управляющее воздействие, формируемое данным регулятором, сводит выходную переменную (или ошибку слежения в задаче слежения) в сколь угодно малую окрестность положения равновесия за конечное время, то есть обеспечить выполнение неравенства:

$$|y(t)| \leq \delta_0, \quad \forall t > t_1, \quad (2.43)$$

где  $\delta_0$  задается разработчиком конкретной системы управления.

### 2.1.2.2 Синтез алгоритма управления и доказательство его работоспособности

Выберем закон управления (2.8)-(2.10), где число  $k > 0$  и полином  $\alpha(p)$  степени  $\rho - 1$  выбираются так, чтобы передаточная функция  $H(s) = \frac{\alpha(s)b(s)}{a(s) + k\alpha(s)b(s)}$  была строго вещественно положительной, положительный параметр  $\gamma$  служит для компенсации нелинейности  $\varphi(y(t-h))$ , число  $\sigma > k$ , а коэффициенты  $k_i$  определяются условием асимптотической устойчивости системы (2.9) при нулевом входном сигнале  $y(t)$ .

Как было доказано в [7], [8], [9], [12], технически реализуемый алгоритм (2.8)-(2.10) обеспечивает асимптотическую сходимость в заданную окрестность выходной переменной  $y(t)$ . Однако в данном разделе рассматриваются аналитические условия применимости закона управления (2.8)-(2.10) для обеспечения ограниченности всех траекторий системы мажорирующей

экспонентой при наличии в его описании нестационарных параметров. Таким образом, требуется найти ограничения на числа  $\tilde{k}$  и  $\sigma$ , при которых для системы (2.41), (2.42), (2.8)-(2.10) выполнено целевое условие (2.43), то есть экспоненциальную сходимость выходной переменной в заданную окрестность за некоторое конечное время  $t_1 \leq t < \infty$ , где  $\delta_0$  задается разработчиком.

Проведем ряд преобразований. Подставляя (2.8) в (2.41), а затем в уравнение (2.40), получаем:

$$y(t) = \frac{\alpha(p)b(p)}{a(p) + k\alpha(p)b(p)} ((k + \gamma)\varepsilon_1(t) - \gamma y(t)) + \frac{e(p)}{a(p) + k\alpha(p)b(p)} f(t) + \frac{\sum_{i=1}^n g_i(p)d_i(t)}{a(p) + k\alpha(p)b(p)} \varphi(y(t-h)), \quad (2.44)$$

где  $\varepsilon_1(t) = y(t) - \hat{y}(t)$  и  $\hat{y}(t) = \frac{c(p)}{d(p)} \xi_1(t)$ .

Теперь представим модель вход-выход (2.44) в виде следующей модели в пространстве состояний:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b((k + \gamma)\varepsilon_1(t) - \gamma y(t)) + \beta f(t) + \sum_{i=1}^n \chi_i \theta_i(t) \varphi(y(t-h)), \quad (2.45)$$

$$y(t) = c^T x(t), \quad (2.46)$$

где  $x \in R^n$  – вектор состояния модели (2.45);  $A$ ,  $b$ ,  $\beta$ ,  $\chi_i$  и  $c$  – матрицы перехода от модели вход-выход к модели в пространстве состояний, причем в силу известной леммы Якубовича-Калмана (см., например, [44]) можно указать симметрическую положительно определенную матрицу  $P$ , удовлетворяющую двум следующим матричным уравнениям:

$$A^T P + PA = -Q_1, \quad Pb = c, \quad (2.47)$$

где  $Q_1 = Q_1^T$  – некоторая положительно определенная матрица.

Перепишем (2.9) и (2.39) в следующей форме

$$\dot{\xi}(t) = \sigma(\Gamma \xi(t) + dk_1 y(t)), \quad \xi_1(t) = \bar{h}^T \xi(t), \quad (2.48)$$

$$\mu \dot{z}(t) = Fz(t) + q\xi_1(t), \quad \hat{y}(t) = l^T z(t), \quad (2.49)$$

где  $\xi \in R^{\rho-1}$  и  $z \in R^r$  – векторы переменных состояния моделей (2.48) и (2.49)

соответственно; матрица  $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \dots & -k_{\rho-1} \end{bmatrix}$  – гурвицева в силу

расчета коэффициентов  $k_i$  модели (2.9),  $d = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1]^T$ ,

$\bar{h} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ ;  $F$ ,  $q$  и  $l$  – матрицы перехода от модели вход-выход к модели в пространстве состояний, причем, следуя [44], будем допускать, что  $-Fl = q$ .

Введем в рассмотрение векторы отклонений

$$\eta_1(t) = ly(t) - z(t), \quad (2.50)$$

$$\eta_2(t) = \bar{h}y(t) - \xi(t). \quad (2.51)$$

Вычисляя производные векторов отклонений (2.50) и (2.51), с учетом того, что  $dk_1 = -\Gamma\bar{h}$  и  $-Fl = q$ , можно записать

$$\dot{\eta}_1(t) = l\dot{y}(t) + \mu^{-1}F\eta_1(t) + \mu^{-1}q\varepsilon_2(t), \quad (2.52)$$

$$\varepsilon_1(t) = y(t) - \hat{y}(t) = l^T\eta_1(t), \quad (2.53)$$

$$\dot{\eta}_2(t) = h\dot{y}(t) + \sigma\Gamma\eta_2(t), \quad (2.54)$$

$$\varepsilon_2(t) = y(t) - \xi_1(t) = \bar{h}^T\eta_2(t). \quad (2.55)$$

Таким образом, имеем систему дифференциальных уравнений (2.45), (2.46), (2.52)-(2.55).

Положительно определенные матрицы  $R = R^T$  и  $N = N^T$  удовлетворяют уравнениям Ляпунова:

$$F^T R + RF = -Q_2, \quad (2.56)$$

$$\Gamma^T N + N\Gamma = -Q_3, \quad (2.57)$$

где  $Q_2 = Q_2^T$  и  $Q_3 = Q_3^T$  – положительно определены.

Условия работоспособности закона управления (2.8)-(2.10) для стабилизации системы (2.45), (2.46), (2.52)-(2.55) приведены в следующем утверждении.

**Утверждение 2.2.** Пусть для стабилизации системы (2.38), (2.39) используется закон управления (2.8)-(2.10). Пусть система удовлетворяет допущениям об известной относительной степени, минимальной фазовости и ограниченности нелинейной функции согласно неравенству (2.3).

Пусть число  $k$  обеспечивает строгую вещественную положительность передаточной функции  $H(s) = \frac{\alpha(s)b(s)}{a(s) + k\alpha(s)b(s)}$ . Тогда для любых чисел  $0 < \mu < \infty$ ,  $0 < \gamma < \infty$ ,  $0 < \sigma < \infty$  и  $0 < \delta < 0.5$ , удовлетворяющих условиям:

$$-\sigma Q_3 + \mu^{-2} \bar{h} \bar{h}^T + \delta^{-1} N \bar{h} \bar{h}^T N + \delta^{-1} \tilde{k}^2 N \bar{h} c^T b b^T c \bar{h}^T N + C^2 \gamma N \bar{h} c^T \bar{\chi}_i^T \bar{\chi}_i c \bar{h}^T N + \gamma N \beta^T c \bar{h} \bar{h}^T c^T \beta N + 2\gamma N \bar{h} c^T b b^T c \bar{h}^T N \leq -Q < 0, \quad (2.58)$$

$$-Q_1 + C^2 \delta P \bar{\chi}_i^T \bar{\chi}_i P + \delta P b b^T P + \gamma \delta P \beta \beta^T P + 2\delta A c^T c A^T \leq -Q < 0, \quad (2.59)$$

$$\gamma \geq e^h (\gamma^{-1} + 2\delta^{-1}) \quad (2.60)$$

$$-\mu^{-1} Q_2 + (\delta^{-1} \tilde{k}^2 + \tilde{k} + \delta) l l^T + R q q^T R + \delta^{-1} R l l^T R + (\tilde{k} + 2\gamma) R l c^T b b^T c l^T R + \gamma R \beta^T c l l^T c^T \beta R + \delta C^2 R l c^T \bar{\chi}_i^T \bar{\chi}_i c l^T R \leq -Q < 0, \quad (2.61)$$

где  $\|\bar{\chi}_i\| \geq \left\| \sum_{i=1}^n \chi_i \theta_i(t) \right\|$ , выполнено целевое условие (2.43). Все траектории системы

ограничены и могут быть сведены в любую сколь угодно малую окрестность положения равновесия. Более того, траектории системы ограничены некоторой экспонентой, т.е. существуют числа  $\varpi_1$ ,  $\varpi_2$ ,  $\tau_1$ , такие, что:

$$N(t) = \left( \|x(t)\|^2 + \|\eta_1(t)\|^2 + \|\eta_2(t)\|^2 + \int_{t-h}^t e^{-t+\vartheta} y^2(\vartheta) d\vartheta \right)^{1/2} \leq \leq \varpi_1 e^{-\varpi_2 t} N(0) + \tau_1 \sup_{s \in (0,t)} f(s). \quad (2.62)$$

**Доказательство.** Рассмотрим функционал Ляпунова-Крассовского в следующей форме:

$$V(t) = x^T(t)Px(t) + \eta_1^T(t)R\eta_1(t) + \eta_2^T(t)N\eta_2(t) + \gamma \int_{t-h}^t e^{-t+\vartheta} y^2(\vartheta) d\vartheta. \quad (2.63)$$

Дифференцируя (2.63) с учетом выражений (2.45)-(2.55), получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & x^T(t)(A^T P + PA)x(t) + \mu^{-1}\eta_1^T(t)(F^T R + RF)\eta_1(t) + \eta_2^T(t)\sigma(\Gamma^T N + N\Gamma)\eta_2(t) \\ & + 2\tilde{k}x^T(t)Pbl^T\eta_1(t) + 2\tilde{k}\eta_1^T(t)Rblc^T l^T\eta_1(t) + 2\tilde{k}\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T bl^T\eta_1(t) + 2\mu^{-1}\eta_1^T(t)Rq\bar{h}^T\eta_2(t) \\ & - 2\gamma y^2(t) + 2x^T(t)P \sum_{i=1}^n \chi_i \theta_i(t) \omega(t) + 2\eta_1^T(t)Rlc^T \sum_{i=1}^n \chi_i \theta_i(t) \omega(t) + 2x^T(t)P\beta f(t) \\ & + 2\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T \sum_{i=1}^n \chi_i \theta_i(t) \omega(t) + 2\eta_1^T(t)Rlc^T Ax(t) + 2\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T Ax(t) \\ & - 2\gamma\eta_1^T(t)Rlc^T bb^T Px(t) + 2\bar{h}^T c^T \beta f(t) N\eta_2(t) + 2l^T c^T \beta f(t) R\eta_1(t) \\ & - 2\gamma\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T bb^T Px(t) + \gamma y^2(t) - \gamma e^{-h} y^2(t-h) - \gamma \int_{t-h}^t e^{-t+\vartheta} y^2(\vartheta) d\vartheta. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Принимая во внимание следующие неравенства:

$$\begin{aligned} 2x^T(t)P \sum_{i=1}^n \chi_i \theta_i(t) \omega(t) & \leq \delta C^2 \left( \sum_{i=1}^n \chi_i \theta_i(t) \right)^2 (x^T(t)P)^2 \\ + \delta^{-1} C^{-2} (\omega(t))^2 & \leq C^2 \delta (x^T(t)P\bar{\chi}_i)^2 + \delta^{-1} C^{-2} (\omega(t))^2 \leq C^2 \delta (x^T(t)P\bar{\chi}_i)^2 + \delta^{-1} y^2(t-h), \\ 2\tilde{k}x^T(t)Pbl^T\eta_1(t) & \leq \delta (x^T(t)Pb)^2 + \delta^{-1} \tilde{k}^2 (l^T\eta_1(t))^2, \\ 2\mu^{-1}\eta_1^T(t)Rq\bar{h}^T\eta_2(t) & \leq (\eta_1^T(t)Rq)^2 + \mu^{-2} (\bar{h}^T\eta_2(t))^2, \\ 2\eta_1^T(t)Rlc^T Ax(t) & \leq \delta^{-1} (\eta_1^T(t)Rl)^2 + \delta (c^T Ax(t))^2, \\ 2\tilde{k}\eta_1^T(t)Rlc^T bl^T\eta_1(t) & \leq \tilde{k} (\eta_1^T(t)Rlc^T b)^2 + \tilde{k} (l^T\eta_1(t))^2, \\ 2\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T Ax(t) & \leq \delta (c^T Ax(t))^2 + \delta^{-1} (\eta_2^T(t)N\bar{h})^2, \\ 2\tilde{k}\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T bl^T\eta_1(t) & \leq \delta^{-1} \tilde{k}^2 (\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T b)^2 + \delta (l^T\eta_1(t))^2, \\ 2\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T \sum_{i=1}^n \chi_i \theta_i(t) \omega(t) & \leq C^2 \gamma \left( \sum_{i=1}^n \chi_i \theta_i(t) \right)^2 (\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T)^2 + \gamma^{-1} C^{-2} (\omega(t))^2 \leq \\ C^2 \gamma (\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T \bar{\chi}_i)^2 + \gamma^{-1} C^{-2} (\omega(t))^2 & \leq C^2 \gamma (\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T \bar{\chi}_i)^2 + \gamma^{-1} y^2(t-h), \\ -2\gamma\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T by(t) & \leq 2\gamma (\eta_2^T(t)N\bar{h}c^T b)^2 + \frac{1}{2} \gamma y^2(t), \end{aligned}$$

$$2\eta_1^T(t)Rlc^T \sum_{i=1}^n \chi_i \theta_i(t) \omega(t) \leq \delta C^2 \left( \sum_{i=1}^n \chi_i \theta_i(t) \right)^2 (\eta_1^T(t)Rlc^T)^2 + \delta^{-1} C^{-2} (\omega(t))^2 \leq \delta C^2 (\eta_1^T(t)Rlc^T \bar{\chi}_i)^2 + \delta^{-1} y^2(t-h),$$

$$-2\gamma \eta_1^T(t)Rlc^T b y(t) \leq 2\gamma (\eta_1^T(t)Rlc^T b)^2 + \frac{1}{2} \gamma y^2(t),$$

$$2x^T(t)P\beta f(t) \leq \gamma \delta (x^T(t)P\beta)^2 + \gamma^{-1} \delta^{-1} (f(t))^2$$

$$2\bar{h}^T c^T \beta f(t) N \eta_2(t) \leq \gamma (\bar{h}^T c^T \beta N \eta_2(t))^2 + \gamma^{-1} (f(t))^2$$

$$2l^T c^T \beta f(t) R \eta_1(t) \leq \gamma (l^T c^T \beta R \eta_1(t))^2 + \gamma^{-1} (f(t))^2,$$

где  $\|\bar{\chi}_i\| \geq \left\| \sum_{i=1}^n \chi_i \theta_i(t) \right\|$ , имеем:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -x(t)^T Q_1 x(t) - \mu^{-1} \eta_1^T(t) Q_2 \eta_1(t) - \sigma \eta_2^T(t) Q_3 \eta_2(t) + x^T(t) \left[ C^2 \delta P \bar{\chi}_i^T \bar{\chi}_i P \right. \\ &+ \delta P b b^T P + \gamma \delta P \beta \beta^T P + 2\delta A c^T c A^T \left. \right] x(t) + \eta_1^T(t) \left[ (\delta^{-1} \tilde{k}^2 + \tilde{k} + \delta) l l^T + R q q^T R \right. \\ &+ \delta^{-1} R l l^T R + (\tilde{k} + 2\gamma) R l c^T b b^T c l^T R + \gamma R \beta^T c l l^T c^T \beta R + \delta C^2 R l c^T \bar{\chi}_i^T \bar{\chi}_i c l^T R \left. \right] \eta_1(t) \\ &+ \eta_2^T(t) \left[ \mu^{-2} \bar{h} \bar{h}^T + \delta^{-1} N \bar{h} \bar{h}^T N + \delta^{-1} \tilde{k}^2 N \bar{h} c^T b b^T c \bar{h}^T N + C^2 \gamma N \bar{h} c^T \bar{\chi}_i^T \bar{\chi}_i c \bar{h}^T N \right. \\ &+ \gamma N \beta^T c \bar{h} \bar{h}^T c^T \beta N + 2\gamma N \bar{h} c^T b b^T c \bar{h}^T N \left. \right] \eta_2(t) - 2\gamma y^2(t) + \gamma y^2(t) \\ &+ (\gamma^{-1} + 2\delta^{-1} - \gamma e^{-h}) y^2(t-h) + \gamma^{-1} (2 + \delta^{-1}) (f(t))^2 + \gamma y^2(t) - \gamma \int_{t-h}^t e^{-t+\vartheta} y^2(\vartheta) d\vartheta. \quad (2.65) \end{aligned}$$

Если условия (2.58)-(2.61) выполнены, получим:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -x^T(t) Q x(t) - \eta_1^T(t) Q \eta_1(t) - \eta_2^T(t) Q \eta_2(t) + \gamma^{-1} (2 + \delta^{-1}) (f(t))^2 \\ &\quad - \gamma \int_{t-h}^t e^{-t+\vartheta} y^2(\vartheta) d\vartheta. \quad (2.66) \end{aligned}$$

Из (2.66) следует сходимость переменных  $x(t)$ ,  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$  в некоторую область, которая зависит от амплитуды возмущающего воздействия  $f(t)$ , а также от коэффициента  $\gamma$  и параметра  $\mu$  [84]. Очевидно, что чем меньше  $\mu$  и больше  $\gamma$ , тем меньше область, в которую попадут траектории  $x(t)$ ,  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$ . Таким образом для некоторых  $\gamma$  и  $\mu$  найдутся  $\delta_0$  и  $t_1$  такие, что будет выполнено целевое условие (2.43).

Переходя к неравенству для собственных чисел, из (2.66) получим:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\lambda_{\min}\{Q\}\|x(t)\|^2 - \lambda_{\min}\{Q\}\|\eta_1(t)\|^2 - \lambda_{\min}\{Q\}\|\eta_2(t)\|^2 \\ &- \gamma \int_{t-h}^t e^{-t+\vartheta} y^2(\vartheta) d\vartheta + \gamma^{-1}(2 + \delta^{-1})(f(t))^2 \\ &\leq -\nu_1 \left( \|x(t)\|^2 + \|\eta_1(t)\|^2 + \|\eta_2(t)\|^2 + \int_{t-h}^t e^{-t+\vartheta} y^2(\vartheta) d\vartheta \right) + \gamma^{-1}(2 + \delta^{-1})(f(t))^2, \end{aligned} \quad (2.67)$$

где  $\nu_1 = \min(\lambda_{\min}\{Q\}, \gamma)$  и  $\lambda_{\min}\{Q\}$  - минимальное собственное число матрицы  $Q$ . Из (2.63) получаем:

$$V(t) \leq \nu_2 \left( \|x(t)\|^2 + \|\eta_1(t)\|^2 + \|\eta_2(t)\|^2 + \int_{t-h}^t e^{-t+\vartheta} y^2(\vartheta) d\vartheta \right), \quad (2.68)$$

где  $\nu_2 = \max(\lambda_{\max}\{P\}, \lambda_{\max}\{F\}, \lambda_{\max}\{N\}, \gamma)$ . Подстановка (2.68) в (2.67) дает выражение:

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{\nu_1}{\nu_2} V(t) + \gamma^{-1}(2 + \delta^{-1})(f(t))^2 \quad (2.69)$$

Из выражения (2.69) следует выражение (2.62), что и требовалось доказать.

### 2.1.3 Адаптивный алгоритм настройки параметров регулятора

Заметим, что условия утверждения 2.1 (2.26)-(2.29) и утверждения 2.2 (2.58)-(2.61) не являются противоречивыми. Условия (2.26)-(2.29) эквивалентны следующим неравенствам:

$$\sigma > \frac{1}{\lambda_{\min}\{Q_3\}} \left( \mu^{-2} \bar{h}^T \bar{h} + \delta^{-1} \bar{h}^T N^2 \bar{h} + \delta^{-1} \tilde{k}^2 \bar{h}^T c^T b N^2 b^T c \bar{h} + C^2 \gamma \bar{h}^T c^T \bar{\chi}_i \bar{\chi}_i^T N^2 c \bar{h} + 2\gamma \bar{h}^T c^T b N^2 b^T c \bar{h} \right), \quad (2.70)$$

$$\delta < \frac{\lambda_{\min}\{Q_1\}}{C^2 \bar{\chi}_i^T P^2 \bar{\chi}_i + b^T P^2 b + 2c^T A A^T c}, \quad (2.71)$$

$$\gamma \geq e^h (\gamma^{-1} + 2\delta^{-1}) \quad (2.72)$$

$$\mu^{-1} > \frac{1}{\lambda_{\min}\{Q_2\}} \left( (\delta^{-1} \tilde{k}^2 + \tilde{k} + \delta) l^T l + q^T R^2 q + \delta^{-1} l^T R^2 l + (\tilde{k} + 2\gamma) l^T c^T b R^2 b^T c l + (\gamma + \delta) l^T l + \delta C^2 l^T c^T R^2 c l \right), \quad (2.73)$$

а условия (2.58)-(2.61) могут быть записаны в форме:

$$\sigma > \frac{1}{\lambda_{\min}\{Q_3\}} \left( \mu^{-2} \bar{h}^T \bar{h} + \delta^{-1} \bar{h}^T N^2 \bar{h} + \delta^{-1} \tilde{k}^2 \bar{h}^T c^T b N^2 b^T c \bar{h} + C^2 \gamma \bar{h}^T c^T \bar{\chi}_i \bar{\chi}_i^T N^2 c \bar{h} + \gamma \beta^T c \bar{h} N^2 \bar{h}^T c^T \beta + 2\gamma \bar{h}^T c^T b N^2 b^T c \bar{h} \right), \quad (2.74)$$

$$\delta < \frac{\lambda_{\min}\{Q_1\}}{C^2 \bar{\chi}_i^T P^2 \bar{\chi}_i + b^T P^2 b + \gamma \beta^T P^2 \beta + 2c^T A A^T c}, \quad (2.75)$$

$$\gamma \geq e^h (\gamma^{-1} + 2\delta^{-1}) \quad (2.76)$$

$$\mu^{-1} > \frac{1}{\lambda_{\min}\{Q_2\}} \left( (\delta^{-1} \tilde{k}^2 + \tilde{k} + \delta) l^T l + q^T R^2 q + \delta^{-1} l^T R^2 l + (\tilde{k} + 2\gamma) l^T c^T b R^2 b^T c l + (\gamma + \delta) l^T l + \gamma \beta^T c l l^T R^2 c^T \beta + \delta C^2 l^T c^T R^2 c l \right), \quad (2.77)$$

где  $\lambda_{\min}\{Q_1\}$ ,  $\lambda_{\min}\{Q_2\}$ ,  $\lambda_{\min}\{Q_3\}$  – минимальные собственные числа матриц  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  соответственно.

При внимательном рассмотрении приведенных условий (2.70)-(2.77) видно, что для их достижения необходимо при достаточно малом  $\mu$  увеличивать

параметры  $\gamma$  и  $\sigma$ , и уменьшать  $\delta$ , причем должно выполняться неравенство  $\sigma > \gamma$ . Очевидно, что при некоторых  $\gamma$  и  $\sigma$  условия будут выполнены, однако конкретные значения зависят от параметров системы, которые являются неизвестными. Возможным выходом является увеличение значений этих параметров до тех пор, пока выходная переменная (или ошибка слежения) не войдет в некоторую заданную окрестность положения равновесия. После этого параметры остаются постоянными, пока выходная переменная находится в заданной окрестности. Параметр  $\tilde{k} = k + \gamma$  настраивается по линейному закону:

$$\tilde{k}(t) = \int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau, \quad (2.78)$$

где функция  $\lambda(t)$  выбирается следующим образом:

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_0, & |y(t)| > \delta_0 \\ 0, & |y(t)| \leq \delta_0, \end{cases} \quad (2.79)$$

где число  $\lambda_0 > 0$ . Подобный алгоритм впервые был представлен в [59].

Параметр  $\sigma$  настраивается по квадратичному закону:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \tilde{k}^2(t), \quad \sigma_0 > 0. \quad (2.80)$$

Очевидно, что при таком способе расчета коэффициентов найдется момент времени  $t_1 > t_0$ , такой, что условия вышеприведенных утверждений будут выполнены.

При наличии помех в канале измерения, согласно [44], для избежания дрейфа настраиваемых параметров в алгоритм (2.78) можно ввести закругление или насыщение по переменной  $\tilde{k}(t)$ .

#### 2.1.4 Задача слежения

В случае задачи слежения за ограниченным по амплитуде гладким задающим воздействием  $g(t)$  функция  $y(t)$  в алгоритме (2.9) заменяется на ошибку слежения

$$e(t) = y(t) - g(t), \quad (2.81)$$

поскольку ее нужно свести к нулю с заданной точностью. Алгоритм принимает вид:

$$u(t) = -\tilde{k}\alpha(p)\xi_1(t), \quad (2.82)$$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1(t) = \sigma\xi_2(t), \\ \dot{\xi}_2(t) = \sigma\xi_3(t), \\ \dots \\ \dot{\xi}_{\rho-1}(t) = \sigma(-k_1\xi_1(t) - k_2\xi_2(t) - \dots - k_{\rho-1}\xi_{\rho-1}(t) + k_1e(t)), \end{cases} \quad (2.83)$$

$$\tilde{k} = k + \gamma. \quad (2.84)$$

Покажем, что рассмотренный алгоритм остается работоспособным и в случае задачи слежения. Подставляя (2.8) в (2.42), а затем в уравнения (2.41) и (2.81), получаем:

$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{\alpha(p)b(p)}{a(p) + k\alpha(p)b(p)} \left( \tilde{k}\varepsilon_1(t) - \gamma e(t) \right) + \frac{e(p)}{a(p) + k\alpha(p)b(p)} f(t) \\ &+ \frac{\sum_{i=1}^n g_i(p)d_i(t)}{a(p) + k\alpha(p)b(p)} \varphi(y(t-h)) - \frac{a(p)}{a(p) + k\alpha(p)b(p)} g(t), \end{aligned} \quad (2.85)$$

где  $\varepsilon_1(t) = e(t) - \hat{e}(t)$  и  $\hat{e}(t) = \frac{c(p)}{d(p)} \xi_1(t)$ .

Обозначим

$$\bar{f}(t) = \frac{e(p)}{\bar{b}(p)} f(t) - \frac{a(p)}{\bar{b}(p)} g(t), \quad (2.86)$$

где  $\bar{b}(p)$  – произвольный гурвицев полином степени  $0 \leq \bar{n} \leq n-1$ ;  $\bar{f}(t)$  – ограниченная функция в силу ограниченности возмущения  $f(t)$ , задающего воздействия  $g(t)$ , производных  $f(t)$  с первой по  $\max(1; \kappa - \bar{n})$ -ю и производных  $g(t)$  с первой по  $n - \bar{n}$ -ю;  $\kappa, n$  – степени полиномов  $e(p)$  и  $a(p)$  соответственно.

Тогда уравнение (2.85) может быть представлено в виде

$$e(t) = \frac{\alpha(p)b(p)}{a(p) + k\alpha(p)b(p)} \left( \tilde{k}\varepsilon_1(t) - \gamma e(t) \right) + \frac{\bar{b}(p)}{a(p) + k\alpha(p)b(p)} \bar{f}(t)$$

$$+ \frac{\sum_{i=1}^n g_i(p) d_i(t)}{a(p) + k\alpha(p)b(p)} \varphi(y(t-h)), \quad (2.87)$$

Дальнейшие рассуждения ничем не отличаются от приведенных в разделе 2.1.2, кроме замены  $f(t)$  на  $\bar{f}(t)$  и  $y(t)$  на  $e(t)$ . Отсюда можно сделать следующие выводы:

1. Рассмотренный закон управления применим как к задаче стабилизации, так и к задаче слежения за ограниченным по амплитуде гладким задающим воздействием.

2. Даже при отсутствии возмущения задача слежения решается с некоторой малой заданной ошибкой  $\delta_0$ , как и в случае с возмущением. Это связано с тем, что в функции  $\bar{f}(t)$  все равно остается компонента, связанная с  $g(t)$ .

### 2.1.5 Пример использования закона управления

Рассмотрим следующую систему:

$$y(t) = \frac{b_1 p + b_0}{p(p^2 + a_1 p + a_0)} v(t) + \frac{e_1 p + e_0}{p(p^2 + a_1 p + a_0)} f(t) + \frac{1}{p(p^2 + a_1 p + a_0)} (g_1(t) p + g_0) \varphi(y(t-h)), \quad (2.88)$$

$$v(t) = \frac{c_0}{p + c_0} u(t), \quad (2.89)$$

где полиномы  $b(p) = b_1 p + b_0$ ,  $a(p) = p(p^2 + a_1 p + a_0)$ ,  $g(p) = g_1(t) p + g_0(t)$ ,  $c(p) = p + c_0$  – полиномы с неизвестными коэффициентами, принадлежащими ограниченному множеству  $\Xi$ , запаздывание  $h$  неизвестно и нелинейная функция  $\omega(t) = \varphi(y(t-h))$  неизвестна.

Выберем управление согласно уравнениям (2.8)-(2.10):

$$u(t) = -\tilde{k}\alpha(p)\xi_1(t), \quad (2.90)$$

где для относительной степени, равной 2, полином  $\alpha(p)$  принимается равным:

$$\alpha(p) = p + 1. \quad (2.91)$$

Тогда:

$$u(t) = -\tilde{k}(p+1)\xi_1(t) = -\tilde{k}(\xi_1(t) + \dot{\xi}_1(t)), \quad (2.92)$$

где

$$\dot{\xi}_1(t) = \sigma(k_1 e(t) - k_1 \xi_1(t)), \quad (2.93)$$

$$e(t) = y(t) - g(t), \quad (2.94)$$

где  $e(t)$  – ошибка слежения,  $g(t)$  – задающее воздействие.

### 2.1.5.1. Задача стабилизации

Коэффициенты, входящие в математическую модель системы (2.88), (2.89), неизвестны, однако они принадлежат следующему ограниченному множеству:

$$\begin{array}{llll} 2 \leq a_1 \leq 7 & 0 \leq g_1 \leq 1 & 1 \leq b_1 \leq 5 & 100 \leq c_0 \leq 500 \\ -6 \leq a_0 \leq 7,5 & 0 \leq g_0 \leq 1 & 2 \leq b_0 \leq 3 & \end{array}$$

Пусть возмущение отсутствует:  $f(t) = 0$ .

Пользуясь методикой, изложенной в [70], для моделирования будем использовать следующую модель объекта управления:

$$y(t) = \frac{p+2}{p(p^2+2p-6)}v(t) + \frac{1}{p(p^2+2p-6)}(\sin t p + e^{-t})\operatorname{arctg}(0,5y(t-1)), \quad (2.95)$$

$$v(t) = \frac{100}{p+100}u(t). \quad (2.96)$$

Воспользуемся адаптивным алгоритмом настройки параметров регулятора (2.78)-(2.80). Примем

$$\delta_0 = 0,3, \tilde{k}(0) = 0, \lambda_0 = 10 \text{ и } \sigma_0 = 0,2. \quad (2.97)$$

Результаты моделирования представлены на рисунках 2.3-2.5.

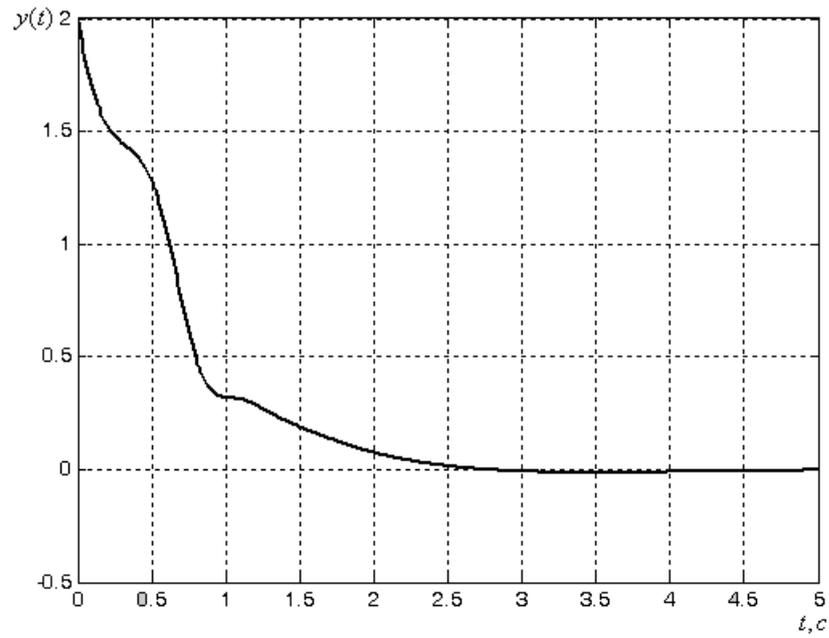


Рисунок 2.3 – График выходной переменной системы (2.90)-(2.97)

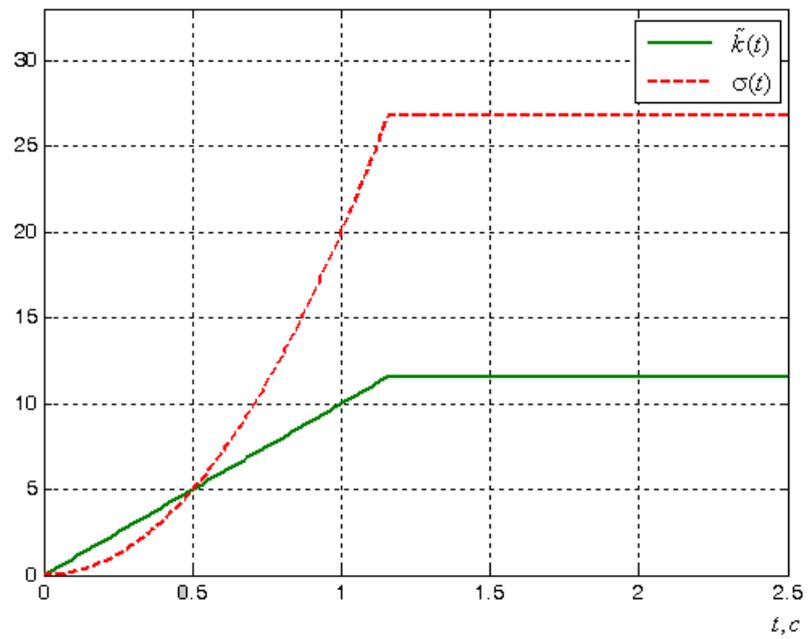


Рисунок 2.4 – Графики адаптивной настройки параметров регулятора (2.92)-(2.94),  
(2.97)

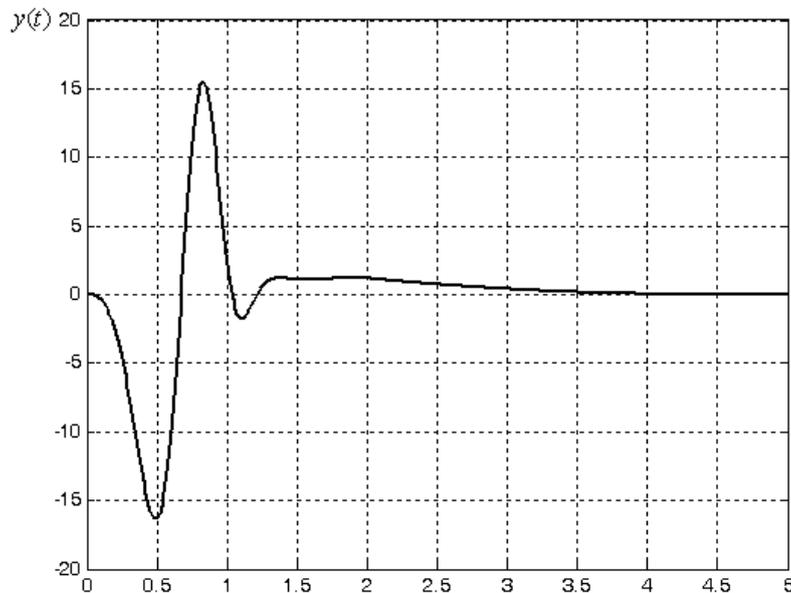


Рисунок 2.5 – График сигнала управления в системе (2.90)-(2.97)

По результатам моделирования видно, что система (2.90)-(2.97) является экспоненциально устойчивой. Время переходного процесса составило 1,1 с.

Рассмотрим далее систему вида (2.88), (2.89) при наличии возмущения. Пусть множество возможных коэффициентов выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{llll}
 4 \leq a_1 \leq 8 & 0 \leq g_1 \leq 1 & 1 \leq b_1 \leq 5 & 0 \leq e_1 \leq 2 \\
 -2 \leq a_0 \leq 11 & 0 \leq g_0 \leq 1 & 2 \leq b_0 \leq 3 & 0 \leq e_0 \leq 1 \\
 80 \leq c_0 \leq 680 & |f(t)| \leq 13 & & 
 \end{array}$$

Пользуясь методикой, изложенной в [70], для моделирования будем использовать следующую модель:

$$\begin{aligned}
 y(t) = & \frac{p+2}{p(p^2+4p-2)} v(t) + \frac{2p+1}{p(p^2+4p-2)} f(t) \\
 & + \frac{1}{p(p^2+4p-2)} (\sin t p + e^{-t}) \operatorname{arctg}(0,5y(t-0,5)), \quad (2.98)
 \end{aligned}$$

$$v(t) = \frac{80}{p+80} u(t), \quad (2.99)$$

$$f(t) = -2 + \cos(t) + 10\sin(5t). \quad (2.100)$$

Воспользуемся адаптивным алгоритмом настройки параметров регулятора (2.78)-(2.80). Примем

$$\delta_0 = 0,1, \tilde{k}(0) = 0, \lambda_0 = 30 \text{ и } \sigma_0 = 0,05. \quad (2.101)$$

Результаты моделирования представлены на рисунках 2.6-2.9.

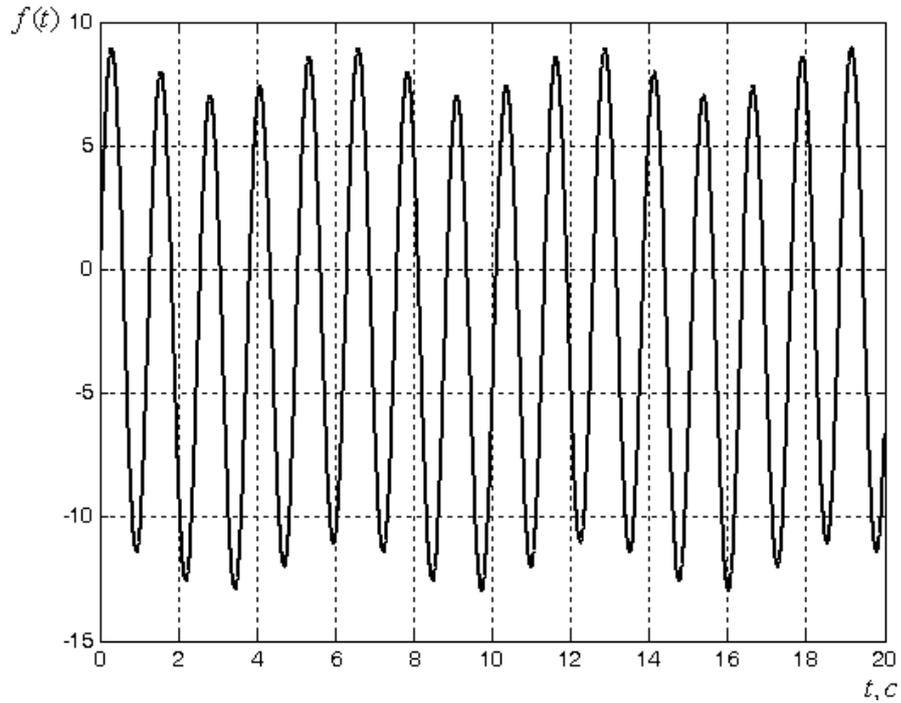


Рисунок 2.6 – Сигнал возмущения (2.100)

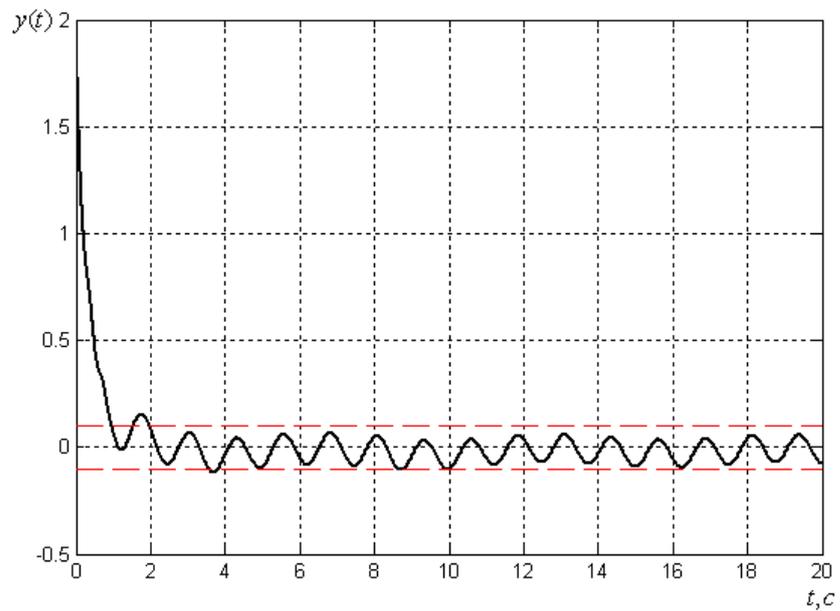


Рисунок 2.7 – График выходной переменной системы (2.91)-(2.94), (2.98)-(2.101)

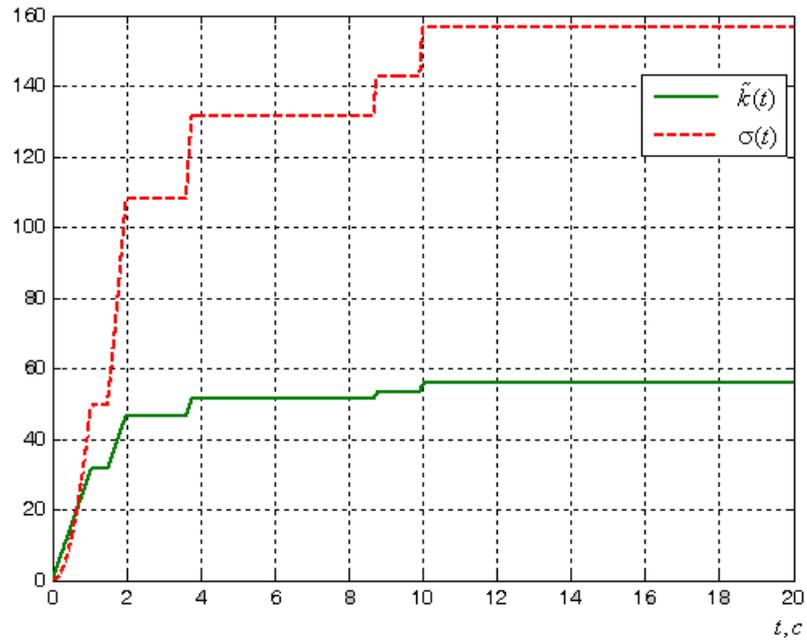


Рисунок 2.8 – Графики адаптивной настройки параметров регулятора (2.91)-(2.94), (2.101)

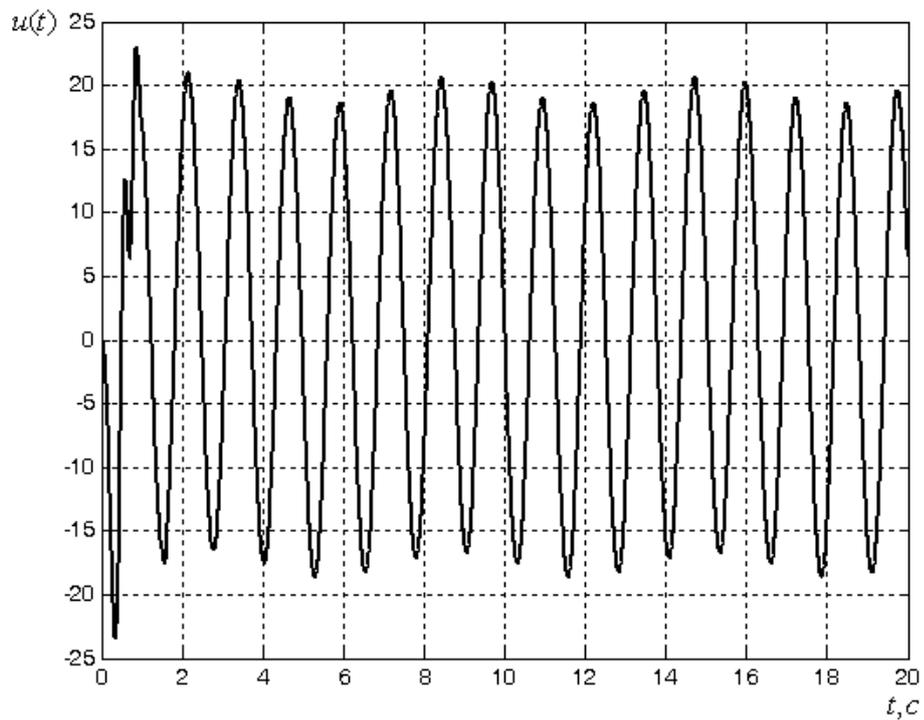


Рисунок 2.9 – График сигнала управления в системе (2.91)-(2.94), (2.98)-(2.101)

По результатам моделирования видно, что выходная переменная системы (2.91)-(2.94), (2.98)-(2.101) сходится в заданную окрестность положения равновесия за 10 с.

### 2.1.5.2. Задача слежения

Рассмотрим систему вида (2.88), (2.89) при наличии возмущения. Пусть множество возможных коэффициентов выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} 4 \leq a_1 \leq 8 & \quad 0 \leq g_1 \leq 1 & \quad 1 \leq b_1 \leq 5 & \quad 0 \leq e_1 \leq 2 \\ -2 \leq a_0 \leq 11 & \quad 0 \leq g_0 \leq 1 & \quad 2 \leq b_0 \leq 3 & \quad 0 \leq e_0 \leq 1 \\ 80 \leq c_0 \leq 680 & \quad |f(t)| \leq 2 \end{aligned}$$

Пользуясь методикой, изложенной в [70], для моделирования будем использовать следующую модель:

$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{p+2}{p(p^2+4p-2)}v(t) + \frac{2p+1}{p(p^2+4p-2)}f(t) \\ & + \frac{1}{p(p^2+4p-2)}(\sin t p + e^{-t})\arctg(0,5y(t-0,5)), \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$v(t) = \frac{80}{p+80}u(t), \quad (2.103)$$

$$f(t) = -2 + \cos(t) + 10\sin(5t) \quad (2.104)$$

$$g(t) = \sin(t) + \cos(2t). \quad (2.105)$$

Воспользуемся адаптивным алгоритмом настройки параметров регулятора (2.78)-(2.80). Примем

$$\delta_0 = 0,1, \tilde{k}(0) = 0, \lambda_0 = 30 \text{ и } \sigma_0 = 0,05. \quad (2.106)$$

Результаты моделирования представлены на рисунках 2.10-2.13.

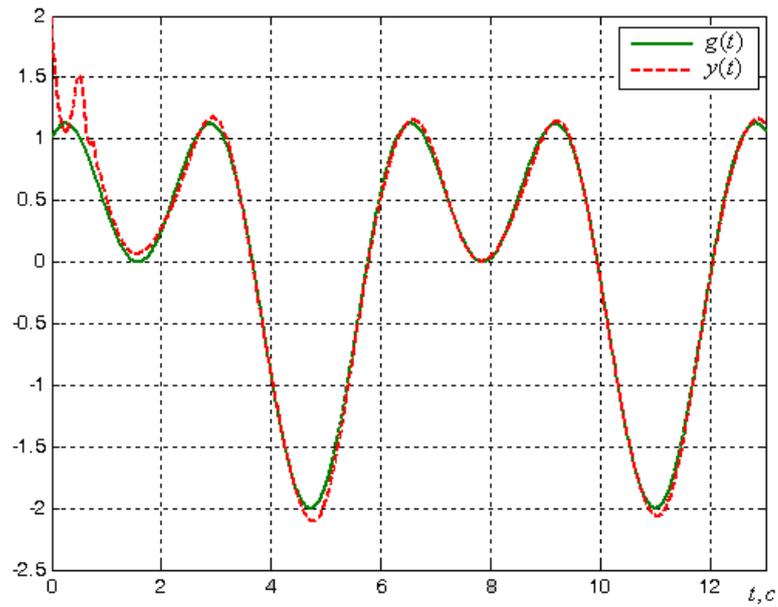


Рисунок 2.10 – Отработка задающего воздействия системой (2.91)-(2.94), (2.102)-(2.106)

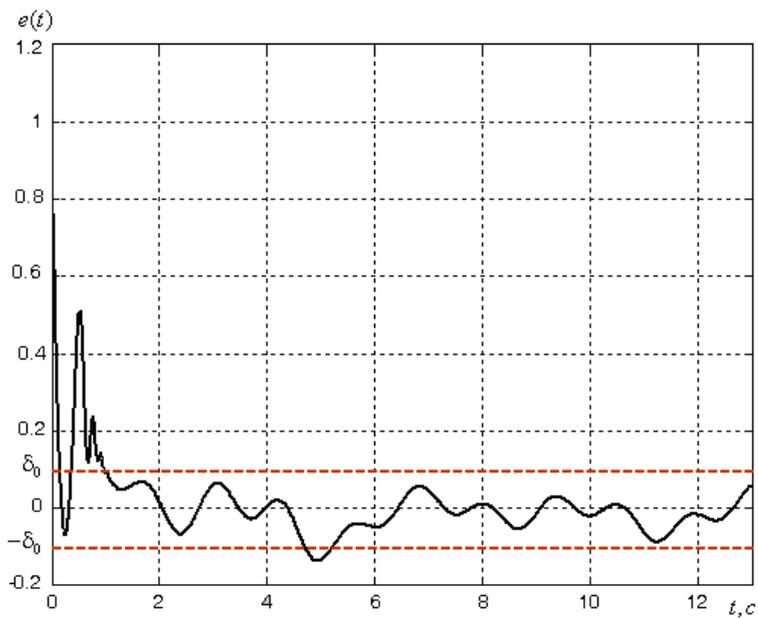


Рисунок 2.11 – Переходной процесс по ошибке слежения в системе (2.91)-(2.94), (2.102)-(2.106)

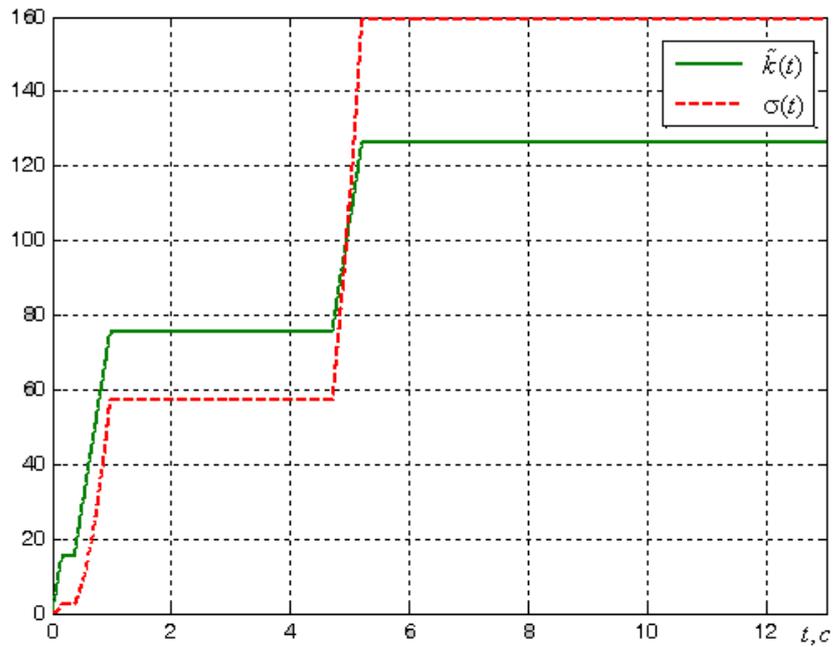


Рисунок 2.12 – Графики адаптивной настройки параметров регулятора (2.91)-(2.94), (2.106)

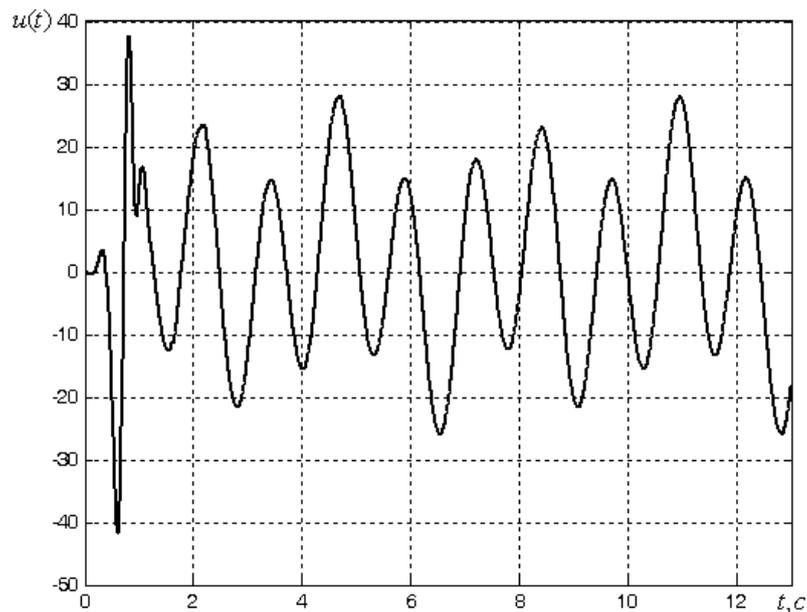


Рисунок 2.13 – График сигнала управления в системе (2.91)-(2.94), (2.102)-(2.106)

По результатам моделирования видно, что ошибка слежения системы (2.91)-(2.94), (2.102)-(2.106) сходится в заданную окрестность положения равновесия за 5,2 с.

## 2.2 Адаптивное управление нелинейной системой с неучтенной динамикой при неизвестной относительной степени

### 2.2.1 Постановка задачи и синтез алгоритма управления

В представленных выше рассуждениях предполагалось, что относительная степень объекта управления является известной. Если же известна только верхняя граница относительной степени  $\rho_{\max}$  системы (2.5), (2.6) или (2.38), (2.39) то закон управления вида (2.8)-(2.10) не гарантирует устойчивость замкнутой системы. В этом случае модифицируем закон управления (2.8) следующим образом [13], [56], [89], [130]:

$$u(t) = -\tilde{k}\alpha(p) \frac{1}{(Tp+1)^g} \xi_1(t), \quad (2.107)$$

где  $g = \rho_{\max} - 1$  и  $\tilde{k} = k + \gamma$ . Будем строить регулятор для максимальной относительной степени.

Тогда при  $\rho \leq \rho_{\max}$  получаем:

$$y(t) = \frac{b(p)}{a(p)(Tp+1)^\zeta} v(t) + \frac{e(p)}{a(p)} \cdot \frac{(Tp+1)^\zeta}{(Tp+1)^\zeta} f(t) + \frac{\sum_{i=1}^n g_i(p)\theta_i(t)}{a(p)} \cdot \frac{(Tp+1)^\zeta}{(Tp+1)^\zeta} \omega(t), \quad (2.108)$$

$$v(t) = \frac{d(p)}{c(p)(Tp+1)^{\rho-1}} u(t), \quad (2.109)$$

где  $\zeta = \rho_{\max} - \rho$ , и уравнение (2.109) представляет собой неучтенную динамику. Легко видеть, что система (2.108), (2.109) аналогична объекту (2.38), (2.39). Таким образом, смысл состоит в том, что часть дополнительного множителя включается в состав самого объекта, а часть – в состав паразитной динамики. В этом случае

обеспечивается максимальная относительная степень системы.

## 2.2.2 Адаптивный алгоритм настройки параметров

Адаптивный алгоритм настройки в данном случае аналогичен (2.78)-(2.80), однако с учетом наличия дополнительного варьируемого параметра  $T_1$  возникают следующие условия:  $T^{-1}$  должен быть больше коэффициента  $k$ ; параметр  $\sigma$  должен быть больше  $\mu^{-1}$ , а, следовательно, и много больше  $T^{-1}$ . С учетом сказанного, можно предложить следующий алгоритм настройки.

Для настройки параметра  $\tilde{k} = k + \gamma$  воспользуемся алгоритмом

$$\tilde{k}(t) = \int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau, \quad (2.110)$$

где функция  $\lambda(t)$  выбирается следующим образом:

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_0 & \text{при } |y(t)| > \delta_0 \\ 0 & \text{при } |y(t)| \leq \delta_0, \end{cases} \quad (2.111)$$

где число  $\lambda_0 > 0$ . Подобный алгоритм впервые был представлен в [59].

Параметр  $T$  настраивается следующим образом:

$$T^{-1}(t) = T_0 \tilde{k}^2(t), \quad T_0 > 0 \quad (2.112)$$

Для настройки параметра  $\sigma$  будем использовать алгоритм

$$\sigma(t) = \sigma_0 [T^{-1}(t)]^{2.9}, \quad \sigma_0 > 0. \quad (2.113)$$

Таким образом, коэффициент  $\tilde{k}$  линейно возрастает до тех пор, пока переменная  $y(t)$  не попадет в некоторую малую заданную разработчиком окрестность положения равновесия, а параметры  $T^{-1}$  и  $\sigma$  настраиваются по квадратичному закону (2.112) и степенному закону более высокой степени (2.113) соответственно. Если рассматривается задача слежения за ограниченным по амплитуде задающим воздействием, функция  $y(t)$  в алгоритме (2.111) заменяется на ошибку слежения  $e(t) = y(t) - g(t)$ .

### 2.2.3 Пример использования закона управления

Рассмотрим следующую систему:

$$y(t) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} v(t) + \frac{e_2 p^2 + e_1 p + e_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} f(t) + \frac{1}{p(p^2 + a_1 p + a_0)} (g_1(t) p + g_0) \varphi(y(t-h)), \quad (2.114)$$

$$v(t) = \frac{c_0}{p + c_0} u(t), \quad (2.115)$$

где полиномы  $b(p) = b_2 p^2 + b_1 p + b_0$ ,  $a(p) = p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0$ ,  $g(p) = g_1(t) p + g_0(t)$ ,  $c(p) = p + c_0$  – полиномы с неизвестными параметрами  $b_1$ ,  $b_0$ ,  $a_1$ ,  $a_0$ ,  $g_1(t)$ ,  $g_0(t)$ , принадлежащими некоторому ограниченному множеству, запаздывание  $h$  неизвестно и нелинейная функция  $\omega(t) = \varphi(y(t-h))$  неизвестна.

Выберем управление согласно уравнениям (2.107), (2.9):

$$u(t) = -\tilde{k} \alpha(p) \frac{1}{(T_1 p + 1)^g} \xi_1(t), \quad (2.116)$$

где для максимальной относительной степени, равной 2, полином  $\alpha(p)$  может быть взят как:

$$\alpha(p) = p + 1. \quad (2.117)$$

Тогда:

$$u(t) = -\tilde{k} \frac{p+1}{T_1 p + 1} \xi_1(t), \quad (2.118)$$

где

$$\dot{\xi}_1(t) = \sigma(k_1 e(t) - k_1 \xi_1(t)), \quad (2.119)$$

$$e(t) = y(t) - g(t), \quad (2.120)$$

$e(t)$  – ошибка слежения,  $g(t)$  – задающее воздействие.

#### 2.2.3.1. Задача стабилизации

Рассмотрим систему вида (2.114), (2.115). Пусть множество возможных коэффициентов выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{llll}
 -1 \leq a_2 \leq 2 & 0 \leq g_1 \leq 6 & 0,21 \leq b_2 \leq 4,5 & 100 \leq c_0 \leq 666 \\
 3 \leq a_1 \leq 15 & 0 \leq g_0 \leq 1 & 1 \leq b_1 \leq 8 & \\
 3 \leq a_0 \leq 18 & & 1 \leq b_0 \leq 3 & 
 \end{array}$$

Пользуясь методикой, изложенной в [70], для моделирования будем использовать следующую модель:

$$\begin{aligned}
 y(t) = & \frac{0,21p^2 + p + 1}{p^3 - p^2 + 3p + 3} v(t) + \\
 & + \frac{1}{p(p^2 + 4p - 2)} (6 \sin 10t p + 1) [6 \arctg(0,5y(t-1))], \quad (2.121)
 \end{aligned}$$

$$v(t) = \frac{100}{p + 100} u(t), \quad (2.122)$$

В данном случае возмущение отсутствует, и рассматривается задача стабилизации, то есть  $f(t) = 0$ ,  $g(t) = 0$ . Известно, что максимальная относительная степень системы  $\rho_{\max} = 2$ . Был построен регулятор для максимальной относительной степени.

Выберем

$$k_1 = 1, \quad \alpha(p) = p + 1, \quad \lambda_0 = 5,5, \quad T_0 = 0,1, \quad \sigma_0 = 0,1, \quad \delta_0 = 0,5. \quad (2.123)$$

Результаты моделирования представлены на рисунках 2.14-2.16.

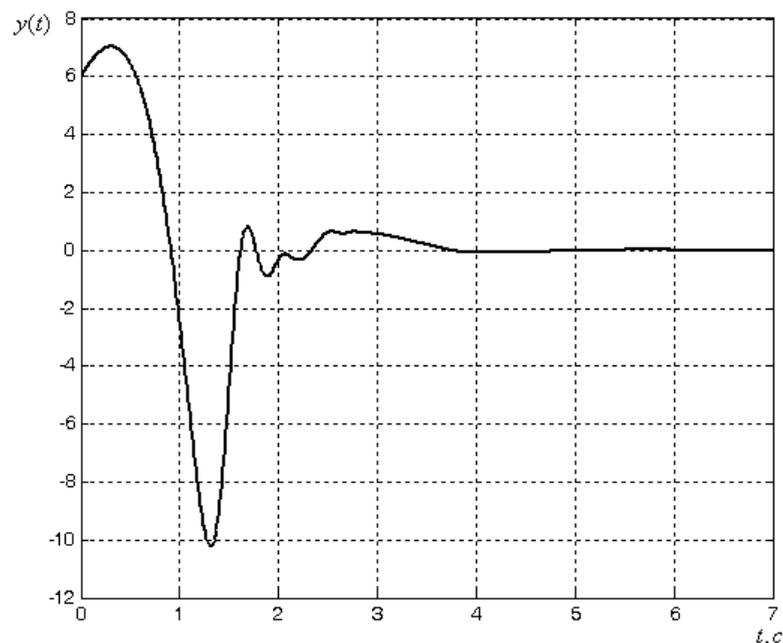


Рисунок 2.14 – График выходной переменной системы (2.117)-(2.123)

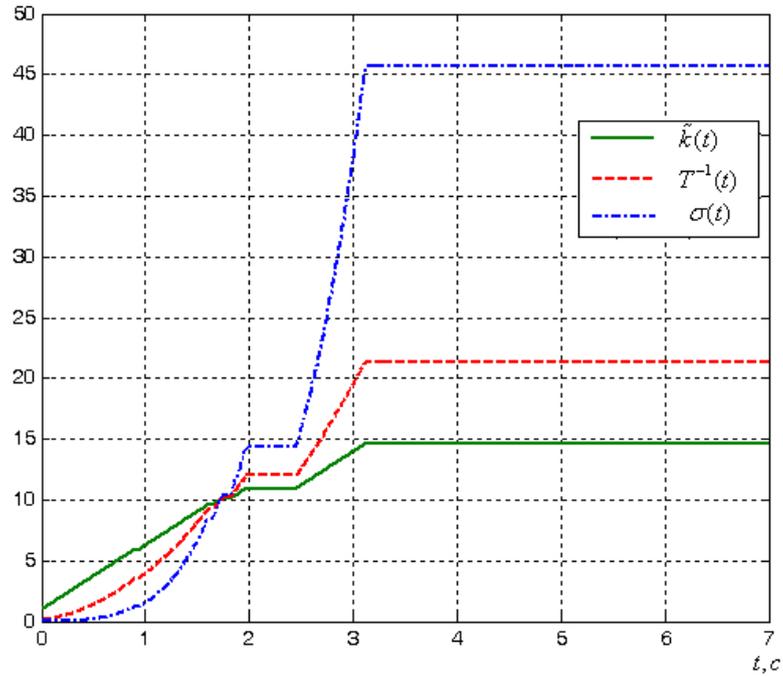


Рисунок 2.15 – Графики адаптивной настройки параметров регулятора (2.117)-(2.120), (2.123)

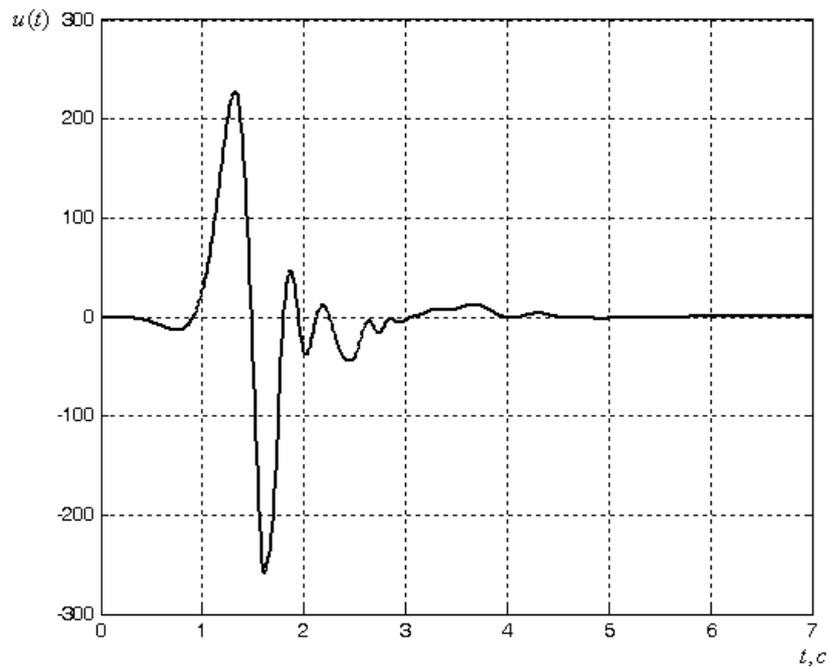


Рисунок 2.16 – График сигнала управления в системе (2.117)-(2.123)

Таким образом, видно, что замкнутая система экспоненциально устойчива, время переходного процесса составило 3,2 с.

Рассмотрим далее систему вида (2.114), (2.115), на которую действует возмущение. Пусть множество возможных коэффициентов выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} -1 \leq a_2 \leq 2 & \quad 0 \leq g_1 \leq 1 & \quad 0,21 \leq b_2 \leq 4,5 & \quad 1 \leq e_1 \leq 0 \\ 3 \leq a_1 \leq 15 & \quad 0 \leq g_0 \leq 1 & \quad 1 \leq b_1 \leq 8 & \quad 1 \leq e_2 \leq 0 \\ 3 \leq a_0 \leq 18 & & \quad 1 \leq b_0 \leq 3 & \\ |f(t)| \leq 22 & \quad 100 \leq c_0 \leq 666 & & \end{aligned}$$

Пользуясь методикой, изложенной в [70], для моделирования будем использовать следующую модель:

$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{0,21p^2 + p + 1}{p^3 - p^2 + 3p + 3} v(t) + \frac{p + 1}{p^3 - p^2 + 3p + 3} f(t) \\ & + \frac{1}{p^3 - p^2 + 3p + 3} (6 \sin 10t p + 1) [6 \arctg(0,5y(t-1))], \end{aligned} \quad (2.124)$$

$$v(t) = \frac{100}{p + 100} u(t), \quad (2.125)$$

$$f(t) = 6 + 6 \sin(2t) + 10 \sin(10t). \quad (2.126)$$

Известно, что максимальная относительная степень системы  $\rho_{\max} = 2$ . Был построен регулятор для максимальной относительной степени.

Выберем

$$k_1 = 1, \quad \alpha(p) = p + 1, \quad \lambda_0 = 5,5, \quad T_0 = 0,08, \quad \sigma_0 = 0,1, \quad \delta_0 = 0,5. \quad (2.127)$$

Результаты моделирования представлены на рисунках 2.17-2.20.

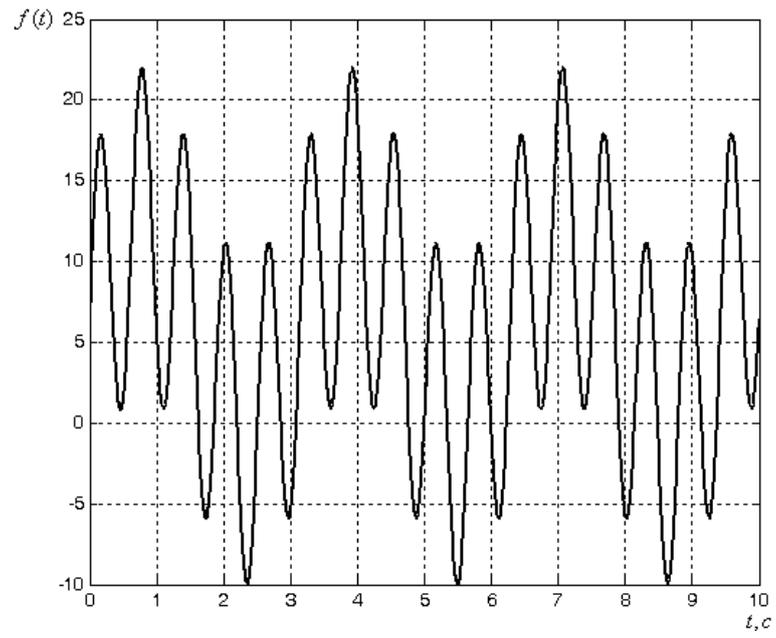


Рисунок 2.17 – Сигнал возмущения (2.126)

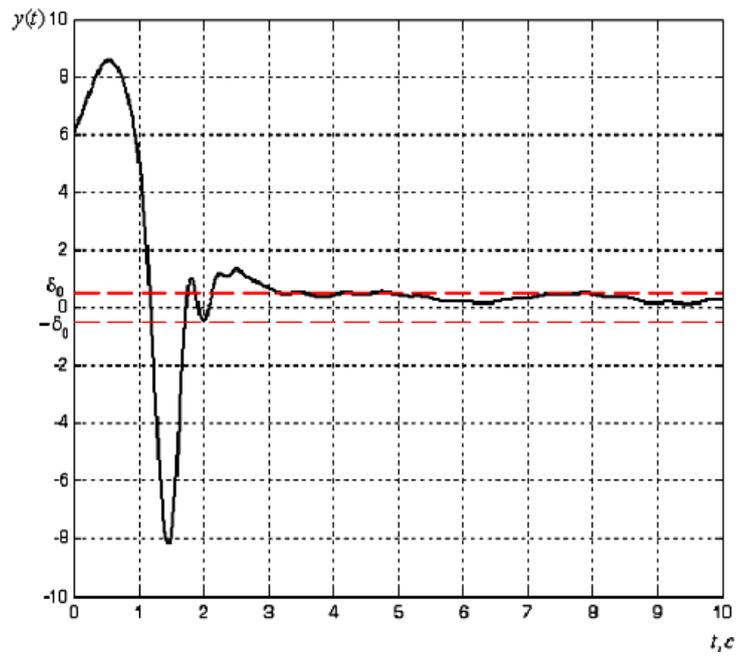


Рисунок 2.18 – График выходной переменной системы (2.117)-(2.120), (2.124)-(2.127)

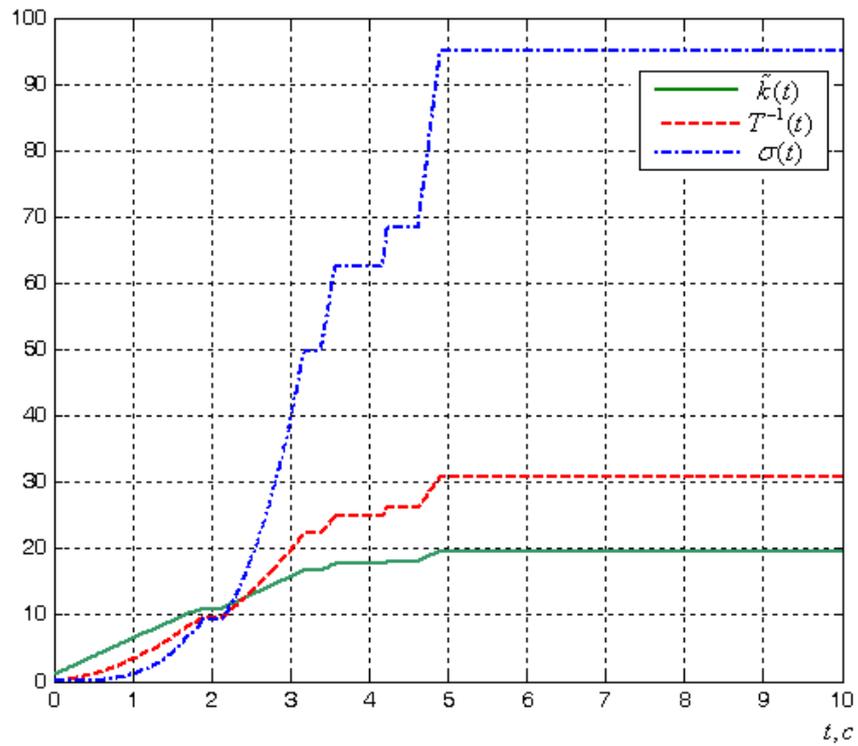


Рисунок 2.19 – Графики адаптивной настройки параметров регулятора (2.117)-  
(2.120), (2.127)

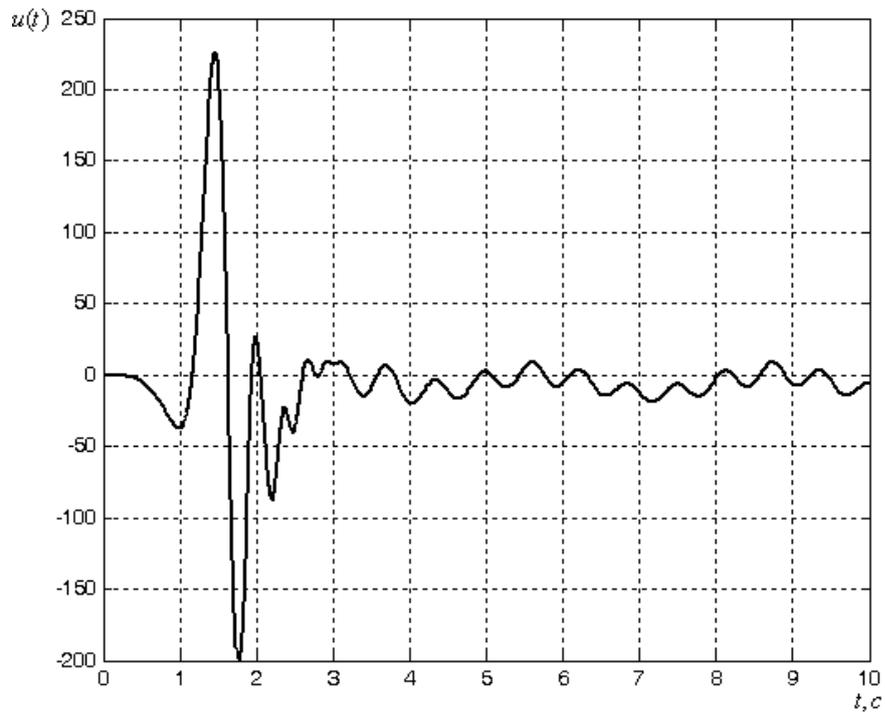


Рисунок 2.20 – График сигнала управления в системе (2.117)-(2.120), (2.124)-  
(2.127)

Таким образом, видно, что при использовании представленного закона управления обеспечивается сходимость выходной переменной в некоторую заданную окрестность  $\delta_0$  положения равновесия за 4,9 с.

### 2.2.3.2. Задача слежения

Рассмотрим систему (2.124)-(2.126) при наличии задающего воздействия:

$$g(t) = 1 + 3e^{-0,05t} \sin(4t). \quad (2.128)$$

Известно, что максимальная относительная степень системы  $\rho_{\max} = 2$ . Был построен регулятор для максимальной относительной степени.

Выберем

$$k_1 = 1, \quad \alpha(p) = p + 1, \quad \lambda_0 = 8, \quad T_0^{-1} = 0,06, \quad \sigma_0 = 0,06, \quad \delta_0 = 0,5. \quad (2.129)$$

Результаты моделирования представлены на рисунках 2.21-2.24.

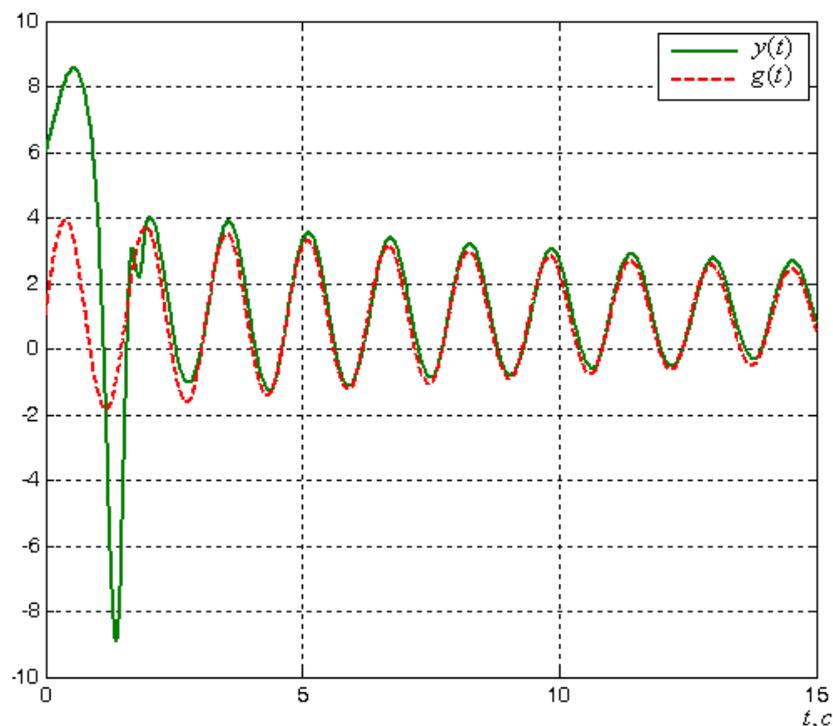


Рисунок 2.21 – Обработка задающего воздействия системой (2.117)-(2.120), (2.124)-(2.127), (2.129)

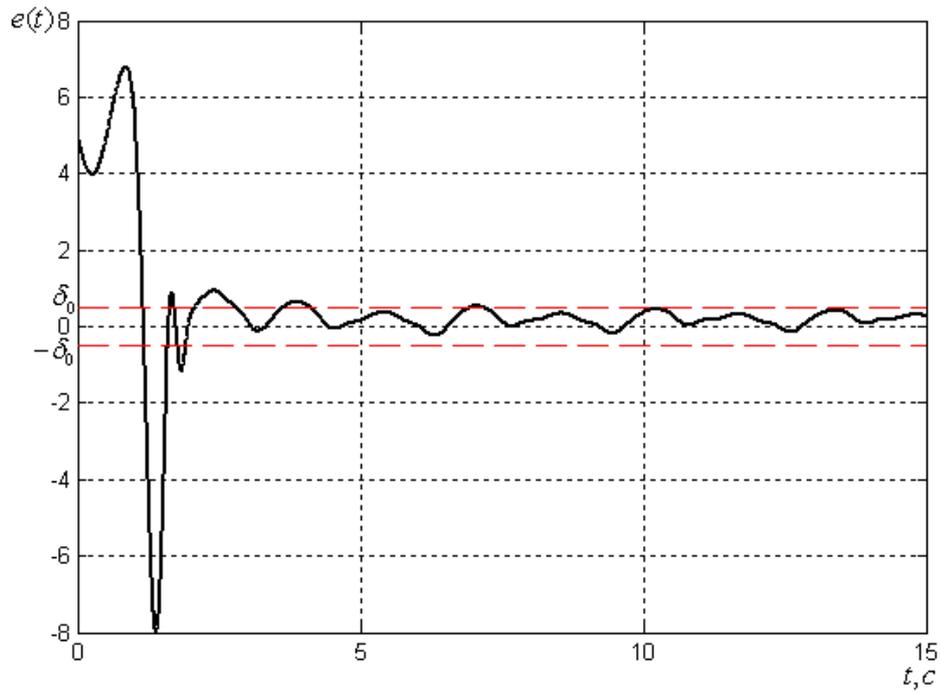


Рисунок 2.22 – График ошибки слежения в системе (2.117)-(2.120), (2.124)-(2.127), (2.129)

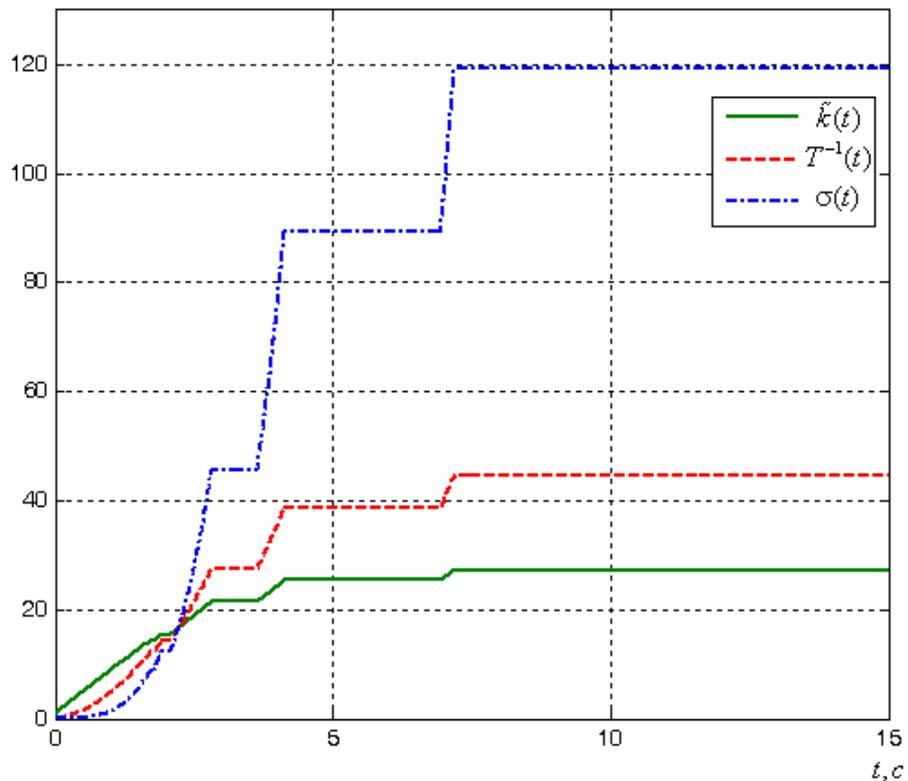


Рисунок 2.23 – Графики адаптивной настройки параметров регулятора (2.117)-(2.120), (2.129)

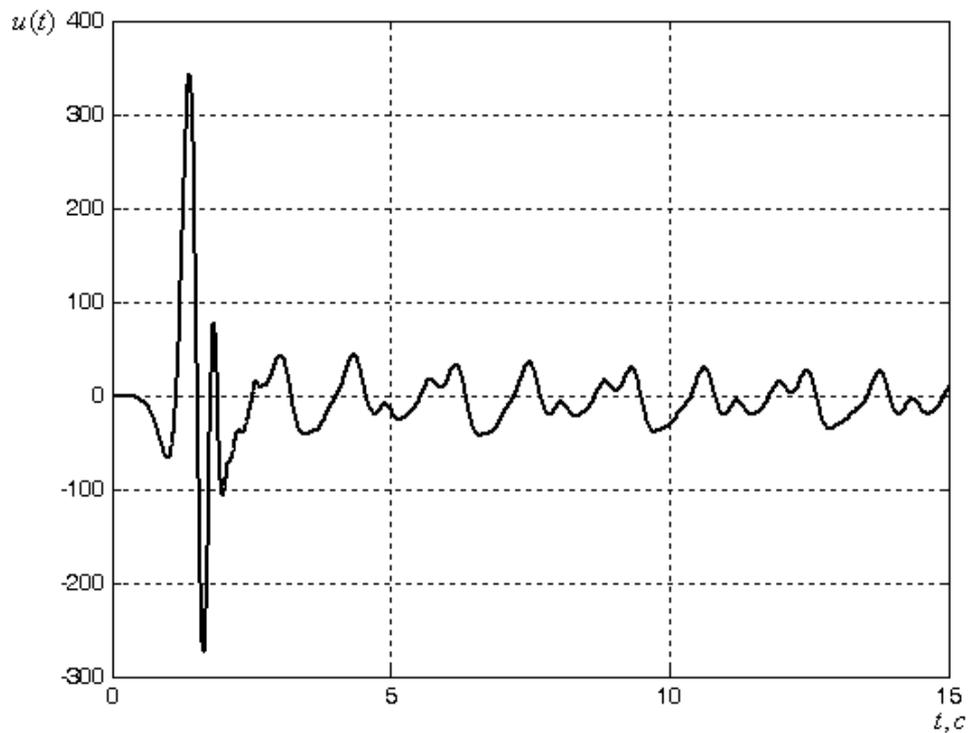


Рисунок 2.24 – График управляющего сигнала в системе (2.117)-(2.120), (2.124)-(2.127), (2.129)

Таким образом, видно, что представленный закон управления обеспечивает сходимость ошибки слежения в некоторую заданную окрестность  $\delta_0$  за время 7,4 с.

### 2.3. Выводы по главе 2

В данной главе были рассмотрены случаи адаптивного управления по выходу одноканальными объектами в условиях параметрической неопределенности при отсутствии и при наличии ограниченного по амплитуде возмущающего воздействия, а также при известной и неизвестной относительной степени объекта управления. Доказано, что закон управления типа «последовательный компенсатор» с некоторыми модификациями может быть с успехом применен и для решения задач стабилизации и слежения для данного класса объектов управления. Отдельно рассмотрена задача слежения за ограниченным гладким задающим воздействием. Делается вывод, что как при наличии, так и при отсутствии возмущения задача слежения решается с некоторой заданной

ошибкой. Для наглядного подтверждения работоспособности предлагаемого подхода продемонстрированы примеры стабилизации систем данного типа, а также слежения за ограниченным по амплитуде входным воздействием. Показано, что благодаря адаптивной настройке параметров регулятора обеспечивается экспоненциальная сходимость выходной переменной к нулю и ошибки слежения в заданную окрестность положения равновесия за конечное время (в случае отсутствия возмущения), и сходимость в заданную окрестность положения равновесия выходной переменной и ошибки слежения (при наличии возмущения).

Результаты данной главы опубликованы в [14], [55], [56], [80], [81], [89], [90], [129], [130].

### 3 Адаптивное управление многоканальными нелинейными системами с неучтенной динамикой

#### 3.1 Постановка задачи

Рассмотрим модель многоканального объекта управления вида

$$\begin{cases} \dot{\chi}_{1i}(t) = A_{\chi i} \chi_{1i}(t) + g_{\chi i} \varphi_i(y_i(t - h_i)) + b_{\chi i} v(t) + e_{\chi i} f_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \bar{c}_{\chi ij} y_j(t), \\ y_i(t) = c_{\chi i}^T \chi_{1i}(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \mu_i \dot{\chi}_{2i}(t) = F_{\chi i} \chi_{2i}(t) + q_i u_i(t), \\ v_i(t) = l_i^T \chi_{2i}(t), \end{cases} \quad (3.2)$$

где  $i = \overline{1, w}$ ,  $w$  – количество подсистем,  $\chi_{1i}(t) \in R^n$  – векторы переменных состояния системы (3.1);  $\chi_{2i}(t) \in R^r$  – векторы переменных состояния системы (3.2);  $y_i(t) \in R$  – измеряемая выходная переменная  $i$ -й подсистемы; функции  $v_i(t) \in R$  – не измеряются;  $u(t) \in R$  – сигнал управления, поданный на  $i$ -ю подсистему;  $A_{\chi i}$ ,  $F_{\chi i}$ ,  $b_{\chi i}$ ,  $c_{\chi i}$ ,  $g_{\chi i}$ ,  $e_{\chi i}$ ,  $\bar{c}_{\chi ij}$ ,  $q_i$  и  $l_i$  – матрицы и векторы соответствующей размерности с неизвестными коэффициентами; полагаем, что  $-F_{\chi i} l_i = q_i$ ; уравнение (3.2) представляет асимптотически устойчивую динамику (т.е. матрицы  $F_{\chi i}$  гурвицева), которая не учитывается при синтезе закона управления; числа  $\mu_i > 0$  – определяют быстроедействие системы (3.2);  $f_i(t)$  – ограниченное по амплитуде возмущающее воздействие;  $\omega_i(t) = \varphi_i(y_i(t - h_i))$  – гладкая нелинейная функция, удовлетворяющая условиям секторных ограничений вида (2.3).

Структура объекта управления (3.1), (3.2) представлена на рисунке 3.1.

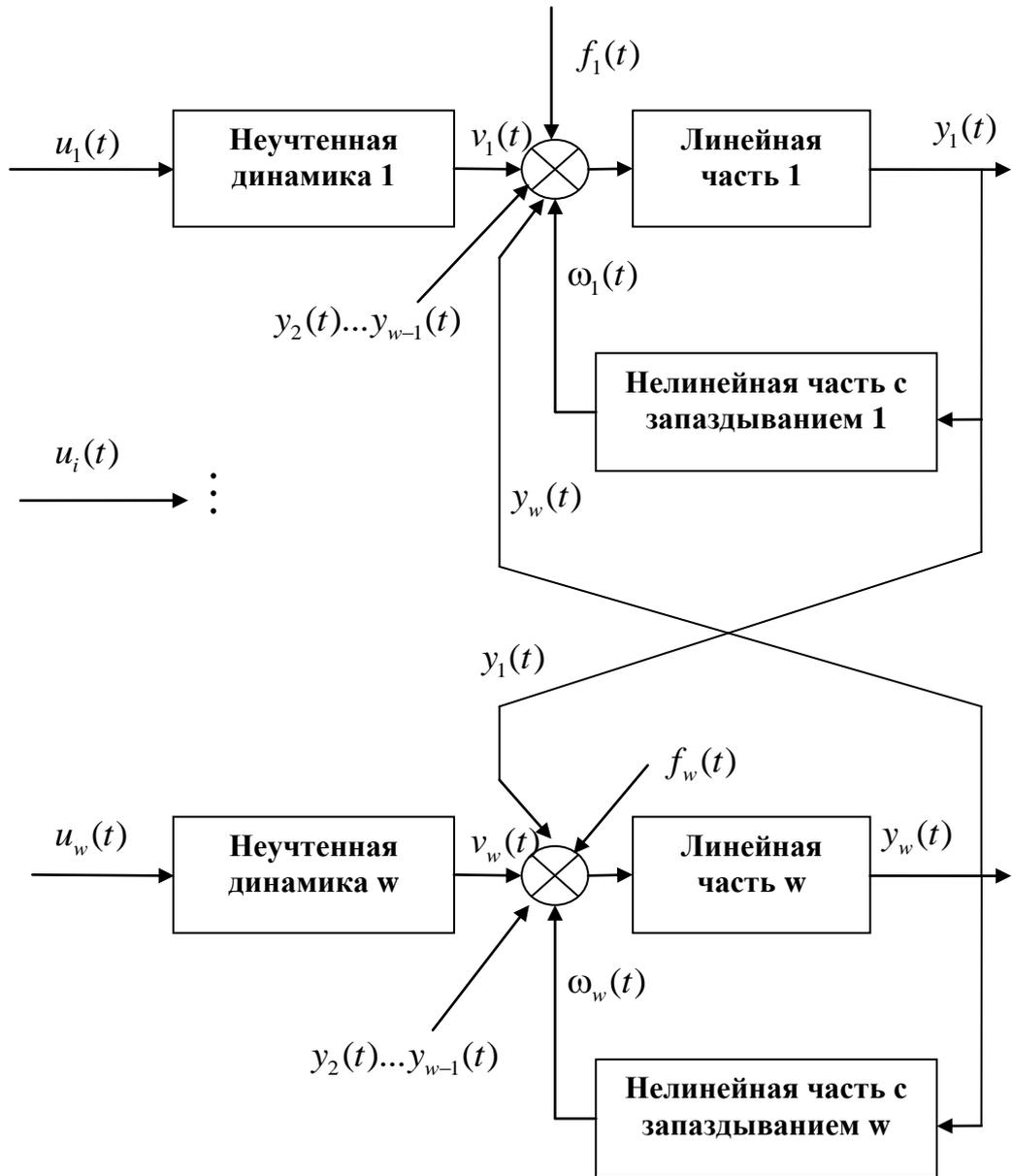


Рисунок 3.1 – Структура объекта управления (3.1), (3.2)

Перепишем систему (3.1), (3.2) в форме вход-выход

$$a_i(p)y_i(t) = b_i(p)v_i(t) + e_i(p)f_i(t) + g_i(p)\varphi_i(y_i(t - h_i)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \bar{c}_{ij}(p)y_j(t), \quad (3.3)$$

$$d_i(p)v_i(t) = c_i(p)u_i(t), \quad (3.4)$$

где  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования; выходные переменные  $y_i = y_i(t)$  измеряются, но их производные не поддаются измерению;

$$b_i(p) = b_{mi}p^m + \dots + b_{li}p + b_{0i},$$

$$a_i(p) = p^n + a_{n-1;i}p^{n-1} + \dots + a_{1i}p + a_{0i},$$

$e_i(p) = e_{ki}p^k + \dots + e_{li}p + e_{0i}$ ,  $g_i(p) = g_{\zeta i}p^\zeta + g_{\zeta-1;i}p^{\zeta-1} + \dots + g_{li}p + g_{0i}$   
 $d_i(p) = d_{ri}p^r + d_{r-1;i}p^{r-1} + \dots + d_{li}p + d_{0i}$ ,  $\bar{c}_{ij}(p) = \bar{c}_{\psi ij}p^\psi + \bar{c}_{\psi-1;ij}p^{\psi-1} + \dots + \bar{c}_{lij}p + \bar{c}_{0ij}$ ,  
 $c_i(p) = d_i(0)$  – операторы с неизвестными коэффициентами, причем данные коэффициенты принадлежат известному ограниченному множеству  $\Xi$ ;  $m_i \leq n_i - 1$ ;  
 передаточные функции  $W_i(s) = \frac{b_i(s)}{a_i(s)}$  имеют известные относительные степени  $\rho_i = n_i - m_i$ ,  $s$  – комплексная переменная, полиномы  $b_i(s)$  гурвицевы, и коэффициенты  $b_{mi} > 0$ .

Целью данного раздела является поиск аналитических условий, выполнение которых гарантирует устойчивость системе управления (3.3), (3.4) с регулятором типа «последовательный компенсатор». Иначе говоря, необходимо найти условия, при которых управляющее воздействие, формируемое данным регулятором, сводит выходные переменные в сколь угодно малую заданную окрестность положения равновесия за конечное время, то есть обеспечить выполнение неравенств:

$$|y_i(t)| \leq \delta_0, \quad \forall t \geq t_i, \quad i = \overline{1, w}, \quad (3.5)$$

где  $\delta_0$  задается разработчиком конкретной системы управления.

### 3.2 Синтез алгоритма управления

Выберем закон управления следующим образом [16], [79]:

$$u_i(t) = -\tilde{k}_i \alpha_i(p) \xi_{1i}(t), \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{1i}(t) = \sigma_i \xi_{2i}(t), \\ \dot{\xi}_{2i}(t) = \sigma_i \xi_{3i}(t), \\ \dots \\ \dot{\xi}_{\rho_i-1;i}(t) = \sigma_i \left( -k_{1i} \xi_{1i}(t) - k_{2i} \xi_{2i}(t) - \dots - k_{\rho_i-1;i} \xi_{\rho_i-1;i}(t) + k_{li} y_i(t) \right), \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\tilde{k}_i = k_i + \gamma_i, \quad (3.8)$$

где  $i = \overline{1, w}$ , числа  $k_i > 0$  и операторы  $\alpha_i(p)$  степени  $\rho_i - 1$  выбираются таким образом, чтобы передаточные функции  $H_i(s) = \frac{\alpha_i(s)b_i(s)}{a_i(s) + k_i\alpha_i(s)b_i(s)}$  были строго вещественно положительными, числа  $\sigma_i > \tilde{k}_i$ , а коэффициенты  $k_{ij}$  определяются из условия устойчивости систем (3.7) при нулевых входах  $y_i(t)$ .

Как уже было отмечено, закон управления (3.6)-(3.8) является технически реализуемым и обеспечивает устойчивость в случае одноканального объекта. Однако требуется найти аналитические условия его применимости для стабилизации многомерной системы (3.3), (3.4) или, иными словами, найти ограничения на числа  $\tilde{k}_i$  и  $\sigma_i$ , при которых выполняются целевые неравенства (3.3).

После простых преобразований, подставляя (3.6) в уравнение (3.4), а затем в (3.3), получим

$$y_i(t) = \frac{b_i(p)}{a_i(p)} [-\tilde{k}_i \alpha_i(p) \hat{y}_i(t)] + \frac{e_i(p)}{a_i(p)} f_i(t) + \frac{g_i(p)}{a_i(p)} \varphi_i(y_i(t - h_i)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \frac{\bar{c}_{ij}(p)}{a_i(p)} y_j(t) =$$

$$\frac{b_i(p)}{a_i(p)} [-\tilde{k}_i \alpha_i(p) y_i(t) + \tilde{k}_i \alpha_i(p) \varepsilon_{li}(t)]$$

$$+ \frac{e_i(p)}{a_i(p)} f_i(t) + \frac{g_i(p)}{a_i(p)} \varphi_i(y_i(t - h_i)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \frac{\bar{c}_{ij}(p)}{a_i(p)} y_j(t), \quad (3.9)$$

где  $i = \overline{1, w}$ , функция  $\hat{y}_i(t) = \frac{c_i(p)}{d_i(p)} \xi_{li}(t)$  – оценка  $i$ -й выходной переменной, ошибка

$$\varepsilon_{li}(t) = y_i(t) - \hat{y}_i(t).$$

Перепишем (3.9) в виде

$$y_i(t) = \frac{b_i(p)\alpha_i(p)}{a_i(p) + k_i b_i(p)\alpha_i(p)} [-\gamma_i y_i(t) + (k_i + \gamma_i) \varepsilon_i(t)]$$

$$+ \frac{e_i(p)}{a_i(p) + k_i b_i(p)\alpha_i(p)} f_i(t) + \frac{g_i(p)}{a_i(p) + k_i b_i(p)\alpha_i(p)} \varphi_i(y_i(t - h_i))$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \frac{\bar{c}_{ij}(p)}{a_i(p) + k_i b_i(p) \alpha_i(p)} y_j(t), \quad (3.10)$$

где  $i = \overline{1, w}$ , а передаточные функции

$$H_i(s) = \frac{b_i(s) \alpha_i(s)}{a_i(s) + k_i b_i(s) \alpha_i(s)} \quad (3.11)$$

строго вещественно положительны. Представим (3.10) в форме вход-состояние-выход:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & A_i x_i(t) + b_i((k_i + \gamma_i) \varepsilon_{li}(t) - \gamma_i y_i(t)) + \beta_i f_i(t) \\ & + \chi_i \varphi_i(y_i(t - h_i)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w z_{ij} y_j(t), \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$y_i(t) = c_i^T x_i(t), \quad (3.13)$$

где  $i = \overline{1, w}$ ,  $x_i(t) \in R^{n_i}$  – векторы переменных состояния (3.12);  $A_i$ ,  $b_i$ ,  $z_{ij}$ ,  $\beta_i$ ,  $\chi_i$  и  $c_i$  – соответствующие матрицы перехода от (3.10) к (3.11), (3.12).

Так как передаточные функции (3.11) являются строго вещественно положительными, то, согласно лемме Якубовича-Калмана [44] можно указать симметрические положительно определенные матрицы  $P_i$  удовлетворяющие следующим матричным уравнениям:

$$A_i^T P_i + P_i A_i = -Q_i, \quad P_i b_i = c_i, \quad i = \overline{1, w}, \quad (3.14)$$

где  $Q_i = Q_i^T$  – некоторые положительно определенные матрицы.

Представим модели (3.7) и (3.2) в векторно-матричной форме:

$$\dot{\xi}_i(t) = \sigma_i (\Gamma_i \xi_i(t) + d_i k_{il} y_i(t)), \quad \xi_{li}(t) = \bar{h}_i^T \xi_i(t), \quad (3.15)$$

$$\mu_i \dot{\bar{\chi}}_i(t) = F_i \bar{\chi}_i(t) + q_i \xi_{li}(t), \quad \hat{y}_i(t) = l_i^T \bar{\chi}_i(t), \quad (3.16)$$

где  $i = \overline{1, w}$ ,  $\Gamma_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_{1i} & -k_{2i} & -k_{3i} & \dots & -k_{\rho_i-1;i} \end{bmatrix}$ ,  $d_i^T = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1]_{(\rho_i-1) \times 1}$ , и

$\bar{h}_i^T = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]_{(\rho_i-1) \times 1}$ ,  $F_i$ ,  $q_i$  и  $l_i$  – матрицы перехода от модели вход-выход к модели в пространстве состояний.

Введем в рассмотрение векторы отклонений

$$\eta_{1i}(t) = l_i y_i(t) - \bar{\chi}_i(t), \quad i = \overline{1, w} \quad (3.17)$$

$$\eta_{2i}(t) = \bar{h}_i y_i(t) - \xi_i(t), \quad i = \overline{1, w}. \quad (3.18)$$

Вычисляя производные векторов отклонений (3.17) и (3.18), с учетом того, что  $d_i k_{1i} = -\Gamma_i \bar{h}_i$  и  $-F_i l_i = q_i$ , можно записать

$$\dot{\eta}_{1i}(t) = l_i \dot{y}_i(t) + \mu_i^{-1} F_i \eta_{1i}(t) + \mu_i^{-1} q_i \varepsilon_{2i}(t), \quad (3.19)$$

$$\varepsilon_{1i}(t) = y_i(t) - \hat{y}_i(t) = l_i^T \eta_{1i}(t), \quad (3.20)$$

$$\dot{\eta}_{2i}(t) = \bar{h}_i \dot{y}_i(t) + \sigma_i \Gamma_i \eta_{2i}(t), \quad (3.21)$$

$$\varepsilon_{2i}(t) = y_i(t) - \xi_i(t) = \bar{h}_i^T \eta_{2i}(t). \quad (3.22)$$

где  $i = \overline{1, w}$ .

Таким образом, имеем систему дифференциальных уравнений (3.12), (3.13), (3.15), (3.16), (3.19) – (3.22).

Положительно определенные матрицы  $R = R^T$  и  $N = N^T$  удовлетворяют уравнениям Ляпунова:

$$F_i^T R_i + R_i F_i = -Q_{2i}, \quad (3.23)$$

$$\Gamma_i^T N_i + N_i \Gamma_i = -Q_{3i}, \quad (3.24)$$

где  $i = \overline{1, w}$ , а  $Q_{2i} = Q_{2i}^T$  и  $Q_{3i} = Q_{3i}^T$  – положительно определены.

Условия работоспособности закона управления (3.6) – (3.8) для стабилизации системы (3.12), (3.13), (3.15), (3.16), (3.19) – (3.22) приведены в следующем утверждении.

**Утверждение 3.1.** Пусть для стабилизации системы (3.1), (3.2) используется закон управления (3.6) - (3.8).

Пусть для каждой подсистемы выполняются допущения об известной относительной степени, минимальной фазовости и ограниченности нелинейных функций согласно (2.3).

Тогда существуют числа  $k_i, \mu_i, \gamma_i, \sigma_i, 0 < \delta_{1i} < 0.5$  и  $0 < \delta_{2i} < 0.5, i = \overline{1, w}$ , такие, что передаточные функции  $H_i(s) = \frac{\alpha_i(s)b_i(s)}{a_i(s) + k_i\alpha_i(s)b_i(s)}$  строго

вещественно положительны, и выполнены следующие неравенства:

$$-Q_{1i} + \delta_{1i} P_i b_i b_i^T P_i + \gamma_i \delta_{2i} P_i \beta_i \beta_i^T P_i + \delta_{1i} C_i^2 P_i \bar{\chi}_i \bar{\chi}_i^T P_i + 2\delta_{1i} A_i^T c_i c_i^T A_i + 5(w-1) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \gamma_j^{-1} P_i z_{ij} z_{ij}^T P_i \leq -Q_i < 0, \quad (3.25)$$

$$-\mu_i^{-1} Q_{2i} + (\delta_{1i}^{-1} \tilde{k}_i^2 + 2\tilde{k}_i) l l^T + \delta_{1i}^{-1} R_i l l_i^T R_i + (\tilde{k}_i + 5\gamma_i) R_i l_i c_i^T b_i b_i^T c_i l_i^T R_i + \gamma_i R_i l_i c_i^T \beta_i \beta_i^T c_i l_i^T R_i + \delta_{1i} C_i^2 R_i l_i c_i^T \bar{\chi}_i \bar{\chi}_i^T c_i l_i^T R_i + R_i q_i q_i^T R_i + 5(w-1) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \gamma_j^{-1} R_i l_i c_i^T z_{ij} z_{ij}^T c_i l_i^T R_i \leq -Q_i < 0, \quad (3.26)$$

$$-\sigma_i Q_{3i} + \mu_i^{-2} \bar{h}_i \bar{h}_i^T + \delta_{1i}^{-1} N_i \bar{h}_i \bar{h}_i^T N_i + (\tilde{k}_i + 5\gamma_i) N_i \bar{h}_i c_i^T b_i b_i^T c_i \bar{h}_i^T N_i + \gamma_i N_i \bar{h}_i c_i^T \beta_i \beta_i^T c_i \bar{h}_i^T N_i + \delta_{1i} C_i^2 N_i \bar{h}_i c_i^T \bar{\chi}_i \bar{\chi}_i^T c_i \bar{h}_i^T N_i + 5(w-1) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \gamma_j^{-1} N_i \bar{h}_i c_i^T z_{ij} z_{ij}^T c_i \bar{h}_i^T N_i \leq -Q_i < 0, \quad (3.27)$$

$$\gamma_i \geq 3e^{h_i} \delta_{1i}. \quad (3.28)$$

Это означает выполнение целевого условия (3.5), причем все траектории системы ограничены и могут быть сведены в любую сколь угодно малую заданную окрестность положения равновесия. Более того, система  $L_\infty$ -устойчива, т.е. существуют числа  $\varpi_{1i}, \varpi_{2i}, \tau_{1i}$ , такие, что:

$$N_i(t) = \left( \|x_i(t)\|^2 + \|\eta_{1i}(t)\|^2 + \|\eta_{2i}(t)\|^2 + \int_{t-h_i}^t e^{-t+\theta} y^2(\mathcal{G}) d\mathcal{G} \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \bar{\omega}_{1i} e^{-\varpi 2i^t} N_i(0) + \tau_{1i} \sup_{s \in (0,t)} f_i(s). \quad (3.29)$$

**Доказательство.** Рассмотрим функционал Ляпунова-Крассовского в следующей форме:

$$V(t) = \sum_{i=1}^w \left[ x_i^T(t) P_i x_i(t) + \eta_{1i}^T(t) R_i \eta_{1i}(t) + \eta_{2i}^T(t) N_i \eta_{2i}(t) + \gamma_i \int_{t-h_i}^t e^{-t+\vartheta} y_i^2(\vartheta) d\vartheta \right]. \quad (3.30)$$

Дифференцируя (3.30) с учетом выражений (3.12)-(3.22), получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \sum_{i=1}^w \left[ x_i^T(t) (A_i^T P_i + P_i A_i) x_i(t) + \mu_i^{-1} \eta_{1i}^T(t) (F_i^T R_i + R_i F_i) \eta_{1i}(t) \right. \\ & + \eta_{2i}^T(t) \sigma_i (\Gamma_i^T N_i + N_i \Gamma_i) \eta_{2i}(t) + 2\tilde{k}_i x_i^T(t) P_i b_i l_i^T \eta_{1i}(t) - 2\gamma_i y_i^2(t) + 2x_i^T(t) P_i \beta_i f_i(t) \\ & + 2x_i^T(t) P_i \bar{\chi}_i \omega_i(t) + 2x_i^T(t) P_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w z_{ij} y_j(t) + 2\eta_{1i}^T(t) R_i l_i c_i^T A_i x_i(t) + 2\tilde{k}_i \eta_{1i}^T(t) R_i l_i c_i^T b_i l_i^T \eta_{1i}(t) \\ & - 2\gamma_i \eta_{1i}^T(t) R_i l_i c_i^T b_i c_i^T x_i(t) + 2\eta_{1i}^T(t) R_i l_i c_i^T \beta_i f_i(t) + 2\eta_{1i}^T(t) R_i l_i c_i^T \bar{\chi}_i \omega_i(t) \\ & + 2\eta_{1i}^T(t) R_i l_i c_i^T \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w z_{ij} y_j(t) + 2\mu_i^{-1} \eta_{1i}^T(t) R_i q_i \bar{h}_i^T \eta_{2i}(t) + 2\eta_{2i}^T(t) N_i \bar{h}_i c_i^T A_i x_i(t) \\ & + 2\tilde{k}_i \eta_{2i}^T(t) N_i \bar{h}_i c_i^T b_i l_i^T \eta_{1i}(t) - 2\gamma_i \eta_{2i}^T(t) N_i \bar{h}_i c_i^T b_i c_i^T x_i(t) + 2\eta_{2i}^T(t) N_i \bar{h}_i c_i^T \beta_i f_i(t) \\ & + 2\eta_{2i}^T(t) N_i \bar{h}_i c_i^T \bar{\chi}_i \omega_i(t) + 2\eta_{2i}^T(t) N_i \bar{h}_i c_i^T \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w z_{ij} y_j(t) + \gamma_i y_i^2(t) - \gamma_i e^{-h_i} y_i^2(t-h_i) \\ & \left. - \gamma_i \int_{t-h_i}^t e^{-t+\vartheta} y_i^2(\vartheta) d\vartheta \right]. \quad (3.31) \end{aligned}$$

Имеют место следующие неравенства:

$$2\tilde{k}_i x_i^T(t) P_i b_i l_i^T \eta_{1i}(t) \leq \delta_{1i} x_i^T(t) P_i b_i b_i^T P_i x_i(t) + \delta_{1i}^{-1} \tilde{k}_i^2 \eta_{1i}^T(t) l l^T \eta_{1i}(t),$$

$$2x_i^T(t) P_i \beta_i f_i(t) \leq \gamma_i \delta_{2i} x_i^T(t) P_i \beta_i \beta_i^T P_i x_i(t) + \gamma_i^{-1} \delta_{2i}^{-1} (f_i(t))^2,$$

$$2x_i^T(t) P_i \bar{\chi}_i \omega_i(t) \leq \delta_{1i} C_i^2 x_i^T(t) P_i \bar{\chi}_i \bar{\chi}_i^T P_i x_i(t) + \delta_{1i}^{-1} C_i^{-2} (\omega_i(t))^2 \leq \delta_{1i} C_i^2 x_i^T(t) P_i \bar{\chi}_i \bar{\chi}_i^T P_i x_i(t) + \delta_{1i}^{-1} y_i^2(t-h_i),$$

$$2\eta_{1i}^T(t) R_i l_i c_i^T A_i x_i(t) \leq \delta_{1i}^{-1} \eta_{1i}^T(t) R_i l_i l_i^T R_i \eta_{1i}(t) + \delta_{1i} x_i^T(t) A_i^T c_i c_i^T A_i x_i(t),$$

$$2\tilde{k}_i \eta_{1i}^T(t) R_i l_i c_i^T b_i l_i^T \eta_{1i}(t) \leq \tilde{k}_i \eta_{1i}^T(t) R_i l_i c_i^T b_i b_i^T c_i l_i^T R_i \eta_{1i}(t) + \tilde{k}_i \eta_{1i}^T(t) l l_i^T \eta_{1i}(t),$$

$$-2\gamma_i \eta_{li}^T(t) R_i l_i c_i^T b_i c_i^T x_i(t) \leq 5\gamma_i \eta_{li}^T(t) R_i l_i c_i^T b_i b_i^T c_i l_i^T R_i \eta_{li}(t) + \frac{1}{5} \gamma_i y_i^2(t),$$

$$2\eta_{li}^T(t) R_i l_i c_i^T \beta_i f_i(t) \leq \gamma_i \eta_{li}^T(t) R_i l_i c_i^T \beta_i \beta_i^T c_i l_i^T R_i \eta_{li}(t) + \gamma_i^{-1} (f_i(t))^2,$$

$$2\eta_{li}^T(t) R_i l_i c_i^T \bar{\chi}_i \omega_i(t) \leq \delta_{li} C_i^2 \eta_{li}^T(t) R_i l_i c_i^T \bar{\chi}_i \bar{\chi}_i^T c_i l_i^T R_i \eta_{li}(t) + \delta_{li}^{-1} C_i^{-2} (\omega_i(t))^2 \leq \delta_{li} C_i^2 \eta_{li}^T(t) R_i l_i c_i^T \bar{\chi}_i \bar{\chi}_i^T c_i l_i^T R_i \eta_{li}(t) + \delta_{li}^{-1} y_i^2(t - h_i),$$

$$2\mu_i^{-1} \eta_{li}^T(t) R_i q_i \bar{h}_i^T \eta_{2i}(t) \leq \eta_{li}^T(t) R_i q_i q_i^T R_i \eta_{li}(t) + \mu_i^{-2} \eta_{2i}^T(t) \bar{h}_i \bar{h}_i^T \eta_{2i}(t),$$

$$2\eta_{2i}^T(t) N_i \bar{h}_i c_i^T A_i x_i(t) \leq \delta_{li}^{-1} \eta_{2i}^T(t) N_i \bar{h}_i \bar{h}_i^T N_i \eta_{2i}^T(t) + \delta_{li} x_i^T(t) A_i^T c_i c_i^T A_i x_i(t),$$

$$2\tilde{k}_i \eta_{2i}^T(t) N_i \bar{h}_i c_i^T b_i l_i^T \eta_{li}(t) \leq \tilde{k}_i \eta_{2i}^T(t) N_i \bar{h}_i c_i^T b_i b_i^T c_i \bar{h}_i^T N_i \eta_{2i}(t) + \tilde{k}_i \eta_{li}^T(t) l_i l_i^T \eta_{li}(t),$$

$$-2\gamma_i \eta_{2i}^T(t) N_i \bar{h}_i c_i^T b_i c_i^T x_i(t) \leq 5\gamma_i \eta_{2i}^T(t) N_i \bar{h}_i c_i^T b_i b_i^T c_i \bar{h}_i^T N_i \eta_{2i}(t) + \frac{1}{5} \gamma_i y_i^2(t),$$

$$2\eta_{2i}^T(t) N_i \bar{h}_i c_i^T \beta_i f_i(t) \leq \gamma_i \eta_{2i}^T(t) N_i \bar{h}_i c_i^T \beta_i \beta_i^T c_i \bar{h}_i^T N_i \eta_{2i}(t) + \gamma_i^{-1} (f_i(t))^2,$$

$$2\eta_{2i}^T(t) N_i \bar{h}_i c_i^T \bar{\chi}_i \omega_i(t) \leq \delta_{li} C_i^2 \eta_{2i}^T(t) N_i \bar{h}_i c_i^T \bar{\chi}_i \bar{\chi}_i^T c_i \bar{h}_i^T N_i \eta_{2i}(t) + \delta_{li}^{-1} C_i^{-2} (\omega_i(t))^2 \leq \delta_{li} C_i^2 \eta_{2i}^T(t) N_i \bar{h}_i c_i^T \bar{\chi}_i \bar{\chi}_i^T c_i \bar{h}_i^T N_i \eta_{2i}(t) + \delta_{li}^{-1} y_i^2(t - h_i).$$

Суммы слагаемых, содержащих перекрестные связи, можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^w \left[ 2x_i^T(t) P_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w z_{ij} y_j(t) \right] \leq 5 \sum_{i=1}^w \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \frac{w-1}{\gamma_j} x_i^T(t) P_i z_{ij} z_{ij}^T P_i x_i(t) + \frac{1}{5} \sum_{i=1}^w \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \frac{\gamma_j}{w-1} y_j^2(t) \\ &= 5 \sum_{i=1}^w \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \frac{w-1}{\gamma_j} x_i^T(t) P_i z_{ij} z_{ij}^T P_i x_i(t) + \frac{1}{5} \sum_{i=1}^w \left[ \sum_{j=1}^w \frac{\gamma_j}{w-1} y_j^2(t) - \frac{\kappa_i}{w-1} y_i^2(t) \right] \\ &= 5 \sum_{i=1}^w \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \frac{w-1}{\gamma_j} x_i^T(t) P_i z_{ij} z_{ij}^T P_i x_i(t) + \frac{1}{5} \left( \frac{w}{w-1} \sum_{j=1}^w \gamma_j y_j^2(t) - \frac{1}{w-1} \sum_{i=1}^w \gamma_i y_i^2(t) \right) \\ &= 5(w-1) \sum_{i=1}^w \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \gamma_j^{-1} x_i^T(t) P_i z_{ij} z_{ij}^T P_i x_i(t) + \frac{1}{5} \sum_{i=1}^w \gamma_i y_i^2(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^w \left[ 2\eta_{li}^T(t) R_i l_i c_i^T \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w z_{ij} y_j(t) \right] \leq 5 \sum_{i=1}^w \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \frac{w-1}{\gamma_j} \eta_{li}^T(t) R_i l_i c_i^T z_{ij} z_{ij}^T c_i l_i^T R_i \eta_{li}(t) \\
& + \frac{1}{5} \sum_{i=1}^w \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \frac{\gamma_j}{w-1} y_j^2(t) = 5 \sum_{i=1}^w \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \frac{w-1}{\gamma_j} \eta_{li}^T(t) R_i l_i c_i^T z_{ij} z_{ij}^T c_i l_i^T R_i \eta_{li}(t) \\
& + \frac{1}{5} \sum_{i=1}^w \left[ \sum_{j=1}^w \frac{\gamma_j}{w-1} y_j^2(t) - \frac{\gamma_i}{w-1} y_i^2(t) \right] = 5 \sum_{i=1}^w \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \frac{w-1}{\gamma_j} \eta_{li}^T(t) R_i l_i c_i^T z_{ij} z_{ij}^T c_i l_i^T R_i \eta_{li}(t) \\
& + \frac{1}{5} \left( \frac{w}{w-1} \sum_{j=1}^w \gamma_j y_j^2(t) - \frac{1}{w-1} \sum_{i=1}^w \gamma_i y_i^2(t) \right) = 5(w-1) \sum_{i=1}^w \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \gamma_j^{-1} \eta_{li}^T(t) R_i l_i c_i^T z_{ij} z_{ij}^T c_i l_i^T R_i \eta_{li}(t) \\
& + \frac{1}{5} \sum_{i=1}^w \gamma_i y_i^2(t), \\
& \sum_{i=1}^w \left[ 2\eta_{2i}^T(t) N_i \bar{h}_i c_i^T \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w z_{ij} y_j(t) \right] \leq 5 \sum_{i=1}^w \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \frac{w-1}{\gamma_j} \eta_{2i}^T(t) N_i \bar{h}_i c_i^T z_{ij} z_{ij}^T c_i l_i^T N_i \eta_{2i}(t) \\
& + \frac{1}{5} \sum_{i=1}^w \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \frac{\gamma_j}{w-1} y_j^2(t) = 5 \sum_{i=1}^w \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \frac{w-1}{\gamma_j} \eta_{2i}^T(t) N_i \bar{h}_i c_i^T z_{ij} z_{ij}^T c_i l_i^T N_i \eta_{2i}(t) \\
& + \frac{1}{5} \sum_{i=1}^w \left[ \sum_{j=1}^w \frac{\gamma_j}{w-1} y_j^2(t) - \frac{\gamma_i}{w-1} y_i^2(t) \right] = 5 \sum_{i=1}^w \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \frac{w-1}{\gamma_j} \eta_{2i}^T(t) N_i \bar{h}_i c_i^T z_{ij} z_{ij}^T c_i l_i^T N_i \eta_{2i}(t) \\
& + \frac{1}{5} \left( \frac{w}{w-1} \sum_{j=1}^w \gamma_j y_j^2(t) - \frac{1}{w-1} \sum_{i=1}^w \gamma_i y_i^2(t) \right) = 5(w-1) \sum_{i=1}^w \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \gamma_j^{-1} \eta_{2i}^T(t) N_i \bar{h}_i c_i^T z_{ij} z_{ij}^T c_i l_i^T N_i \eta_{2i}(t) \\
& + \frac{1}{5} \sum_{i=1}^w \gamma_i y_i^2(t).
\end{aligned}$$

С учетом приведенных неравенств из уравнения (3.31) можно получить следующую оценку для производной функции Ляпунова:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) & \leq \sum_{i=1}^w \left[ -x_i^T(t) Q_{1i} x_i(t) - \mu_i^{-1} \eta_{li}^T(t) Q_{2i} \eta_{li}(t) - \sigma_i \eta_{2i}^T(t) Q_{3i} \eta_{2i}(t) \right. \\
& \left. + x_i^T(t) \left( \delta_{1i} P_i b_i b_i^T P_i + \gamma_i \delta_{2i} P_i \beta_i \beta_i^T P_i + \delta_i C_i^2 P_i \bar{\chi}_i \bar{\chi}_i^T P_i + 2\delta_{1i} A_i^T c_i c_i^T A_i \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +5(w-1) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \gamma_j^{-1} P_i z_{ij} z_{ij}^T P_i \left. \right) x_i(t) + \eta_{1i}^T(t) \left( \left( \delta_{1i}^{-1} \tilde{k}_i^2 + 2\tilde{k}_i \right) l l^T + \delta_{1i}^{-1} R_i l_i l_i^T R_i \right. \\
& + \left( \tilde{k}_i + 5\gamma_i \right) R_i l_i c_i^T b_i b_i^T c_i l_i^T R_i + \gamma_i R_i l_i c_i^T \beta_i \beta_i^T c_i l_i^T R_i + \delta_{1i} C_i^2 R_i l_i c_i^T \bar{\chi}_i \bar{\chi}_i^T c_i l_i^T R_i + R_i q_i q_i^T R_i \\
& +5(w-1) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \gamma_j^{-1} R_i l_i c_i^T z_{ij} z_{ij}^T c_i l_i^T R_i \left. \right) \eta_{1i}(t) + \eta_{2i}^T(t) \left( \mu_i^{-2} \bar{h}_i \bar{h}_i^T + \delta_{1i}^{-1} N_i \bar{h}_i \bar{h}_i^T N_i \right. \\
& + \left( \tilde{k}_i + 5\gamma_i \right) N_i \bar{h}_i c_i^T b_i b_i^T c_i \bar{h}_i^T N_i + \gamma_i N_i \bar{h}_i c_i^T \beta_i \beta_i^T c_i \bar{h}_i^T N_i + \delta_{1i} C_i^2 N_i \bar{h}_i c_i^T \bar{\chi}_i \bar{\chi}_i^T c_i \bar{h}_i^T N_i \\
& +5(w-1) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \gamma_j^{-1} N_i \bar{h}_i c_i^T z_{ij} z_{ij}^T c_i l_i^T N_i \left. \right) \eta_{2i}(t) + \left( 3\delta_{1i}^{-1} - \gamma_i e^{-h_i} \right) y_i^2(t-h_i) \\
& + \gamma_i^{-1} \left( 2 + \delta_{2i}^{-1} \right) \left( f_i(t) \right)^2 - \gamma_i \int_{t-h_i}^t e^{-t+\vartheta} y_i^2(\vartheta) d\vartheta \left. \right]. \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Если выполнены условия (3.25)-(3.28) выполнены, выражение (3.32) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) \leq & \sum_{i=1}^w \left[ -x_i^T(t) Q_i x_i(t) - \mu_i^{-1} \eta_{1i}^T(t) Q_i \eta_{1i}(t) - \sigma_i \eta_{2i}^T(t) Q_{3i} \eta_{2i}(t) \right. \\
& \left. + \gamma_i^{-1} \left( 2 + \delta_{2i}^{-1} \right) \left( f_i(t) \right)^2 - \gamma_i \int_{t-h_i}^t e^{-t+\vartheta} y_i^2(\vartheta) d\vartheta \right]. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Из (3.33) следует сходимость переменных  $x_i(t)$ ,  $\eta_{1i}(t)$  и  $\eta_{2i}(t)$  в некоторую область, которая зависит от амплитуды возмущающих воздействий  $f_i(t)$ , а также от коэффициентов  $\gamma_i$  и параметров  $\mu_i$ . Очевидно, что чем меньше  $\mu_i$  и больше  $\gamma_i$ , тем меньше область, в которую попадут траектории  $x_i(t)$ ,  $\eta_{1i}(t)$  и  $\eta_{2i}(t)$ .

Переходя к неравенству для собственных чисел, из (3.33) получим:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) \leq & \sum_{i=1}^w \left[ -\lambda_{\min} \{ Q_i \} \|x_i(t)\|^2 - \lambda_{\min} \{ Q_i \} \|\eta_{1i}(t)\|^2 - \lambda_{\min} \{ Q_i \} \|\eta_{2i}(t)\|^2 \right. \\
& \left. + \gamma_i^{-1} \left( 2 + \delta_{2i}^{-1} \right) \left( f_i(t) \right)^2 - \gamma_i \int_{t-h_i}^t e^{-t+\vartheta} y_i^2(\vartheta) d\vartheta \right]
\end{aligned}$$

$$\leq -v_1 \sum_{i=1}^w \left[ \|x_i(t)\|^2 + \|\eta_{1i}(t)\|^2 + \|\eta_{2i}(t)\|^2 + \int_{t-h_i}^t e^{-t+\vartheta} y_i^2(\vartheta) d\vartheta \right] + \sum_{i=1}^w \left[ \gamma_i^{-1} (2 + \delta_{2i}^{-1}) (f_i(t))^2 \right], \quad (3.34)$$

где  $v_1 = \min(\lambda_{\min}\{Q_i\}, \gamma_i)$ ,  $i = \overline{1..w}$  и  $\lambda_{\min}\{Q_i\}$  – минимальное собственное число матрицы  $Q_i$ . Из (3.30) получаем:

$$V(t) \leq v_2 \sum_{i=1}^w \left[ \|x_i(t)\|^2 + \|\eta_{1i}(t)\|^2 + \|\eta_{2i}(t)\|^2 + \int_{t-h_i}^t e^{-t+\vartheta} y_i^2(\vartheta) d\vartheta \right], \quad (3.35)$$

где  $v_2 = \max(\lambda_{\max}\{P_i\}, \lambda_{\max}\{F_i\}, \lambda_{\max}\{N_i\}, \gamma_i)$ ,  $i = \overline{1..w}$ . Подстановка (3.35) в (3.34) дает выражение:

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{v_1}{v_2} V(t) + \sum_{i=1}^w \left[ \gamma_i^{-1} (2 + \delta_{2i}^{-1}) (f_i(t))^2 \right]. \quad (3.36)$$

Из выражения (3.36) следует (3.29), то есть траектории системы ограничены некоторой экспонентой с дополнительным слагаемым.

### 3.3 Адаптивный алгоритм настройки параметров регулятора

При внимательном рассмотрении можно отметить, что неравенства (3.25)-(3.28) не являются противоречивыми. Очевидно, что при некоторых малых  $\delta_{1i}$ ,  $\delta_{2i}$ , больших  $\gamma_i$  и еще больших  $\mu_i^{-1} > \gamma_i$ ,  $\sigma_i > \mu_i^{-1}$ ,  $\sigma_i > \delta_i^{-1}$  неравенства будут выполнены. Таким образом, в условиях неопределенности объекта настройку параметров  $\gamma_i$  и  $\sigma_i$  можно проводить, увеличивая их значения до тех пор, пока не будут выполнены условия (3.5).

Аналогично описанному в разделе 2.3, для настройки параметров  $\tilde{k}_i = k_i + \gamma_i$  в каждой подсистеме воспользуемся алгоритмом

$$\tilde{k}_i(t) = \int_{t_0}^t \lambda_i(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1..w} \quad (3.37)$$

где функции  $\lambda_i(t)$  выбираются как

$$\lambda_i(t) = \begin{cases} \lambda_{0i} & \text{при } |y_i(t)| > \delta_{0i} \\ 0 & \text{при } |y_i(t)| \leq \delta_{0i}, \quad i = \overline{1..w}, \end{cases} \quad (3.38)$$

где числа  $\lambda_{0i} > 0$ . Для настройки  $\sigma_i$  будем использовать алгоритм

$$\sigma_i(t) = \sigma_{0i} \left( \tilde{k}_i(t) \right)^2, \quad i = \overline{1..w}, \quad (3.39)$$

где числа  $\sigma_{0i} > 0$ . Очевидно, что в этом случае найдутся такие моменты времени  $t_i$ , начиная с которых условия (3.5) будут выполнены. В случае задачи слежения за ограниченным по амплитуде задающим воздействием функции  $y_i(t)$  в алгоритме (3.38) заменяются на ошибки слежения  $e_i(t) = y_i(t) - g_i(t)$  (см. раздел 2.4).

### 3.4 Случай с неизвестной относительной степенью

В представленных выше рассуждениях предполагалось, что относительная степень объекта управления является известной. Если же известна только верхняя граница относительной степени  $\rho_{\max;i}$  каких-либо подсистем системы (3.1), (3.2) то закон управления вида (3.6)-(3.8) не гарантирует устойчивость замкнутой системы. В этом случае модифицируем закон управления (3.6) для каждой подсистемы следующим образом:

$$u_i(t) = -\tilde{k}_i \alpha_i(p) \frac{1}{(T_i p + 1)^{\mathcal{Q}_i}} \xi_{1i}(t), \quad i = \overline{1..w}, \quad (3.40)$$

где  $\mathcal{Q}_i = \rho_{\max;i} - 1$ . Будем строить регулятор для максимальной относительной степени.

Тогда при  $\rho_i \leq \rho_{\max;i}$  имеем

$$y_i(t) = \frac{b_i(p)}{a_i(p)(T_i p + 1)^{\rho_i}} v_i(t) + \frac{e_i(p)}{a_i(p)} \cdot \frac{(T_i p + 1)^{\rho_i}}{(T_i p + 1)^{\rho_i}} f_i(t)$$

$$+ \frac{g_i(p)}{a_i(p)} \cdot \frac{(T_i p + 1)^{\varsigma_i}}{(T_i p + 1)^{\varsigma_i}} \omega_i(t) + \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^w \bar{c}_{ij}(p) y_j(t)}{a_i(p)} \cdot \frac{(T_i p + 1)^{\varsigma_i}}{(T_i p + 1)^{\varsigma_i}}, \quad (3.41)$$

$$v_i(t) = \frac{d_i(p)}{c_i(p)(T_i p + 1)^{\rho_i - 1}} u_i(t), \quad (3.42)$$

где  $i = \overline{1..w}$ ,  $\varsigma_i = \rho_{\max;i} - \rho_i$ . Как и было показано в разделе 2.3, при этом относительная степень системы сводится к максимальной.

Адаптивный алгоритм настройки в данном случае аналогичен (2.78)-(2.80), однако он осуществляется для каждой подсистемы в отдельности.

Для настройки параметра  $\tilde{k}_i = k_i + \gamma_i$  воспользуемся алгоритмом

$$\tilde{k}_i(t) = \int_{t_0}^t \lambda_i(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1..w}, \quad (3.43)$$

где функция  $\lambda_i(t)$  выбирается следующим образом:

$$\lambda_i(t) = \begin{cases} \lambda_{0i} & \text{при } |y_i(t)| > \delta_0 \\ 0 & \text{при } |y_i(t)| \leq \delta_0, \quad i = \overline{1..w}, \end{cases} \quad (3.44)$$

где число  $\lambda_{0i} > 0$ .

Параметры  $T_i$  настраиваются следующим образом:

$$T_i^{-1}(t) = T_{0i} \left( \tilde{k}_i(t) \right)^2, \quad T_{0i} > 0, \quad i = \overline{1..w}. \quad (3.45)$$

Для настройки параметров  $\sigma_i$  будем использовать алгоритм

$$\sigma_i(t) = \sigma_{0i} \left[ T_i^{-1}(t) \right]^{2\theta_i}, \quad \sigma_{0i} > 0, \quad i = \overline{1..w}. \quad (3.46)$$

В случае задачи слежения за ограниченным по амплитуде задающим воздействием функция  $y_i(t)$  в алгоритме (3.44) заменяется на ошибку слежения  $e_i(t) = g(t) - y_i(t)$ .

### 3.5 Пример использования алгоритма управления

Рассмотрим в качестве примера следующую двухканальную систему управления с неизвестными параметрами:

$$y_1(t) = \frac{b_{21}p^2 + b_{11}p + b_{01}}{p^3 + a_{21}p^2 + a_{11}p + a_{01}} v_1(t) + \frac{e_{21}p^2 + e_{11}p + e_{01}}{p^3 + a_{21}p^2 + a_{11}p + a_{01}} f_1(t) + \frac{g_{21}p^2 + g_{11}p + g_{01}}{p^3 + a_{21}p^2 + a_{11}p + a_{01}} \varphi_1(y_1(t - h_1)) + \frac{c_{212}p^2 + c_{112}p + c_{012}}{p^3 + a_{21}p^2 + a_{11}p + a_{01}} y_2(t), \quad (3.47)$$

$$v_1(t) = \frac{c_{01}}{p + c_{01}} u_1(t) \quad (3.48)$$

$$y_2(t) = \frac{b_{12}p + b_{02}}{p^2 + a_{12}p + a_{02}} v_2(t) + \frac{e_{12}p + e_{02}}{p^2 + a_{12}p + a_{02}} f_2(t) + \frac{g_{12}p + g_{02}}{p^2 + a_{12}p + a_{02}} \varphi_2(y_2(t - h_2)) + \frac{c_{121}p + c_{021}}{p^2 + a_{12}p + a_{02}} y_1(t), \quad (3.49)$$

$$v_2(t) = \frac{c_{02}}{p + c_{02}} u_2(t). \quad (3.50)$$

#### 3.5.1 Задача стабилизации

Примем  $b_{21} = b_{11} = b_{12} = 0$ , то есть передаточные функции по управлению в первом и втором каналах имеют относительные степени  $\rho_1 = 3$  и  $\rho_2 = 2$  соответственно. Также  $g_{21} = c_{212} = c_{112} = c_{121} = 0$ . Остальные коэффициенты, входящие в математическую модель системы (3.47)-(3.50), неизвестны, однако они принадлежат следующему ограниченному множеству:

$$\begin{array}{llll} 2,5 \leq a_{21} \leq 15 & 2 \leq e_{21} \leq 10 & & \\ 0,5 \leq a_{11} \leq 6 & 1 \leq e_{11} \leq 5 & 0 \leq g_{11} \leq 1 & \\ -1 \leq a_{01} \leq 9 & 0 \leq e_{01} \leq 9 & 0 \leq g_{01} \leq 1 & -6 \leq c_{012} \leq 4 \\ 1 \leq b_{01} \leq 8 & 100 \leq c_{01} \leq 1000 & & \\ -1 \leq a_{12} \leq 7 & 1 \leq e_{12} \leq 7 & 0 \leq g_{12} \leq 1 & \\ 1 \leq a_{02} \leq 12 & 1 \leq e_{02} \leq 4 & 0 \leq g_{02} \leq 2 & -6 \leq c_{021} \leq 4 \end{array}$$

$$6 \leq b_{02} \leq 18 \quad 333 \leq c_{02} \leq 1000$$

$$-3 \leq f_1(t) \leq 3 \quad 0 \leq f_2(t) \leq 11$$

Пользуясь методикой, изложенной в [70], для моделирования будем использовать следующую модель объекта управления:

$$y_1(t) = \frac{1}{p^3 + 2,5p^2 + 0,5p - 1} v_1(t) + \frac{2p^2 + p}{p^3 + 2,5p^2 + 0,5p - 1} f_1(t) + \frac{p+1}{p^3 + 2,5p^2 + 0,5p - 1} y_1(t-2) \sin y_1(t-2) - \frac{6}{p^3 + 2,5p^2 + 0,5p - 1} y_2(t), \quad (3.51)$$

$$v_1(t) = \frac{100}{p+100} u_1(t), \quad (3.52)$$

$$f_1(t) = -2 + \sin 4t, \quad (3.53)$$

$$y_2(t) = \frac{6}{p^2 - p + 1} v_2(t) + \frac{p+2}{p^2 - p + 1} f_2(t) + \frac{2}{p^2 - p + 1} \operatorname{arctg} y(t-1) - \frac{6}{p^2 - p + 1} y_1(t), \quad (3.54)$$

$$v_2(t) = \frac{333}{p+333} u_2(t), \quad (3.55)$$

$$f_2(t) = 1 + 10 \cos 3t. \quad (3.56)$$

Алгоритм управления, соответствующий относительным степеням передаточных функций подсистем, выбирается согласно (3.6)-(3.8) в виде

$$u_1(t) = -\tilde{k}_1(t)(p^2 + p + 1)\xi_{11}(t), \quad (3.57)$$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{11}(t) = \sigma_1(t)\xi_{21}(t), \\ \dot{\xi}_{21}(t) = \sigma_1(t)(-0,5\xi_{11}(t) - 4\xi_{21}(t) + 0,5y_1(t)), \end{cases} \quad (3.58)$$

$$u_2 = -\tilde{k}_2(t)(p+1)\xi_{12}(t), \quad (3.59)$$

$$\dot{\xi}_{12}(t) = \sigma_2(t)(-\xi_{12}(t) + y_2(t)). \quad (3.60)$$

Алгоритм адаптации выбирается в соответствии с (3.37)-(3.39):

$$\tilde{k}_1(t) = \int_{t_0}^t \lambda_1(\tau) d\tau, \quad \tilde{k}_2(t) = \int_{t_0}^t \lambda_2(\tau) d\tau, \quad (3.61)$$

$$\lambda_1(t) = \begin{cases} 15 & \text{при } |y_1(t)| > 0,1 \\ 0 & \text{при } |y_1(t)| \leq 0,1, \end{cases} \quad \lambda_2(t) = \begin{cases} 75 & \text{при } |y_2(t)| > 0,1 \\ 0 & \text{при } |y_2(t)| \leq 0,1, \end{cases} \quad (3.62)$$

$$\sigma_1(t) = 0,015(\tilde{k}_1(t))^2, \quad \sigma_2(t) = 0,04(\tilde{k}_2(t))^2. \quad (3.63)$$

Результаты моделирования при  $y_1(0) = y_2(0) = 3$  представлены на рисунках 3.2-3.6.

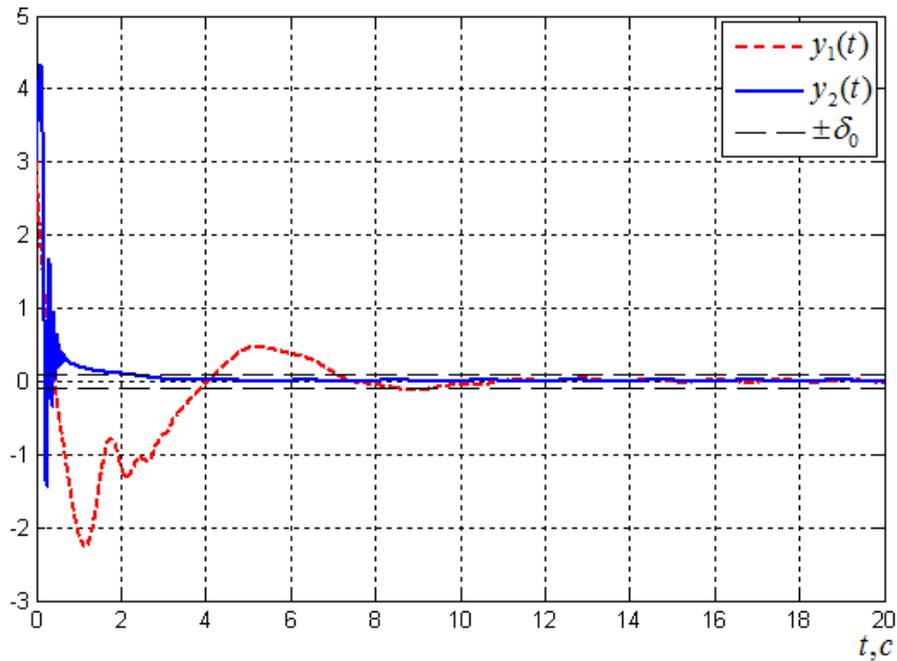


Рисунок 3.2 – Графики выходных переменных системы (3.51)-(3.63)

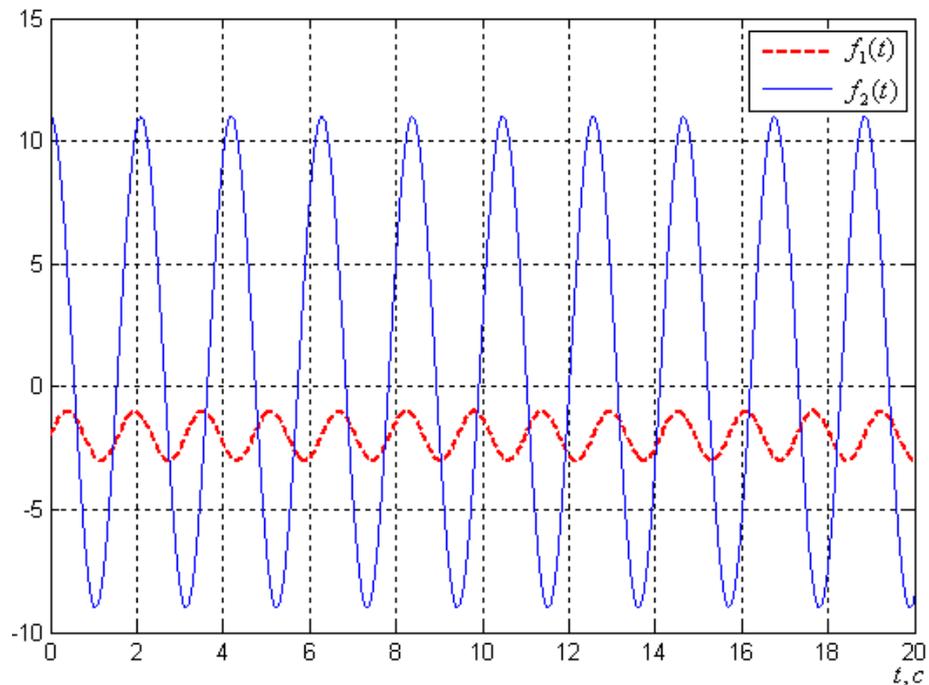


Рисунок 3.3 – Графики сигналов возмущения в системе (3.51)-(3.63)

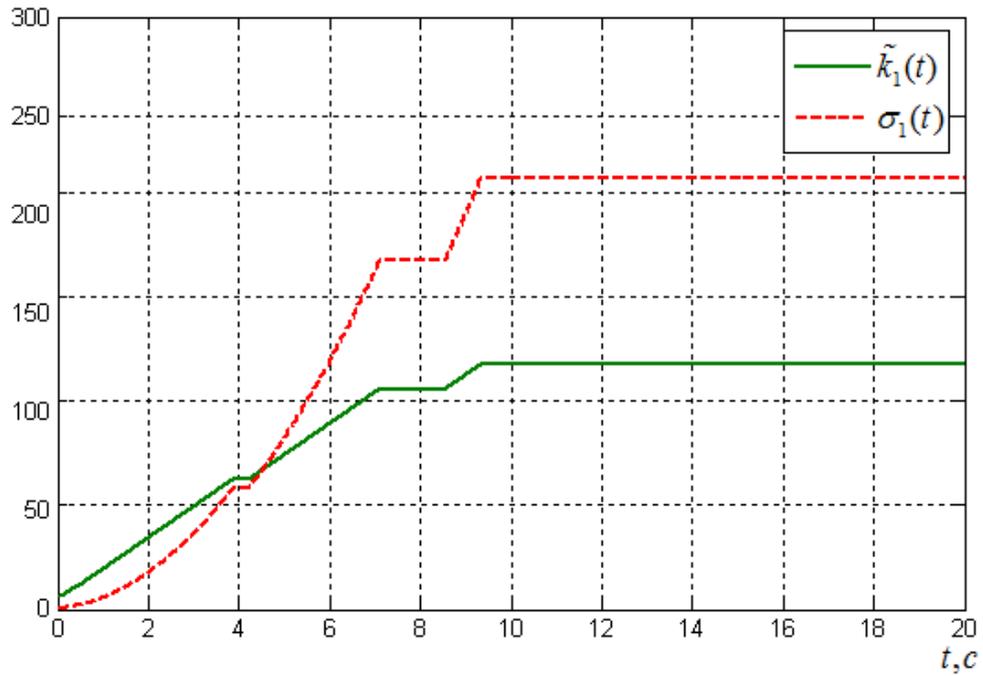


Рисунок 3.4 – Графики адаптивной настройки параметров регулятора (3.61)-  
(3.63) для первой подсистемы

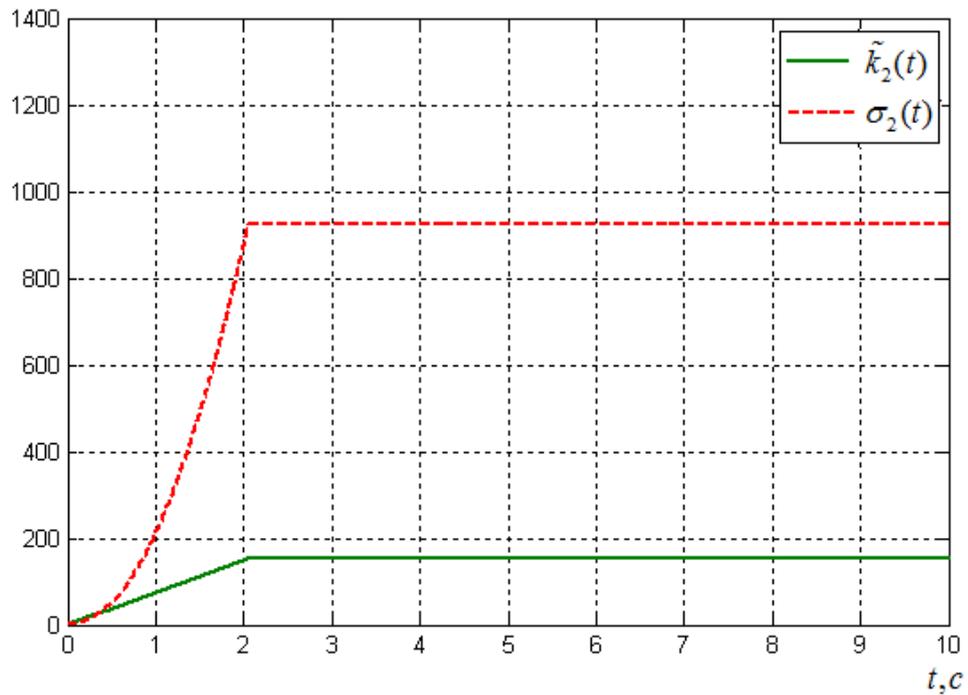


Рисунок 3.5 – Графики адаптивной настройки параметров регулятора (3.61)-  
(3.63) для второй подсистемы

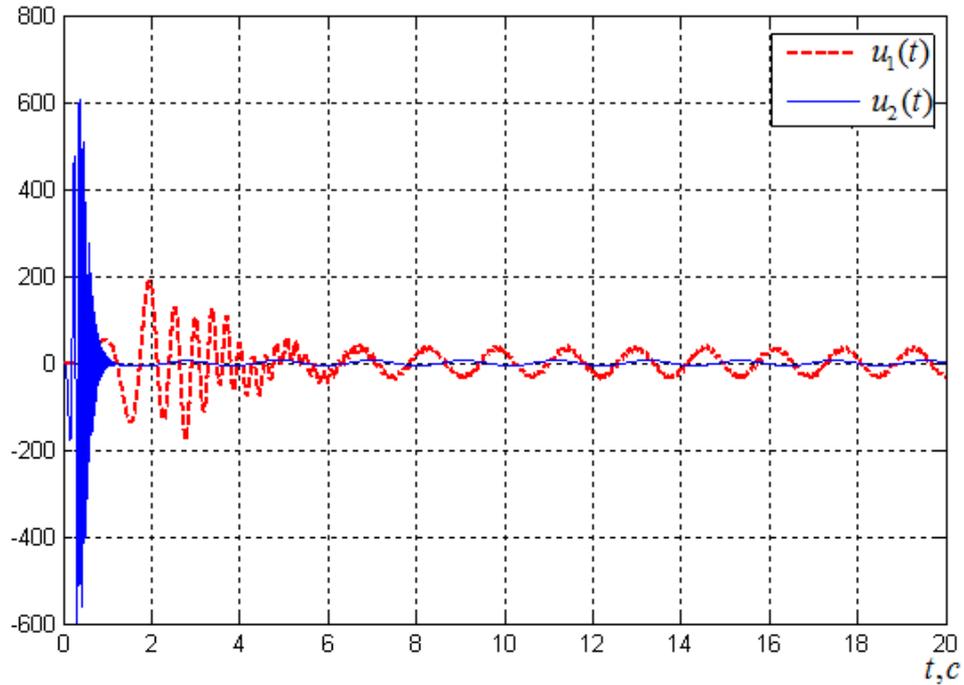


Рисунок 3.6 – Графики сигналов управления в системе (3.51)-(3.63)

По результатам моделирования можно сделать вывод, что выходные переменные системы (3.51)-(3.63) сходятся в заданную окрестность положения равновесия. Время переходного процесса для первой подсистемы составило 9,3 с, для второй подсистемы – 2,1 с.

### 3.5.2 Задача слежения

Как и в случае стабилизации, примем  $b_{21} = b_{11} = b_{12} = 0$ , то есть передаточные функции по управлению в первом и втором каналах имеют относительные степени  $\rho_1 = 3$  и  $\rho_2 = 2$  соответственно. Также  $g_{21} = c_{212} = c_{112} = c_{121} = 0$ . Остальные коэффициенты, входящие в математическую модель системы (3.47)-(3.50), неизвестны, однако они принадлежат следующему ограниченному множеству:

$$\begin{array}{llll}
 -0,6 \leq a_{21} \leq 15 & 0 \leq e_{21} \leq 2 & & \\
 2 \leq a_{11} \leq 6 & 0 \leq e_{11} \leq 2 & 1 \leq g_{11} \leq 2 & \\
 3 \leq a_{01} \leq 9 & 0 \leq e_{01} \leq 1 & 0 \leq g_{01} \leq 1 & -6 \leq c_{012} \leq 4 \\
 1 \leq b_{01} \leq 8 & 125 \leq c_{01} \leq 1000 & & \\
 -9,9 \leq a_{12} \leq 7 & 0 \leq e_{12} \leq 1 & 0 \leq g_{12} \leq 1 & 
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
-0,1 \leq a_{02} \leq 12 & \quad 0 \leq e_{02} \leq 2 & \quad 0 \leq g_{02} \leq 2 & \quad -6 \leq c_{021} \leq 4 \\
6 \leq b_{02} \leq 18 & \quad 333 \leq c_{02} \leq 1000 \\
-3 \leq f_1(t) \leq 3 & \quad 0 \leq f_2(t) \leq 11
\end{aligned}$$

Пользуясь методикой, изложенной в [70], для моделирования будем использовать следующую модель:

$$g(t) = 4 \sin t \sin 2t, \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned}
y_1(t) = & \frac{1}{p^3 - 0,6p^2 + 2p - 3} v_1(t) + \frac{2p^2 + p}{p^3 - 0,6p^2 + 2p - 3} f_1(t) \\
& + \frac{p+1}{p^3 - 0,6p^2 + 2p - 3} y_1(t-2) \sin y_1(t-2) - \frac{6}{p^3 - 0,6p^2 + 2p - 3} y_2(t), \quad (3.65)
\end{aligned}$$

$$v_1(t) = \frac{125}{p+125} u_1(t), \quad (3.66)$$

$$f_1(t) = -2 + \sin 4t, \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned}
y_2(t) = & \frac{6}{p^2 - 0,1p - 9,9} v_2(t) + \frac{p+2}{p^2 - 0,1p - 9,9} f_2(t) + \frac{2}{p^2 - 0,1p - 9,9} \operatorname{arctg} y(t-1) \\
& - \frac{6}{p^2 - 0,1p - 9,9} y_1(t), \quad (3.68)
\end{aligned}$$

$$v_2(t) = \frac{333}{p+333} u_2(t), \quad (3.69)$$

$$f_2(t) = 1 + 10 \cos 3t. \quad (3.70)$$

Алгоритм управления, соответствующий относительным степеням передаточных функций подсистем, выбирается в виде

$$u_1(t) = -\tilde{k}_1(t) (p^2 + p + 1) \xi_{11}(t), \quad (3.71)$$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{11}(t) = \sigma_1(t) \xi_{21}(t), \\ \dot{\xi}_{21}(t) = \sigma_1(t) (-0,5 \xi_{11}(t) - 4 \xi_{21}(t) + 0,5 e_1(t)), \end{cases} \quad (3.72)$$

$$u_2 = -\tilde{k}_2(t) (p+1) \xi_{12}(t), \quad (3.73)$$

$$\dot{\xi}_{12}(t) = \sigma_2(t) (-\xi_{12}(t) + e_2(t)). \quad (3.74)$$

Алгоритм адаптации выбирается в соответствии с (3.37)-(3.39):

$$\tilde{k}_1(t) = \int_{t_0}^t \lambda_1(\tau) d\tau, \quad \tilde{k}_2(t) = \int_{t_0}^t \lambda_2(\tau) d\tau, \quad (3.75)$$

$$\lambda_1(t) = \begin{cases} 15 \text{ нпу} & |y_1(t)| > 0,1 \\ 0 \text{ нпу} & |y_1(t)| \leq 0,1, \end{cases} \quad \lambda_2(t) = \begin{cases} 35 \text{ нпу} & |y_2(t)| > 0,1 \\ 0 \text{ нпу} & |y_2(t)| \leq 0,1, \end{cases} \quad (3.76)$$

$$\sigma_1(t) = 0,015(\tilde{k}_1(t))^2, \quad \sigma_2(t) = 0,02(\tilde{k}_2(t))^2. \quad (3.77)$$

Результаты моделирования при  $y_1(0) = 6$ ,  $y_2(0) = -6$  представлены на рисунках 3.7-3.11.

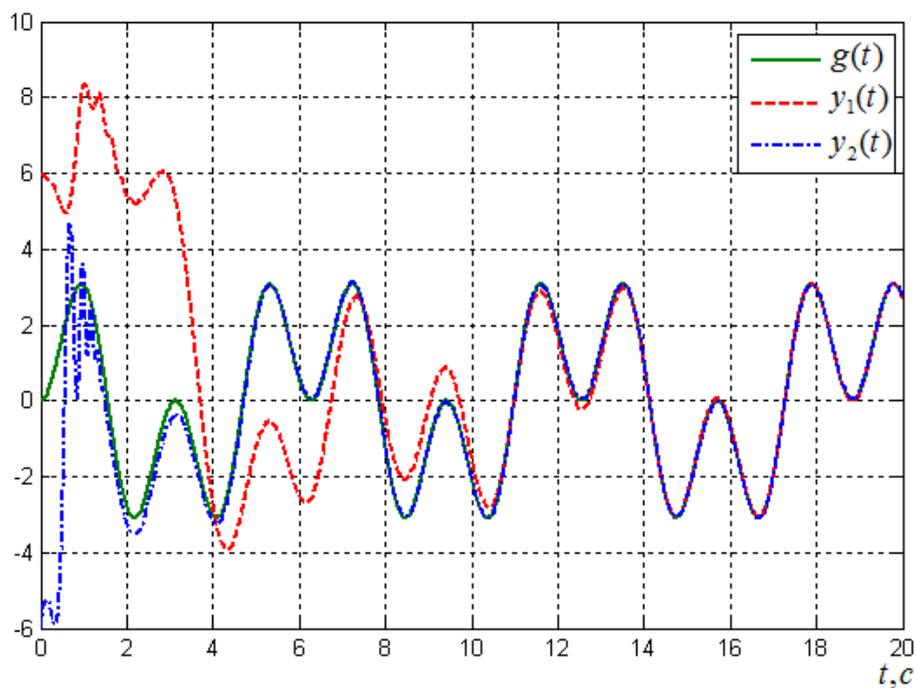


Рисунок 3.7 – Графики задающего воздействия и выходные переменные системы (3.64)-(3.77)

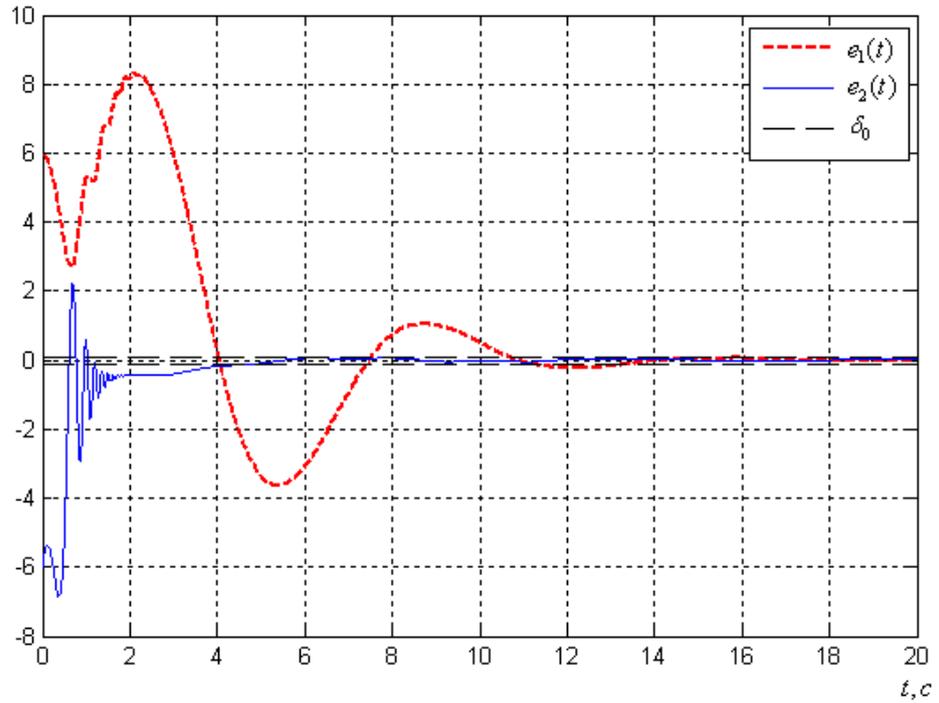


Рисунок 3.8 – Графики ошибки слежения в системе (3.64)-(3.77)

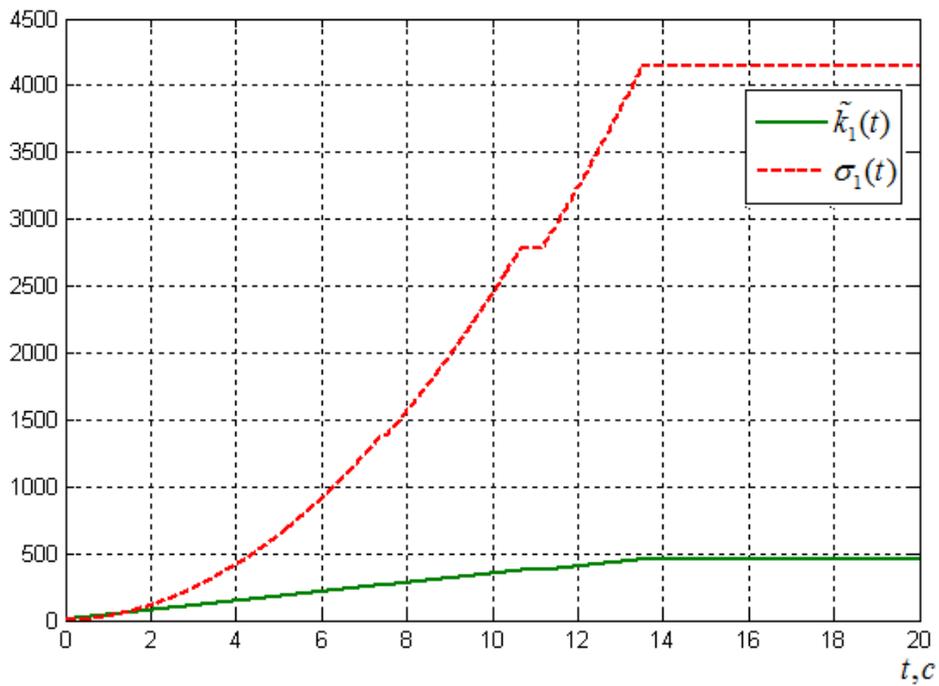


Рисунок 3.9 – Графики адаптивной настройки параметров регулятора (3.75)-(3.77) для первой подсистемы

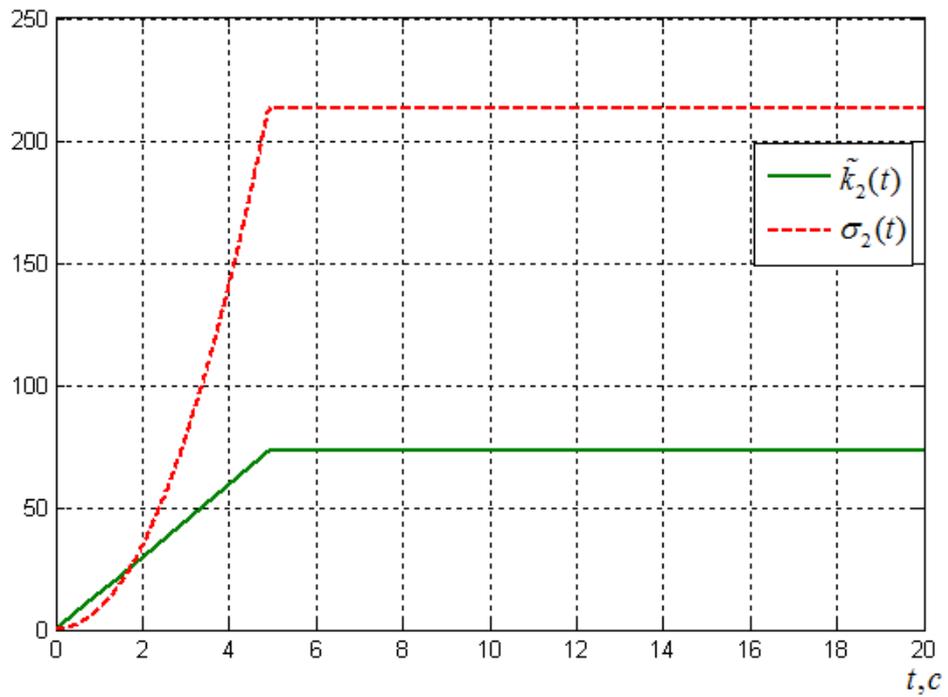


Рисунок 3.10 – Графики адаптивной настройки параметров регулятора (3.75)-  
(3.77) для второй подсистемы

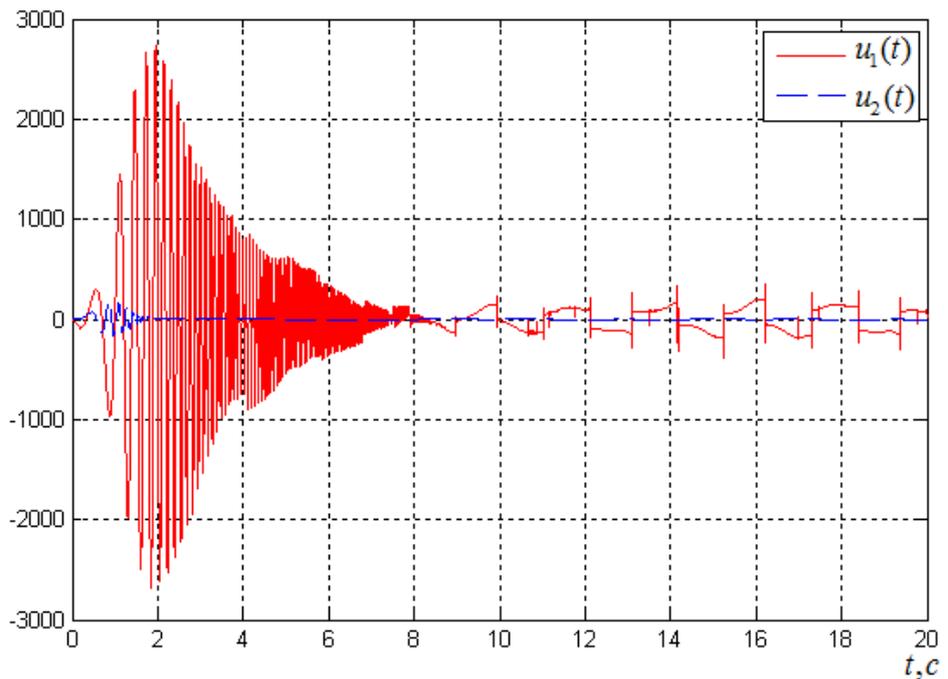


Рисунок 3.11 – Графики сигналов управления в системе (3.64)-(3.77)

По результатам моделирования можно сделать вывод, что ошибки слежения системы (3.64)-(3.77) сходятся в заданную окрестность положения равновесия. Время переходного процесса для первой подсистемы составило 13,4 с, для второй подсистемы – 4,8 с.

### *3.6 Выводы по главе 3*

В данной главе рассмотрена задача управления многоканальными нелинейными системами с неучтенной динамикой в условиях параметрической неопределенности и действия неизвестных возмущений. Показано, что если постоянная времени неучтенной динамики достаточно мала, то с помощью алгоритма управления «последовательный компенсатор», примененного для каждой подсистемы в отдельности, обеспечивается экспоненциальная устойчивость системы при отсутствии возмущений. При наличии возмущений обеспечивается сходимость всех траекторий в сколь угодно малую заданную окрестность положения равновесия, причем они ограничены некоторой экспонентой с дополнительным слагаемым. Однако в условиях параметрической неопределенности невозможно точно определить соотношение между постоянной времени малоинерционного звена и остальными параметрами системы, и, следовательно, гарантировать устойчивость для любой неучтенной динамики. Можно воспользоваться методом построения закона управления для неизвестной относительной степени. В этом случае обеспечивается устойчивость системы с относительной степенью, меньшей или равной максимальной.

Результаты данной главы опубликованы в [16], [79].

## 4 Практическая реализация закона управления на мобильном роботе «Robotino»

### 4.1 Описание мобильного робота «Robotino»

«Robotino» – это полнофункциональная мобильная робототехническая система, производящаяся компанией Festo Didactic. Внешний вид робота представлен на рисунке 4.1.

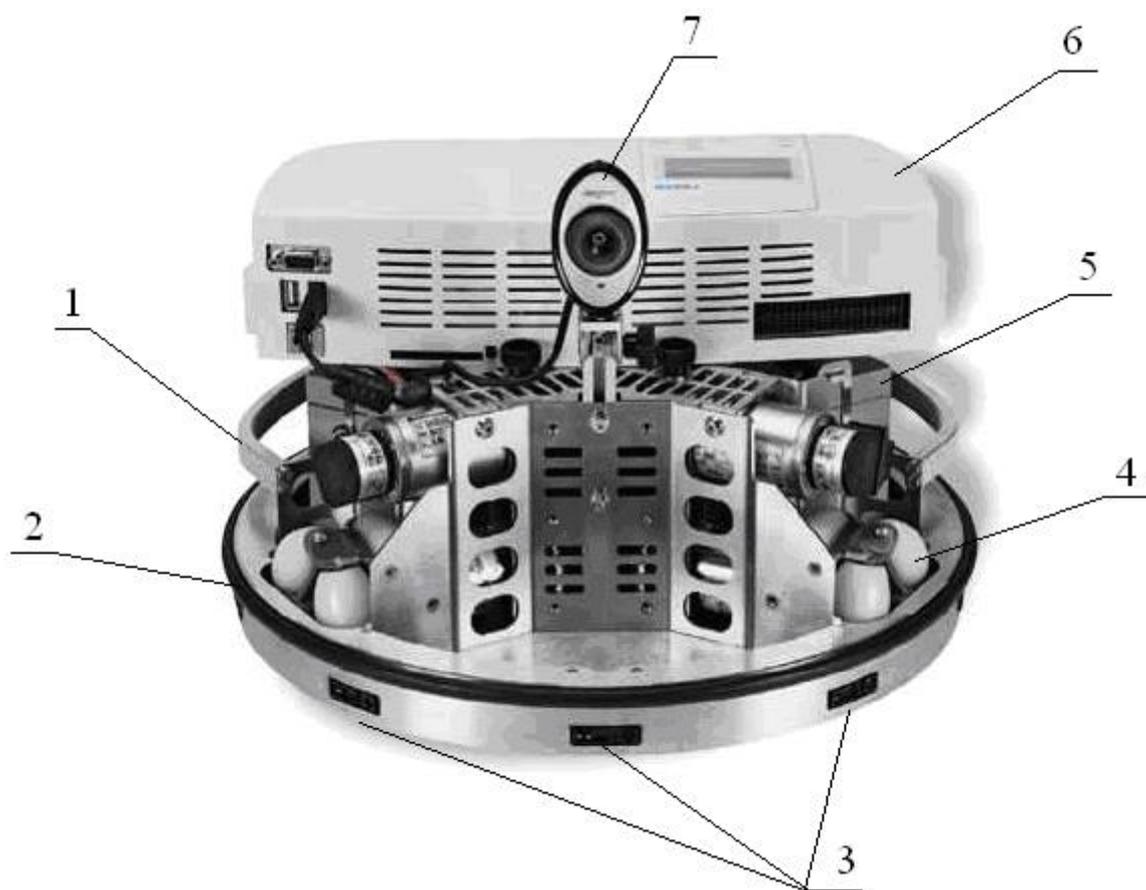


Рисунок 4.1 – Внешний вид Robotino (1 – рама, 2 – бампер для предотвращения столкновений, 3 – инфракрасные датчики, 4 – колесо с роликами, 5 – перезаряжаемые батареи, 6 – блок управления, 7 – веб-камера)

Конструкция данного робота позволяет ему двигаться в любом направлении из любого начального положения. Robotino приводится в движение тремя независимыми колесными приводами, расположенными под углом  $120^\circ$  друг

относительно друга, к которым, в свою очередь, крепятся ролики. За счет этого робот может двигаться вперед, назад и вбок под любым углом, а также вращаться вокруг своей оси. В дополнение робот оснащен веб-камерой и датчиками нескольких типов: аналоговыми инфракрасными дальномерами для определения расстояния, бинарным датчиком для защиты от столкновений и цифровыми энкодерами для определения текущих скоростей двигателей. Также могут быть установлены дополнительные датчики. Это обеспечивает возможность использования Robotino для решения широкого круга прикладных задач.

Все встроенные датчики соединяются с блоком управления через порт ввода-вывода. Блок управления включает в себя панель управления, а также встроенный процессор с картой памяти с предустановленной операционной системой и демонстрационными программами. Программы могут быть запущены непосредственно на панели управления. Также блок управления оснащен портом VGA, двумя разъемами USB и разъемом Ethernet

Robotino может быть запрограммирован с помощью специального программного пакета Robotino View, который позволяет передавать сигналы в контроллер, а также отображать, изменять и обрабатывать данные от датчиков. Помимо этого, существует возможность программировать робота через MatLab и используя языки C, C++, Java. Robotino полностью автономен, а многочисленные датчики, камера и высокопроизводительный контроллер обеспечивают его необходимым «интеллектом».

Конструкция колесного привода приведена на рисунке 4.2.

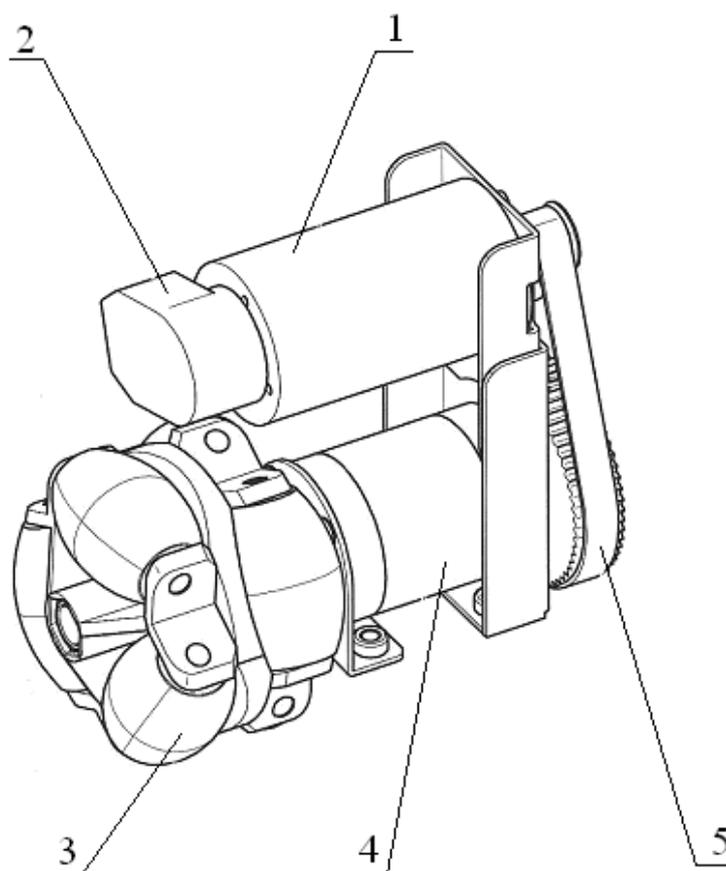


Рисунок 4.2 – Колесный привод Robotino (1 – электродвигатель постоянного тока, 2 – инкрементальный энкодер, 3 – ролик, 4 – редуктор, 5 – зубчатый ремень)

Таким образом, каждый из трех приводов включает в себя двигатель, энкодер, ролик, редуктор с числом передачи 16:1, и зубчатый ремень, с помощью которого осуществляется передача механической энергии от двигателя. С помощью энкодера осуществляется обратная связь, то есть измеряется угол поворота, вычисляется действительная скорость двигателя и сравнивается с желаемой. Технические характеристики составных частей приводов приведены в приложении А.

Robotino также оснащен камерой, высота и наклон которой могут регулироваться. Камера дает возможность получить изображение окружающей среды в реальном времени, а также управлять роботом по этому изображению, например, осуществить движение робота вдоль полосы из точек на стене с огибанием препятствий, что и будет продемонстрировано в данной главе. Программные средства разработки для Robotino, например, Robotino View,

предлагают различные варианты обработки изображений от камеры. Так, сегментатор выделяет в изображении однородные области, например, области одного цвета, и может определить положение и размер каждого сегмента. Также в изображении можно выделить линии. Это может быть использовано в задачах движения вдоль линии, слежения за каким-либо объектом и т.д.

Также в конструкцию Robotino входят 9 инфракрасных измерителей расстояния, которые установлены на корпусе под углом  $40^\circ$  относительно оптической оси друг друга. С помощью этих датчиков робот может исследовать всю окружающую обстановку, объезжать препятствия и осуществлять задачу слежения. Датчики измеряют расстояние до ближайшего объекта в диапазоне от 4 до 30 сантиметров. Каждый датчик имеет только вход для питания и один аналоговый выход.

Помимо этого, Robotino имеет датчик для предотвращения столкновений. Он представляет собой полосу на бампере, огибающую корпус по всей его окружности. Внутри находятся две проводящие поверхности, которые замыкаются при малейшем давлении. Как только происходит касание какого-либо объекта, в контроллер посылается сигнал, и движение робота останавливается.

#### *4.2 Постановка задачи и синтез математической модели системы управления*

Ставится следующая задача ([57], [58], [82]): необходимо, чтобы робот с помощью установленной на нем веб-камеры находил направляющую линию, расположенную в вертикальной плоскости и состоящую из закрасенных кругов одинакового известного радиуса и заданного цвета, и далее ехал вдоль нее на заданном расстоянии, решая тем самым задачу слежения.

Вначале необходимо получить математическую модель системы управления. Сигналом управления в данном случае будет являться переменная  $\omega^*(t)$ , определяющая угловую скорость вращения Robotino вокруг своей оси, от которой, в свою очередь, зависит напряжение, подаваемое на каждый из

двигателей. Угловые скорости каждого из трех двигателей связаны с линейными скоростями движения робота по осям  $X$  и  $Y$  в его локальной системе координат и угловой скоростью поворота корпуса вокруг своей оси следующим кинематическим соотношением [110]:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} = \frac{r}{n} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3R} & \frac{1}{3R} & \frac{1}{3R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Обратное соотношение определяется выражением:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \frac{n}{r} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & R \\ 0 & -\frac{2}{3} & R \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

где  $R$  – радиус платформы,  $r$  – радиус колеса,  $n$  – передаточное число редуктора.

Динамика же самих двигателей упрощенно описывается аperiodическим звеном первого порядка:

$$\omega_i(t) = \frac{K}{Tp+1} u_i(t), \quad i = \overline{1,3}, \quad (4.3)$$

где  $T$  – механическая постоянная времени,  $K$  – коэффициент передачи,  $u_i(t)$  – напряжение, подаваемое на двигатели.

На рисунке 4.3 изображена взаимосвязь между желаемыми и истинными линейными скоростями движения робота по осям  $X$  и  $Y$  в его локальной системе координат и угловой скоростью поворота корпуса вокруг своей оси.

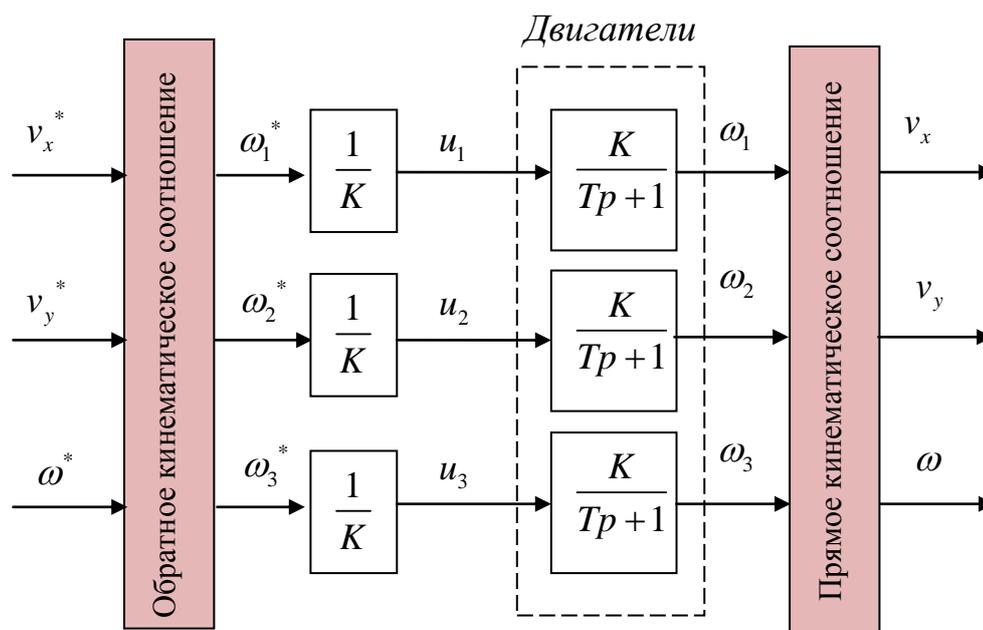


Рисунок 4.3 – Математическая модель движения робота

Из (4.1) имеем:

$$\omega(t) = \frac{r}{3Rn} (\omega_1(t) + \omega_2(t) + \omega_3(t)). \quad (4.4)$$

Подставляя (4.2) в (4.4), с учетом (4.3) получаем:

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \frac{r}{3Rn} \frac{1}{Tp+1} (\omega_1^*(t) + \omega_2^*(t) + \omega_3^*(t)) = \frac{r}{3Rn} \frac{1}{Tp+1} \frac{3Rn}{r} \omega^*(t) \\ &= \frac{1}{Tp+1} \omega^*(t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Аналогично связаны заданная скорость по оси Y с реальной:

$$v_y(t) = \frac{1}{Tp+1} v_y^*(t). \quad (4.6)$$

Таким образом, звено  $W(p) = \frac{1}{Tp+1}$  будем считать неучтенной динамикой.

Также, поскольку скорость  $v_y(t)$  в начале работы сходится к заданному постоянному значению за короткое время, определяемое постоянной времени  $T$  (см. 4.6), и далее в процессе работы не меняется, будем считать ее постоянной величиной  $v_y(t) = v_y$ .

Далее необходимо получить общую модель, которая бы связывала управляющий сигнал и текущее расстояние до задающей линии. Воспользуемся следующими соображениями. Пусть изначально ось  $Y$  локальной системы координат робота параллельна касательной к задающей линии (иными словами, камера робота направлена прямо на линию, касательная перпендикулярна оптической оси камеры). В этом случае, если линия прямая, и скорость движения  $v_y = const$ , то расстояние до линии остается постоянным. Если же появляется изгиб линии, или корпус робота поворачивается на некоторый угол, ситуация меняется (рисунок 4.4).

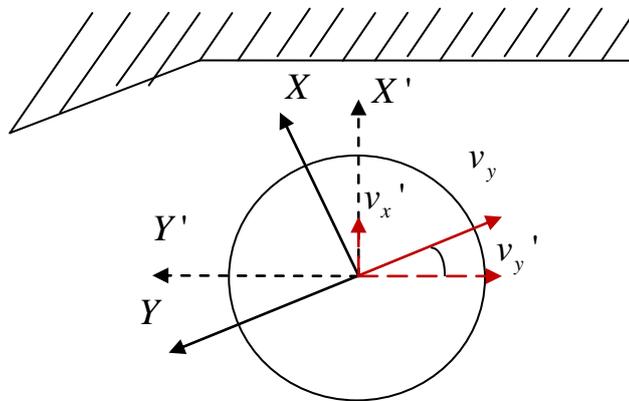


Рисунок 4.4 – Движение робота вдоль задающей линии ( $XY$  – локальная система координат робота,  $X'Y'$  – система координат, связанная с касательной к стене)

Введем новую систему координат  $X'Y'$ , где ось  $X'$  перпендикулярна касательной к стене в точке пересечения с ней. В таком случае система координат  $X'Y'$  повернута относительно  $XY$  на угол  $\varphi(t) = \varphi_r(t) - \varphi_w(t)$ , где  $\varphi_r(t)$  – угол поворота корпуса робота относительно начального положения,  $\varphi_w(t)$  – угол между касательными к задающей линии в начальной и текущей точке. При этом появляется составляющая скорости вдоль оси  $X'$  –  $v_x'(t)$ , которая и определяет скорость изменения расстояния до линии. Она определяется выражением:

$$v_x'(t) = v_y \sin \varphi(t). \quad (4.7)$$

Таким образом, угловая скорость поворота корпуса робота определяет скорость изменения угла  $\varphi_r(t)$ , а угол  $\varphi(t)$ , в свою очередь, определяет скорость изменения расстояния.

Расстояние до стены определяется через величину кругов на задающей линии путем определения их площади. Как известно, площадь круга определяется формулой  $S = \pi R^2$ , откуда радиус круга выражается как:

$$R(t) = \sqrt{\frac{S(t)}{\pi}}. \quad (4.8)$$

Зная радиус отображаемого на экране круга, можно вычислить расстояние до задающей линии. Схема обзора камеры для различных положений робота при условии, что центр круга находится на оптической оси камеры, представлена на рисунке 4.5.

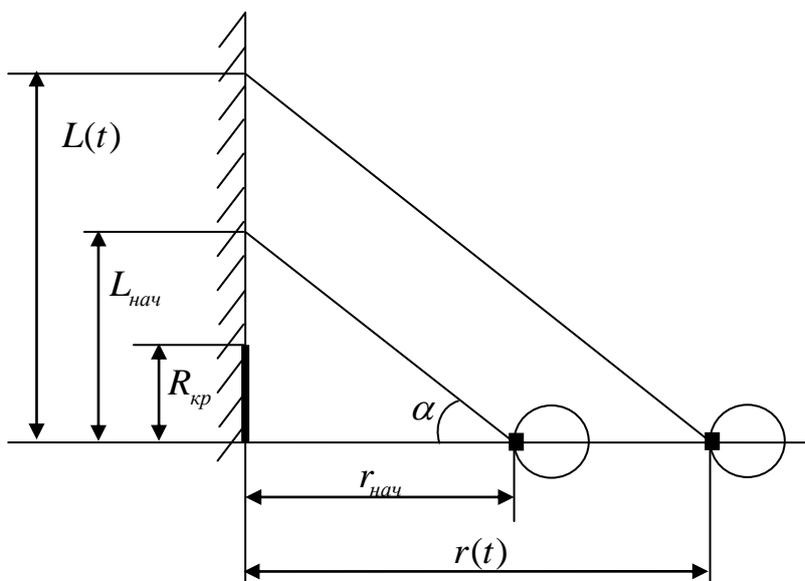


Рисунок 4.5 – Схема обзора камеры для различных положений робота ( $R_{кр}$  – радиус круга,  $r_{нач}$  – некоторое известное начальное расстояние,  $L_{нач}$  – охватываемое камерой расстояние, соответствующее  $r_{нач}$ ,  $r(t)$  – расстояние в данный момент времени,  $L(t)$  – охватываемое камерой расстояние, соответствующее  $r(t)$ ,  $\alpha$  – угол обзора камеры)

Отметим, что угол обзора камеры остается постоянным. В таком случае можно записать:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{L_{\text{нач}}}{r_{\text{нач}}} = \frac{L(t)}{r(t)} \Rightarrow r(t) = r_{\text{нач}} \frac{L(t)}{L_{\text{нач}}}. \quad (4.9)$$

Отображаемый радиус круга определяется следующим образом:

$$R_{\text{нач}} = \frac{R_{\text{кр}}}{L_{\text{нач}}} n_{\text{пкс}} \Rightarrow L_{\text{нач}} = \frac{R_{\text{кр}}}{R_{\text{нач}}} n_{\text{пкс}}, \quad (4.10)$$

$$R(t) = \frac{R_{\text{кр}}}{L(t)} n_{\text{пкс}} \Rightarrow L(t) = \frac{R_{\text{кр}}}{R(t)} n_{\text{пкс}}, \quad (4.11)$$

где  $n_{\text{пкс}}$  - половина ширины экрана в пикселях.

Подставляя (4.10) и (4.11) в (4.9), имеем:

$$r(t) = r_{\text{нач}} \frac{R_{\text{нач}}}{R(t)} \quad (4.12)$$

В итоге, необходимо для некоторого известного расстояния  $r_{\text{нач}}$  измерить отображаемый радиус  $R_{\text{нач}}$  и вычислять текущее расстояние до задающей линии по формуле (4.12). В качестве  $r_{\text{нач}}$  можно, например, использовать заданное расстояние  $r^* = r_{\text{нач}}$ .

Таким образом, задающим воздействием будет являться заданное расстояние до линии, а выходной переменной – оценка текущего расстояния, определенная через веб-камеру в данный момент времени. Обозначим ее  $\hat{r}(t)$ , так как расстояние может определяться с некоторой погрешностью. Таким образом, модель объекта управления описывается следующими выражениями:

$$\dot{\omega}(t) = -\frac{1}{T} \omega(t) + \frac{1}{T} \omega^*(t) \quad (4.13)$$

$$\dot{\varphi}_r(t) = \omega(t) \quad (4.14)$$

$$\dot{r}(t) = v_y \sin(\varphi_r(t) - \varphi_w(t)) \quad (4.15)$$

$$\hat{r}(t) = \frac{r_{\text{нач}} R_{\text{нач}} \sqrt{\pi}}{\sqrt{S(t)}} \quad (4.16)$$

С учетом вышеизложенного, можно предложить модель, представленную на рисунке 4.6.

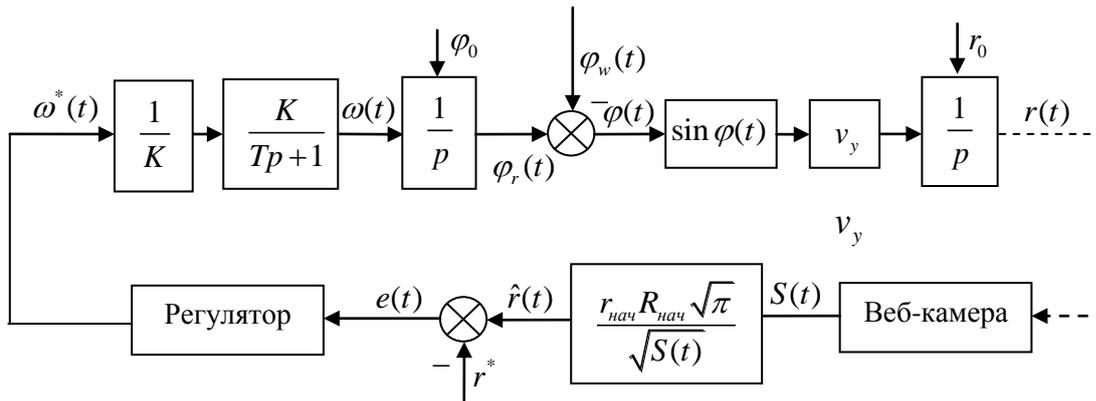


Рисунок 4.6 – Модель системы управления роботом (4.13)-(4.16)

Рассмотрим более подробно вопрос о том, как можно задать сигнал возмущения  $f(t) = \varphi_w(t)$ , зная форму траектории. Предположим для простоты, что задающая линия задается в плоскости  $O\bar{X}\bar{Y}$  некоторой гладкой функцией  $f_{tr}(\bar{x}(t))$ , причем линия начинается в начале координат, и касательная к ней в начале координат совпадает с осью  $\bar{x}$ . В таком случае угол между осью  $\bar{x}$  и касательной к задающей линии в каждой ее точке определяется соотношением:

$$\varphi_w(\bar{x}(t)) = \operatorname{arctg} \frac{df_{tr}(\bar{x}(t))}{d\bar{x}(t)} \quad (4.17)$$

Скорость движения робота вдоль осей  $\bar{x}, \bar{y}$  можно выразить следующим образом:

$$\dot{\bar{x}}_r(t) = v_{\bar{x}_r}(t) = v_y \cos \varphi_r(t) \quad (4.18)$$

$$\dot{\bar{y}}_r(t) = v_{\bar{y}_r}(t) = v_y \sin \varphi_r(t) \quad (4.19)$$

Связь между известными координатами робота  $\bar{x}_r, \bar{y}_r$  и координатой задающей линии  $\bar{x}_{tr}$  в каждый момент времени найдем из условия, что робот должен двигаться вдоль задающей линии. Иначе говоря, если опустить перпендикуляр из точки текущего положения робота на задающую линию, то касательная к его траектории должна быть параллельна касательной к задающей линии в соответствующих точках. Таким образом, зная уравнение

перпендикулярной прямой и точку, лежащую на ней, необходимо найти точку на задающей линии:

$$\bar{y}_r(t) = -\frac{1}{\left. \frac{df_{tr}(\bar{x}(t))}{d\bar{x}(t)} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_{tr}}} (\bar{x}_r(t) - \bar{x}_{tr}(t)) + f_{tr}(\bar{x}_{tr}(t)) \quad (4.20)$$

Тогда, с учетом (4.17)-(4.19) можно дополнить модель, представленную на рисунке 4.6. Расширенная модель представлена на рисунке 4.7.

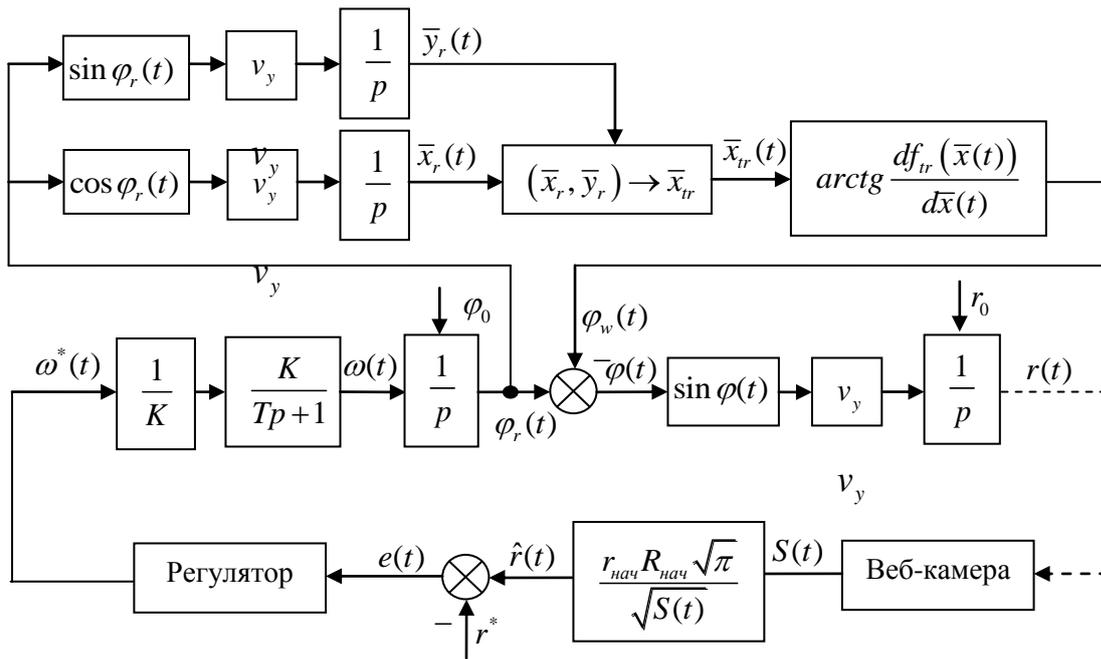


Рисунок 4.7 – Модель системы управления роботом (4.13)-(4.20)

В рассмотренной модели есть одно отличие от систем, рассматриваемых в главах 2 и 3 – наличие нелинейности в канале управления, операция взятия синуса. Однако, как известно, при малых аргументах разница между величиной синуса и самим аргументом невелика в силу первого замечательного предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Поэтому закон управления будет работать корректно только при достаточно плавных изгибах задающей линии.

### 4.3 Синтез алгоритма управления

В качестве закона управления принимается рассмотренный ранее алгоритм управления «последовательный компенсатор» (2.8), (2.9) для относительной степени объекта управления  $\rho = 2$ , поскольку динамику двигателя будем считать неучтенной. Отличие состоит в том, что для решения задачи управления роботом он должен быть реализован программно, то есть в дискретной форме. Для получения дискретной формы закона управления применим метод Эйлера, который заключается в формулах приближенного вычисления производной:

$$u(m) = \tilde{k}(m)(\xi_1(m) + \xi_{1dot}(m)), \quad (4.21)$$

$$\xi_{1dot}(m) = \frac{\xi_1(m+1) - \xi_1(m)}{T_d} = \sigma(m)(-k_1\xi_1(m) + k_1e(m)), \quad (4.22)$$

где  $T_d$  - величина интервала дискретности,  $m$  - номер интервала дискретности.

После простых преобразований закон управления приводится к следующему виду:

$$u(m) = \tilde{k}(m)[(1 - \sigma(m)k_1)\xi_1(m) - \sigma(m)k_1e(m)], \quad (4.23)$$

$$\xi_1(m+1) = (1 - T_d\sigma(m)k_1)\xi_1(m) - T_dk_1\sigma(m)e(m), \quad (4.24)$$

$$\lambda(m) = \begin{cases} \lambda_0, & |e(m)| > \delta_0 \\ 0, & |e(m)| \leq \delta_0, \end{cases} \quad (4.25)$$

$$\tilde{k}(m+1) = \tilde{k}(m) + T_d\lambda(m), \quad (4.26)$$

$$\sigma(m) = \sigma_0(\tilde{k}(m))^2. \quad (4.27)$$

### 4.4 Пример использования закона управления

Пусть имеется объект управления (4.13)-(4.15), где скорость робота вдоль оси  $Y$  его собственной системы координат  $v_y = 0,25$  м/с. Постоянную времени неучтенной динамики примем максимально возможной:  $T = 0,2$  с. Коэффициент передачи  $K$  в моделировании не участвует, поскольку управляющим сигналом

является желаемая скорость, а не непосредственно подаваемое напряжение.

Заданное расстояние до задающей линии  $r^* = 0,2$  м.

Пусть задающая линия определяется уравнением:

$$f_{mp}(\bar{x}) = -0,5\bar{x} + 0,25\sin 2\bar{x}. \quad (4.28)$$

Тогда

$$\frac{df_{mp}(\bar{x})}{d\bar{x}} = -0,5 + 0,5\cos 2\bar{x} = -\sin^2 \bar{x}, \quad (4.29)$$

при этом выполняются условия  $f_{mp}(0) = \left. \frac{df_{mp}(\bar{x})}{d\bar{x}} \right|_{\bar{x}=0} = 0$ .

Координаты робота определяются уравнениями (4.18), (4.19), а связь между ними и координатой задающей линии  $\bar{x}_{tr}$  в каждый момент времени – следующим образом:

$$\bar{y}_r = \frac{1}{\sin^2 \bar{x}_{tr}} (\bar{x}_r - \bar{x}_{tr}) - 0,5\bar{x}_{tr} + 0,25\sin 2\bar{x}_{tr}. \quad (4.30)$$

Уравнение (4.30) численно решается относительно  $\bar{x}_{tr}$  в Matlab в реальном времени с использованием блока Embedded Matlab Function.

Для отрисовки желаемой траектории воспользуемся уравнением эквидистанты [29]. Если имеется кривая, заданная параметрическими уравнениями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , то эквидистанта задается следующим образом:

$$x_{eq}(t) = x(t) \pm \frac{r^* \frac{dy(t)}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}}; \quad y_{eq}(t) = y(t) \mp \frac{r^* \frac{dx(t)}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}}, \quad (4.31)$$

где  $r^*$  - расстояние от кривой.

В данном случае эквидистанта принимает вид:

$$\bar{x}_{eq}(t) = \bar{x}_{tr}(t) + \frac{0,2\sin^2 \bar{x}_{tr}(t)}{\sqrt{1 + \sin^4 \bar{x}_{tr}(t)}}; \quad \bar{y}_{eq}(t) = \bar{y}_{tr}(t) + \frac{0,2}{\sqrt{1 + \sin^4 \bar{x}_{tr}(t)}} \quad (4.32)$$

Применяется закон управления (4.23)-(4.27) со следующими параметрами:

$$T_d = 0,05 \text{ с}, \quad k_1 = 1, \quad \lambda_0 = 2, \quad \sigma_0 = 0,3, \quad \delta_0 = 0,03 \text{ м}. \quad (4.33)$$

Результаты моделирования для системы при  $r_0 = 0,4$  м представлены на рисунках 4.8 – 4.12.

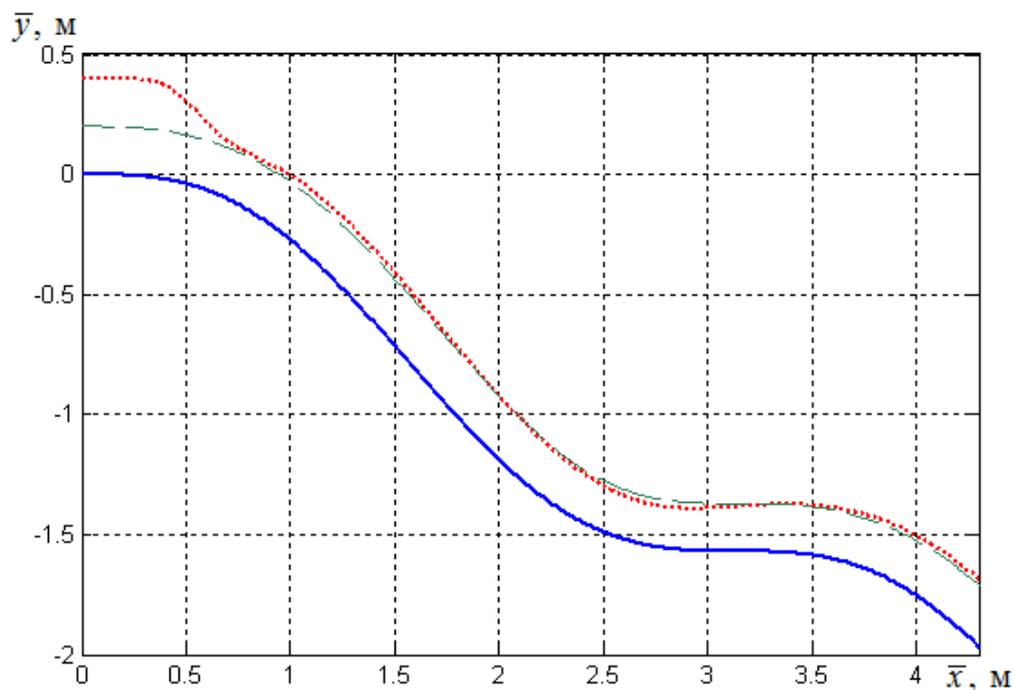


Рисунок 4.8 – Графики движения робота вдоль задающей линии ( — задающая линия, — — — эквидистанта (желаемая траектория), ..... - траектория робота)

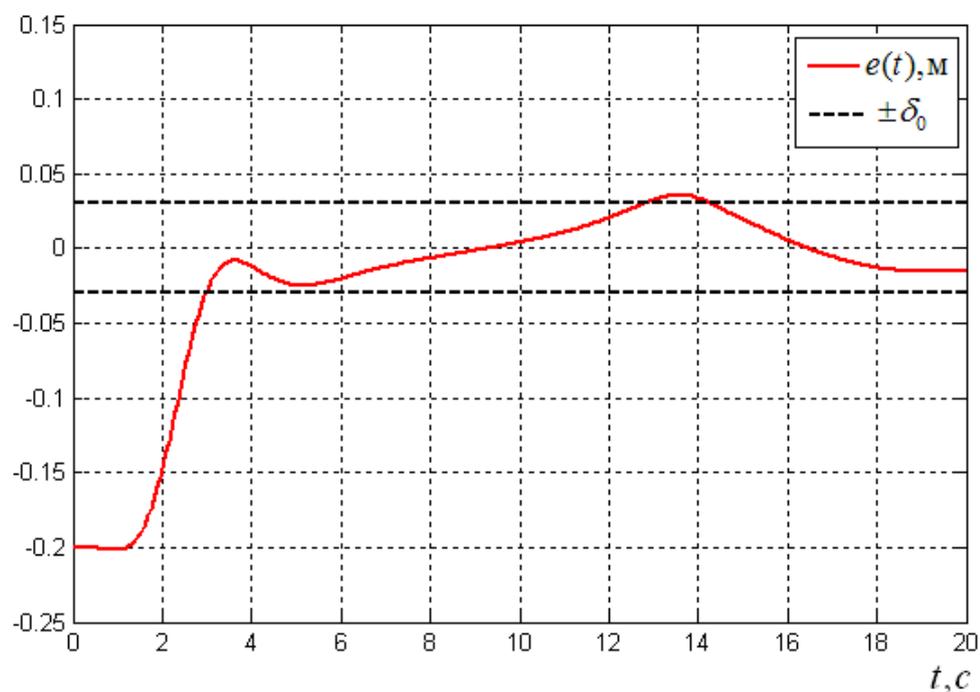


Рисунок 4.9 – График ошибки слежения в системе (4.13)-(4.15), (4.23)-(4.30), (4.32), (4.33)

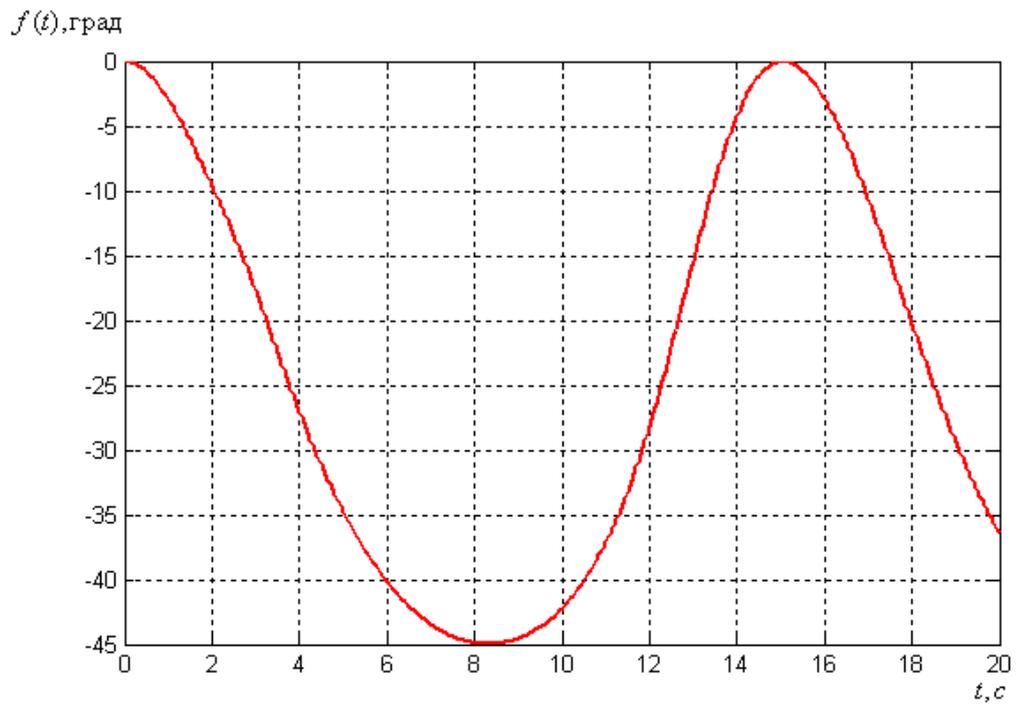


Рисунок 4.10 – График сигнала возмущения в системе (4.13)-(4.15), (4.23)-(4.30), (4.32), (4.33)

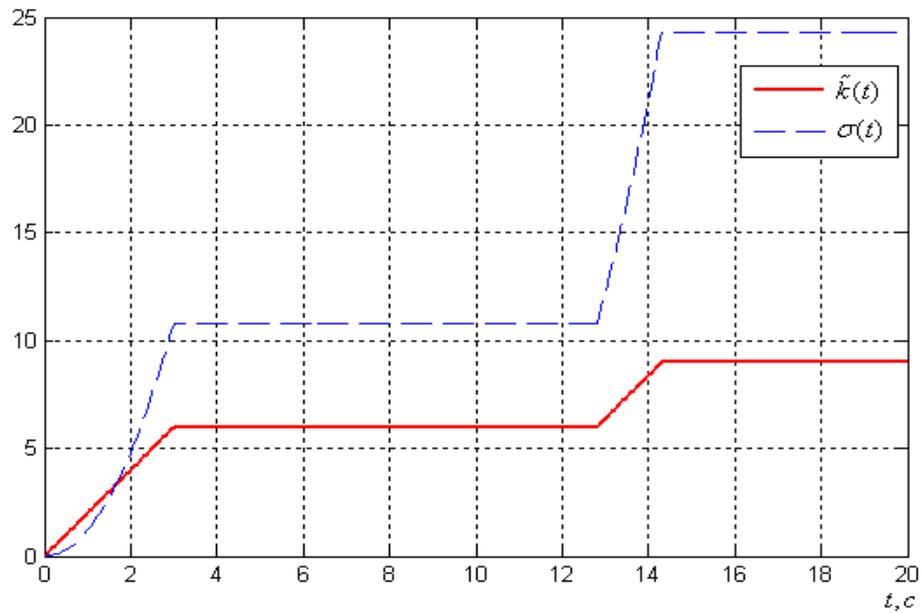


Рисунок 4.11 – Графики адаптивной настройки параметров регулятора (4.23)-(4.27), (4.33)

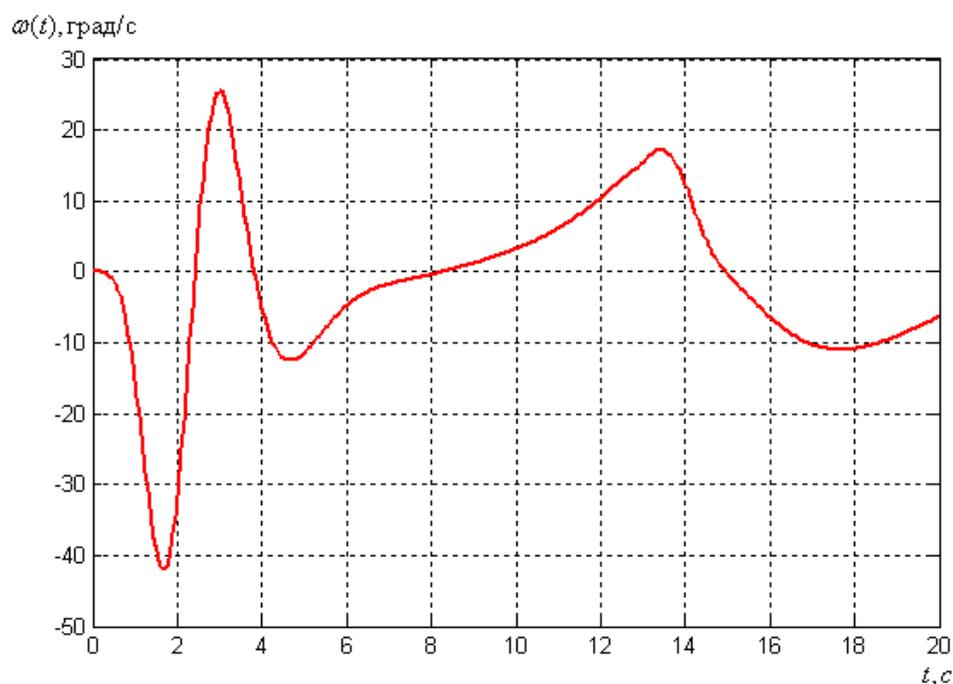


Рисунок 4.12 – Графики угловой скорости поворота робота в системе (4.13)-(4.15), (4.23)-(4.30), (4.32), (4.33)

Таким образом, по результатам моделирования ошибка слежения сошла в заданную окрестность за время  $t = 14,2$  с. Однако необходимо отметить, что в моделировании не учитываются погрешности оценки расстояния, которые могут быть связаны с неравномерным освещением различных участков задающей линии, искажением формы кругов на изображении при взгляде на них под углом и т.д. Поэтому реальные переходные процессы будут отличаться от полученных при моделировании.

#### *4.5 Реализация закона управления на мобильном роботе «Robotino»*

Задача управления роботом решается в два этапа. На первом шаге осуществляется поиск направляющей линии. Робот движется вперед в направлении оптической оси веб-камеры до тех пор, пока не встречает препятствие, о чем сигнализируют дальномеры. После этого осуществляется поворот вокруг своей оси по часовой стрелке до тех пор, пока в направлении движения не исчезнет препятствие. Затем робот снова движется вперед.

Параллельно осуществляется обработка изображения, формируемого веб-камерой, на предмет наличия сегментов направляющей линии (кругов). Как только они найдены, осуществляется второй шаг – движение вдоль направляющей, перпендикулярно оптической оси веб-камеры. Здесь реализуется рассмотренный выше закон управления. Угловая скорость вращения робота вокруг своей оси управляется с помощью «последовательного компенсатора». Поскольку осуществляется управление скоростью электродвигателей, присутствует и неучтенная динамика, связанная с механикой и переходными процессами в электрических цепях.

Вид блок-схемы алгоритма в среде Robotino View представлен на рисунке 4.13.

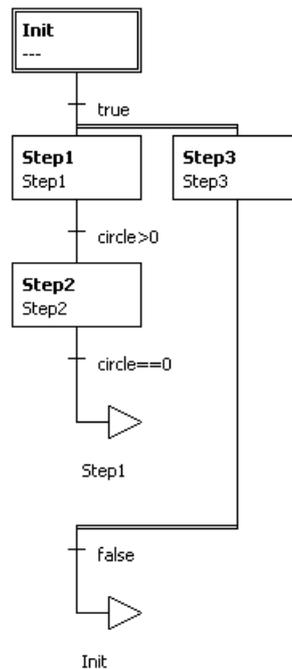


Рисунок 4.13 – Блок-схема алгоритма управления мобильным роботом в среде Robotino View

При запуске программы происходит инициализация (Init на рисунке 4.13), а далее параллельно запускаются два процесса: первый – движение вперед с объездом препятствий (Step1) при отсутствии направляющей линии ( $circle == 0$ ) или движение вдоль направляющей линии (Step2) при ее наличии ( $circle > 0$ ), и

второй – распознавание направляющей линии (Step3) в виде сегментов заданного цвета.

Проведенный эксперимент подтверждает эффективность полученного закона управления. График ошибки слежения представлен на рисунке 4.14.

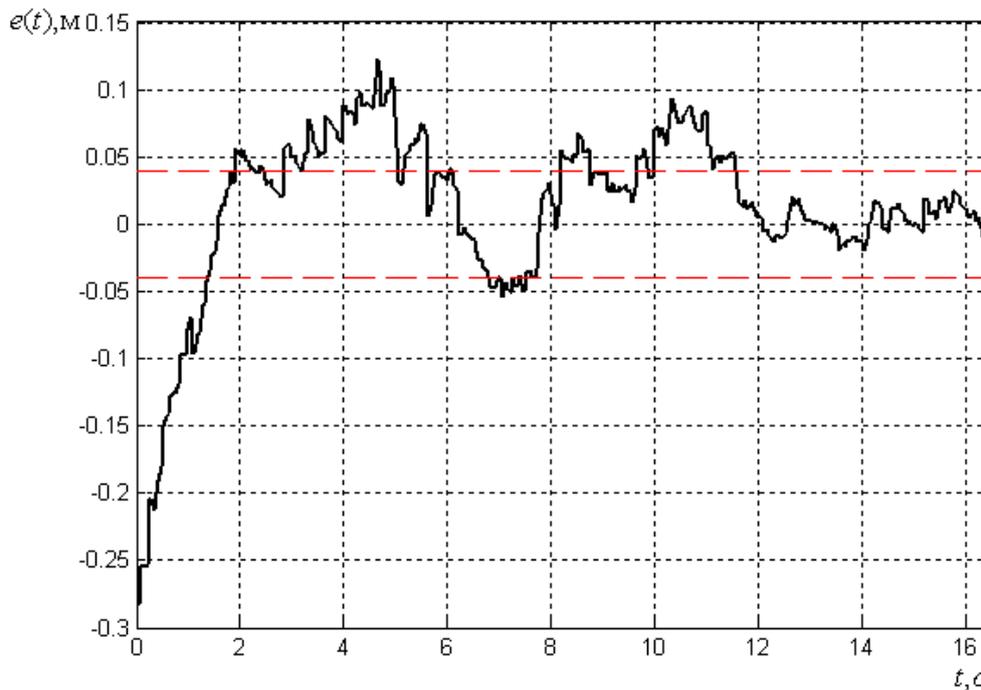


Рисунок 4.14 – График ошибки слежения при движении Robotino с регулятором (4.23)-(4.27)

График управляющего воздействия представлен на рисунке 4.15.

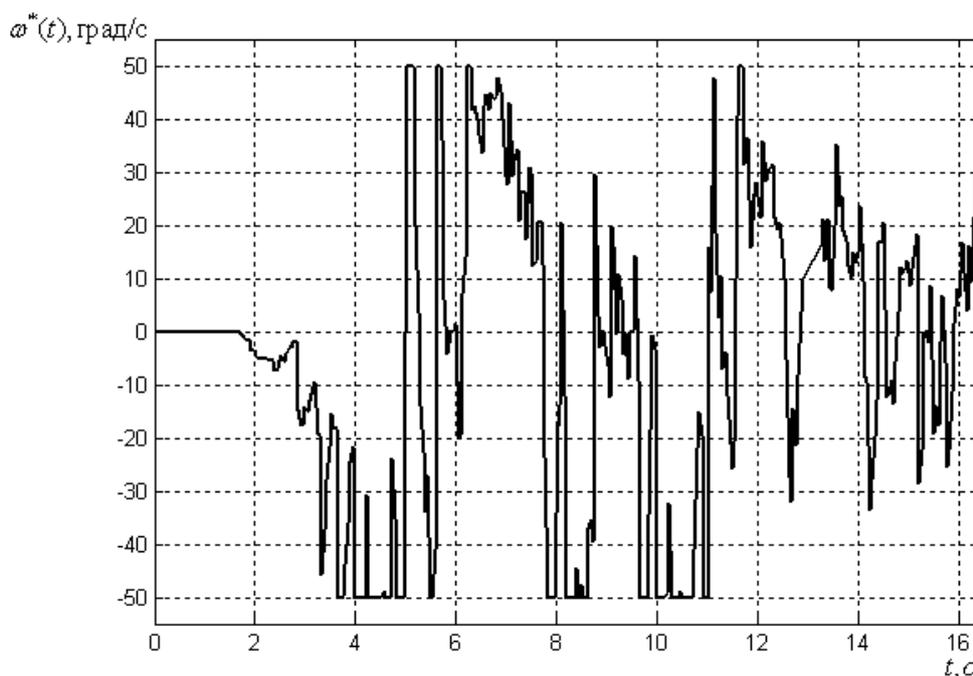


Рисунок 4.15 – График сигнала, управляющего скоростью поворота Robotino вокруг своей оси при движении вдоль неизвестной траектории с регулятором (4.23)-(4.27)

По результатам видно, что ошибка слежения сходится в заданную окрестность.

Таким образом, эксперимент подтверждает эффективность полученного закона управления.

#### *4.6 Выводы по главе 4*

В данной главе рассмотрено применение алгоритма управления «последовательный компенсатор» к задаче управления всенаправленным мобильным роботом Robotino. Решаемая задача заключается в синтезе управляющего сигнала, позволяющего роботу двигаться на заданном расстоянии от направляющей линии, состоящей из определенных маркеров, в данном случае – кругов заданного цвета. Рассмотрена конструкция робота, получена математическая модель системы управления. Отдельно рассмотрен вопрос моделирования системы в пакете MATLAB. Приведены результаты моделирования, показывающие работоспособность рассматриваемого метода, а также проведен эксперимент на реальном роботе, подтверждающий полученные

результаты. Алгоритм управления роботом реализован программно в среде визуального программирования Robotino View.

Результаты данной главы опубликованы в [57], [58], [82].

## Заключение

В данной работе решена задача адаптивного управления минимально-фазовыми нелинейными одноканальными и многоканальными объектами с запаздыванием по состоянию в условиях параметрической и структурной неопределенности, а также действия неизвестных ограниченных возмущений.

Проведен обзор существующих методов адаптивного управления и в целом методов управления объектами, включающими неучтенную динамику, запаздывание, подверженными действию возмущения. Также уделено внимание многоканальным системам, то есть сетям взаимосвязанных объектов.

Поставлена задача стабилизации одноканальных минимально-фазовых нелинейных объектов с запаздыванием по состоянию и неучтенной динамикой в условиях параметрической неопределенности. Рассмотрены случаи отсутствия и наличия неизвестного внешнего возмущения. Доказано, что алгоритм управления «последовательный компенсатор» обеспечивает выполнение цели управления, то есть при отсутствии возмущения замкнутая система оказывается экспоненциально устойчивой, а при его наличии все ее траектории сходятся в сколь угодно малую заданную окрестность положения равновесия и ограничены некоторой экспонентой. Настройка параметров регулятора при этом осуществляется адаптивно. Рассмотрен также вариант, при котором известна только максимальная относительная степень. В этом случае закон управления модифицируется, что обеспечивает решение поставленной задачи. Эффективность представленного подхода проиллюстрирована моделированием задач стабилизации и слежения за ограниченным по амплитуде задающим воздействием.

Задача адаптивного и робастного управления одноканальными минимально-фазовыми нелинейными объектами с запаздыванием по состоянию и неучтенной динамикой в условиях параметрической неопределенности обобщена на многоканальные объекты управления, математическая модель которых представляет собой известное количество взаимосвязанных подсистем,

представляемых минимально-фазовой нелинейной моделью с запаздыванием по состоянию и неучтенной динамикой в условиях параметрической неопределенности и внешних возмущений. Доказано, что применение закона управления «последовательный компенсатор» для каждой подсистемы позволяет свести все траектории многоканальной системы в сколь угодно малую заданную окрестность положения равновесия за конечное время, причем траектории ограничены некоторой экспонентой. Рассмотрен случай, когда известна только максимальная относительная степень каких-либо подсистем, а также примеры моделирования задач стабилизации и слежения за ограниченным по амплитуде задающим воздействием.

Полученные теоретические результаты были применены к практической задаче управления всенаправленным мобильным роботом «Robotino». Получена математическая модель объекта управления для задачи движения всенаправленного робота вдоль направляющей линии. Проведено моделирование движения робота, иллюстрирующее работоспособность предлагаемого подхода. Наконец, проведен реальный эксперимент, подтверждающий полученные результаты.

## Литература

1. Агаев, Р.П. Лапласовские спектры орграфов и их приложения [Текст] / Р.П. Агаев, П.Ю.Чеботарев // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 5. – С. 47-62.
2. Акунов, Т.А. Матричные уравнения в задачах управления и наблюдения непрерывными объектами [Текст] / Т.А.Акунов, С. Алишеров, Р.О. Оморов [и др.]. – Бишкек: Илим, 1991.
3. Андреев, А.Ю. Управление конечномерными линейными объектами [Текст] / А.Ю. Андреев. – М.: Наука, 1976.
4. Андриевский, Б.Р. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB [Текст] / Б.Р.Андриевский, А.Л. Фрадков. – СПб.: Наука, 1999.
5. Белов, С.В. Синтез прямого управления для систем с неявно заданной моделью при помощи адаптивных наблюдателей [Текст] / С.В. Белов // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления – М.: Науч. Совет по кибернетике АН СССР, 1979. – С. 5-18.
6. Бобцов, А.А. Алгоритм робастного управления линейными объектами по выходу с компенсацией неизвестного детерминированного возмущения [Текст] / А.А. Бобцов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2003. – №2. – С. 93-97.
7. Бобцов, А.А. Алгоритм робастного управления неопределенным объектом без измерения производных регулируемой переменной [Текст] / А.А. Бобцов // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №8. – С. 82-96.
8. Бобцов, А.А. Робастное управление по выходу линейной системой с неопределенными коэффициентами [Текст] / А.А. Бобцов // Автоматика и телемеханика. – 2002. – №11. – С. 108-117.
9. Бобцов, А.А. Стабилизация нелинейных систем по выходу в условиях запаздывания [Текст] / А.А. Бобцов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2008. – № 2. – С. 21-28.

10. Бобцов, А.А. Компенсация неизвестного мультигармонического возмущения для нелинейного объекта с запаздыванием по управлению [Текст] / А.А. Бобцов, С.А. Колюбин, А.А. Пыркин // *АиТ*. – 2010. – № 11. – С. 136-148.
11. Бобцов, А.А. Адаптивное управление по выходу линейными нестационарными объектами [Текст] / А.А. Бобцов, А.Г. Наговицына // *Автоматика и телемеханика*. – 2006. – № 12. – С. 163-174.
12. Бобцов, А.А. Управление по выходу линейными системами с неучтенной динамикой [Текст] / А.А.Бобцов, Н.А. Николаев // *Автоматика и телемеханика*. – 2009. – № 6. – С. 115-122.
13. Бобцов, А.А. Алгоритм управления по выходной переменной для линейного объекта с неизвестными параметрами и динамической размерностью [Текст] / А.А. Бобцов, А.А. Пыркин // *Научно-технический вестник СПбГУИТМО*. – 2011. – № 4. – С. 160-161.
14. Бобцов, А.А. Управление по выходу нелинейными системами с запаздыванием в условиях неучтенной динамики [Текст] / А.А. Бобцов, М.В. Фаронов // *Известия РАН. Теория и системы управления*. – 2011. – № 3. – С. 79-87.
15. Борцов, Ю.А. Электромеханические системы с адаптивным и модальным управлением [Текст] / Ю.А. Борцов, Н.Д. Поляхов, В.В. Путов. – Ленинград: Энергоатомиздат, 1984. – 216 с.
16. Бобцов, А.А. Адаптивное управление по выходу многоканальными линейными стационарными параметрически неопределенными системами [Текст] / А.А. Бобцов, М.В. Фаронов, И.Б. Фуртат [и др.] // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. – 2014. – №6 (94). – С. 63-71.
17. Брусин, В.А. Использование теории абсолютной устойчивости для построения некоторого класса адаптивных систем. Динамика систем (межвузовский сб.) [Текст] / В.А. Брусин. – Горький: Изд-во Горьковск. ун-та, 1977. – № 12. – С. 67-73.

18. Брусин, В.А. Некоторые задачи адаптивной подстройки динамических систем [Текст] / В.А. Брусин // Динамика систем. Оптимизация и адаптация.— Горький: Изд-во Горьковского университета, 1979. – С. 3-18.
19. Брусин, В.А. Об одном классе сингулярно возмущенных адаптивных систем [Текст] / В.А. Брусин // АиТ. – 1995. – №4. – С. 119-127.
20. Брусин, В.А. Синтез беспойсковой самонастраивающейся системы методом теории абсолютной устойчивости [Текст] / В.А. Брусин // Автоматика и телемеханика. –1978. – № 7. – С. 61-67.
21. Брусин, В.А. Об одном классе непрерывных алгоритмов адаптивного управления [Текст] / В.А. Брусин, Лапшина М.В. // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 10. – С. 81-90.
22. Брусин, В.А. Об адаптивном регулировании одного класса нелинейных систем с последействием [Текст] / В.А. Брусин, Е.Я. Угриновская // Автоматика и телемеханика. – 1988. – № 8. – С.97-105.
23. Брусин, В.А. О децентрализованном адаптивном управлении с эталонной моделью [Текст] / В.А. Брусин, Е.Я. Угриновская // Автоматика и телемеханика. – 1996. – №12. – С. 67-77.
24. Буков, В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем [Текст] / В.Н. Буков. – Калуга: Изд-во научной литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. – 720 с.
25. Бутузов, В.Ф. Асимптотические формулы для решения системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных на полубесконечном промежутке [Текст] / В.Ф. Бутузов // Вест. МГУ. – 1963. – №4. – С. 3-14.
26. Воронов, А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем [Текст] / А.А. Воронов. – М.: Наука, 1985.
27. Воронов, А.А. Современное состояние и перспективы развития адаптивных систем [Текст] / А.А. Воронов, В.Ю. Рутковский // Вопросы кибернетики. Проблемы теории и практики адаптивного управления— М.: Науч. совет по кибернетике АН СССР, 1985. – С. 5-48.

28. Воронов, К.В. Динамический регулятор выходной переменной с компенсацией постоянных возмущений [Текст] / К.В. Воронов, В.О. Никифоров // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №2. – С.11-21.
29. Гозбенко, В.Е. Использование эквидистант для решения прикладных задач управления техническими системами [Текст] / В.Е. Гозбенко, Е.М. Лыткина. – Иркутск: ИрГУПС, 2010. – 188 с.
30. Григорьев, В.В. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ [Текст] / В.В. Григорьев, В.Н. Дроздов, В.В. Лаврентьев, А.В. Ушаков. – Л.: Машиностроение, 1983.
31. Дмитриев, М.Г. Сингулярные возмущения в задачах управления [Текст] / М.Г. Дмитриев, Г.А. Курина // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 1. – С. 3-51.
32. Джунусов И. А., Фрадков А. Л., Синхронизация в сетях линейных агентов с обратными связями по выходам [Текст] // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №8. – С. 41-52.
33. Джунусов, И.А. Адаптивная синхронизация сети взаимосвязанных нелинейных систем Лурье [Текст] / И.А. Джунусов, А.Л. Фрадков // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 7. – С. 111-126.
34. Емельянов, С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой [Текст] / С.В. Емельянов. – М.: Наука, 1967.
35. Земляков, С.Д. Алгоритм функционирования адаптивной системы с эталонной моделью, гарантирующий заданную динамическую точность управления нестационарным динамическим объектом в условиях неопределенности [Текст] / С.Д. Земляков, В.Ю. Рутковский // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 10. – С.35-44.
36. Земляков, С.Д. Синтез алгоритмов изменения перестраиваемых коэффициентов в самонастраивающейся системе с эталонной моделью [Текст] / С.Д. Земляков, В.Ю. Рутковский // Доклады РАН. – 1967. – Т. 174, № 1. – С. 47-49.

37. Колесников, А.А. Синергетическая теория управления [Текст] / А.А. Колесников. – М.: Энергоатомиздат, 1994.
38. Климушев, А.И. Равномерная асимптотическая устойчивость системы дифференциальных уравнений с малыми параметрами при производных [Текст] / А.И. Климушев, Н.Н.Красовский // Прикл. мат. и механика. – 1961. – Т.25, №4. – С.680-694.
39. Краснова, С.А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем [Текст] / С.А. Краснова, В.А.Уткин. – М.: Наука, 2006.
40. Лурье, А.И. О теории устойчивости систем управления [Текст] / А.И. Лурье, В.Н. Постников // Прикладная математика и механика.– 1944. – Т.8, №3.
41. Мееров, М.В. Системы многосвязного регулирования [Текст] / М.В. Мееров. М.: Наука, 1965.
42. Миркин, Б.М. Адаптивное децентрализованное управление с модельной координацией [Текст] / Б.М. Миркин // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 1. – С. 90-100.
43. Мирошник, И.В. Синтез линейных систем автоматического управления [Текст] / И.В. Мирошник, В.О. Никифоров. – СПб.: Изд-во СПбГИТМО, 2000.
44. Мирошник, И.В. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами [Текст] / И.В. Мирошник, В.О. Никифоров, А.Л. Фрадков. – СПб.: Наука, 2000.
45. Митропольский, Ю.А. Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики [Текст] / Ю.А. Митропольский, Г.П. Хома. – Киев: Наук. Думка, 1971.
46. Моисеев, Н.Н. Математические задачи системного анализа [Текст] / Н.Н. Моисеев. – М: Наука, 1981.
47. Никифоров, В.О. Наблюдатели внешних детерминированных возмущений. 1. Объекты с известными параметрами [Текст] / В.О. Никифоров // Автоматика и телемеханика. – 2004. – №10. – С. 13–24.

48. Никифоров, В.О. Наблюдатели внешних детерминированных возмущений. 2. Объекты с неизвестными параметрами [Текст] / В.О. Никифоров // Автоматика и телемеханика. – 2004. – №11. – С. 40–48.
49. Никифоров, В.О. Нелинейная система управления с компенсацией внешних детерминированных возмущений [Текст] / В.О. Никифоров // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1997. – № 4. – С. 69-73.
50. Никифоров, В.О. Робастное управление линейным объектом по выходу [Текст] / В.О. Никифоров // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 9. – С.87-99.
51. Паршева, Е.А. Адаптивное децентрализованное управление многосвязными объектами со скалярными входом и выходом с неминимальной реализацией эталонной модели [Текст] / Е.А. Паршева // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 8. – С. 118-127.
52. Поляк, Б.Т. Робастная устойчивость и управление [Текст] / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
53. Пыркин, А.А. Адаптивный алгоритм компенсации параметрически не определенного смещенного гармонического возмущения для линейного объекта с запаздыванием в канале управления [Текст] / А.А. Пыркин // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 8. – С. 62-78.
54. Уонем, М. Линейные многомерные системы: Геометрический подход [Текст] / М. Уонем. – М.: Наука, 1980.
55. Фаронов, М.В. Адаптивное и робастное управление нелинейными системами с неучтенной динамикой [Текст] / М.В. Фаронов, А.А. Пыркин // Материалы докладов XIII конференции молодых ученых "Навигация и управление движением". – Санкт-Петербург, 2011. – С. 277-284.
56. Фаронов, М.В. Адаптивное управление нелинейными системами с неточно заданной относительной степенью в условиях полной параметрической неопределенности [Текст] / М.В. Фаронов, А.А. Пыркин // Материалы докладов XIV конференции молодых ученых "Навигация и управление движением". – Санкт-Петербург, 2012. – С. 498-505.

57. Фаронов, М.В. Адаптивное управление мобильным роботом с использованием системы технического зрения [Текст] / М.В. Фаронов, А.А. Пыркин // Сборник тезисов докладов конгресса молодых учёных – СПб.: НИУИТМО, 2013. – Выпуск 1. – С. 179-180.
58. Фаронов, М.В. Робастное управление мобильными роботами с использованием технического зрения [Текст] / М.В. Фаронов, А.А. Пыркин, И.Б. Фуртат [и др.] // Известия ВУЗов. Приборостроение. – 2012. – №12 (55). – С. 63-65.
59. Фомин, В.Н. Адаптивное управление динамическими объектами [Текст] / В.Н. Фомин, А.Л. Фрадков, В.А. Якубович. – М.: Наука, Гл. ред. физ-мат лит., 1981. – 448 с.
60. Фрадков, А.Л. Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы [Текст] / А. Л. Фрадков. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
61. Фрадков, А.Л. Синтез адаптивных систем управления нелинейными сингулярно возмущенными объектами [Текст] / А.Л. Фрадков // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 6. – С. 100-110.
62. Фрадков, А.Л. Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта [Текст] / А.Л. Фрадков // Автоматика и телемеханика. – 1974. – № 12. – С.96-103.
63. Фуртат, И.Б. Робастная синхронизация динамической сети с компенсацией возмущений [Текст] / И.Б. Фуртат // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 12. – С.104-114.
64. Фуртат, И.Б. Консенсусное управление линейной динамической сетью по выходу с компенсацией возмущений [Текст] / И.Б. Фуртат // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2011. – № 4. – С. 12-18.
65. Фуртат, И.Б. Субоптимальное управление нелинейными мультиагентами системами [Текст] / И.Б. Фуртат // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2013. – № 1 (83). – С. 19-23.

66. Фуртат, И.Б. Робастное управление определенным классом неминимально-фазовых динамических сетей [Текст] / И.Б. Фуртат // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2014. – № 1. – С. 35-48
67. Фуртат, И. Б. Адаптивное управление объектами с неизвестной относительной степенью [Текст] / И. Б. Фуртат, А. М. Цыкунов // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 6. – С.109-118.
68. Фуртат, И.Б. Робастное управление нестационарными объектами с неизвестной переменной относительной степенью [Текст] / И.Б. Фуртат, А.М. Цыкунов // Управление большими системами. – 2011. – № 33. – С. 91-112.
69. Цыкунов, А.М. Адаптивное и робастное управление динамическими объектами [Текст] / А.М. Цыкунов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 268 с.
70. Цыкунов, А.М. Алгоритм робастного управления нестационарным линейным объектом с компенсацией возмущения [Текст] / А.М. Цыкунов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2008. – № 4. – С. 33-40.
71. Цыкунов, А.М. Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений [Текст] / А.М. Цыкунов // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 7. – С. 103-115.
72. Цыкунов, А.М. Децентрализованное робастное управление многосвязными структурно неопределенными объектами [Текст] / А.М. Цыкунов // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 12. – С. 111-121.
73. Цыкунов, А.М. Модифицированный адаптивный алгоритм высокого порядка для управления линейным объектом по выходу [Текст] / А.М. Цыкунов // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 8. – С. 143-152.
74. Цыпкин, Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах [Текст] / Я.З. Цыпкин. – М.: Наука, 1968. – 400 с.
75. Чеботарев, П.Ю. Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов [Текст] / П.Ю. Чеботарев, Р.П. Агаев // АиТ. – 2009. – № 3. – С. 136-151.

76. Якубович, В.А. Адаптивная стабилизация непрерывных линейных объектов [Текст] / В.А. Якубович // Автоматика и телемеханика. – 1988. – №4. – С. 97-107.
77. Aldhaferi, R.W. Effect of unmodeled actuator dynamics on output feedback stabilization of nonlinear systems [Текст] / R.W. Aldhaferi, H.K. Khalil // Automatica. – 1996. – Vol. 32, № 9. – P. 1323-1327.
78. Atassi, A.N. A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems [Текст] / A.N.Atassi, H.K. Khalil // IEEE Trans. Automat. Control. – 1999. – Vol. 44, № 9. – P. 1672–1687.
79. Bobtsov, A. Adaptive Control of Linear MIMO Systems [Текст] / A. Bobtsov, M. Faronov, I. Furtat [et al.] // Proceedings of The 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). – 2014. – P. 678-683.
80. Bobtsov, A. Output Control for Time-Delay Nonlinear System Providing Exponential Stability [Текст] / A. Bobtsov, A. Pyrkin, M. Faronov // Proceedings of The 19th Mediterranean Conference on Control and Automation – 2011. – P. 515-520.
81. Bobtsov, A. Robust Output Stabilization of Time-Delay Nonlinear System [Текст] / A. Bobtsov, A. Pyrkin, M. Faronov [et al.] // Proceedings of The 18th IFAC World Congress. – 2011. – P. 5124-5129.
82. Bobtsov, A. Simple Adaptive Tracking Control for Mobile Robots [Текст] / A. Bobtsov, M. Faronov, S. Kolyubin, A. Pyrkin // 10th International Conference on Mathematical Problems, Engineering, Aerospace and Sciences: ICNPAA 2014. – Vol. 1637, № 1. – P. 1433-1441.
83. Bullo, F. Distributed control of robotic networks [Текст] / F. Bullo, J. Cortez, S. Martinez. – Princeton Univ. Press, 2009.
84. Burton, T.A. Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations [Текст] / T.A. Burton. – Academic Press, 1985.

85. Byrnes, C.I. Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems [Текст] / C.I. Byrnes, A. Isidori // IEEE Trans. Automat. Control. – 1991. – vol.36, №10. – P.1122-1137.
86. Cao, C. L1 adaptive controller for systems in the presence of unmodelled actuator dynamics [Текст] / C. Cao, N. Hovakimyan // Proc. 46th IEEE Conference on Decision and Control. – 2007. – P.891-896.
87. Chai, T.Y. A new model reference robust adaptive controller in the presence of unmodeled dynamics and bounded disturbances [Текст] / T.Y. Chai, T. Zhang // Automatica. – 1994. – vol.30, №5 – P. 865-869.
88. Druzhinina, M.V. Adaptive decentralized control of interconnected systems [Текст] / M.V. Druzhinina, A.L. Fradkov // Proc. 14th IFAC World Congress. – 1999. – V. 50. – P. 175-180.
89. Faronov, M. Adaptive and Robust Control of Disturbed Nonlinear Nonstationary Systems with Unknown Relative Degree [Текст] / M. Faronov, A. Pyrkin // Proceedings of The 14th International Student Olympiad on Automatic Control BOAC. – Saint-Petersburg: NIUITMO. – 2011. – P. 25-30.
90. Faronov, M. Adaptive Output Control of Disturbed Time-Delay Nonlinear System in Condition of Full Parametric Uncertainty [Текст] / M. Faronov, A. Pyrkin // Proceedings of The 13th International Student Olympiad on Automatic Control BOAC. – Saint-Petersburg: Polytechnic University. – 2010. – P. 64-69.
91. Fax, J.R. Information flow and cooperative control of vehicle formations [Текст] / J.R. Fax, R.M. Murray // IEEE Trans. Automat. Control. – 2004. – Vol. 49. – P. 1465-1476.
92. Gavel, D. Decentralized adaptive control [Текст] / D. Gavel, D. Siljak // IEEE Trans. Autom. Control. – 1989. – Vol. AC-34, № 4. – P. 413-426.
93. Ge, S.S. Adaptive neural network control of nonlinear systems with unknown time delays [Текст] / S.S. Ge, F. Hong, T.H. Lee // IEEE Trans. Automat. Control. – 2003. – Vol.48, № 11. – P.2004 – 2010.
94. Germani, A. Input-output linearization with delay cancellation for nonlinear delay systems: the problem of the internal stability [Текст] / A. Germani, C. Manes, P.

- Pepe // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2003. – Vol.13, № 9. – P.909-937.
95. Germani A., Manes C. On the existence of the linearizing state-feedback for nonlinear delay systems [Текст] / A. Germani, C. Manes // Conf. Decision and Control. – 2001. – P.4628-4629.
96. Gu, K. Stability of time-delay systems [Текст] / K. Gu, V.L. Kharitonov, J. Chen. – Boston: Birkhauser, 2003.
97. He, Y. Absolute stability for multiple delay general Lurie control systems with multiple nonlinearities [Текст] / Y. He, M. Wu // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2003. – №159. – P.241-248.
98. Hoagg, J.B. Direct adaptive command following and disturbance rejection for minimum phase systems with unknown relative degree [Текст] / J.B. Hoagg, D.S. Dernstein // Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing. – 2007. – Vol. 21, №1. – P. 49-75.
99. Hsu, L. Bursting phenomena in continuous-time adaptive systems with a  $\sigma$ -modification [Текст] / L. Hsu, R.R. Costa // IEEE Trans. Automat. Control. – 1987. – Vol.32, №1 – P.84-86.
100. Hua, C. Robust stabilization of uncertain dynamic time delay systems with unknown bounds of uncertainties [Текст] / C.Hua, C. Long, X. Guan // Amer. Control Conf. – 2002. – P.3365-3370.
101. Ioannou, P.A. Robust redesign of adaptive control [Текст] / P.A. Ioannou, P.V. Kokotovic // IEEE Trans. Automat. Control. –1984. – Vol.29, №3. – P. 202-211.
102. Ioannou, P.A. A robust adaptive controller [Текст] / P.A. Ioannou, K. Tsakalis // IEEE Trans. Autom. Control. – 1984. – Vol. AC-31. – P. 1033-1043.
103. Jadbabaie, A. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rule [Текст] / A. Jadbabaie, J. Lin, A.S. Morse // IEEE Trans. Automat. Control. – 2003. – V. 48, №6. – P. 988-1001.
104. Kanellakopoulos, I. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems [Текст] / I. Kanellakopoulos, P.V. Kokotovic, A.S. Morse // IEEE Trans. Automat. Control. – 1991. – Vol.36. – P. 1241-1253.

105. Khalil, H.K. Semiglobal stabilization of a class of nonlinear systems using output feedback [Текст] / H.K. Khalil, F. Esfandiari // IEEE Trans. Automat. Control. – 1993. – Vol.38, №9. – P.1412-1415.
106. Kokotovic, P.V. Constructive nonlinear control: a historical perspective [Текст] / P.V. Kokotovic, M. Arcak // Automatica. – 2001. – Vol.37, №5. – P.637–662.
107. Kreisselmeier, G. Stable Model Reference Adaptive Control in the Presence of Bounded Disturbances [Текст] / G. Kreisselmeier, K. Narendra // IEEE Trans. Automat. Control. – 1982. – Vol. AC-27, № 6. – P. 1169-1175.
108. Krstic, M. Adaptive nonlinear control without overparametrization [Текст] / M. Krstic, I. Kanellakopoulos, P.V. Kokotovic // Systems and Control Letters. – 1992. – Vol.19. – P. 177-185.
109. Krstic, M. Nonlinear and adaptive control design [Текст] / M. Krstic, I. Kanellakopoulos, P. Kokotovic. – New York: John Wiley and Sons Inc., 1995.
110. Kuang, J.M. Moving target tracking of omnidirectional robot with stereo cameras [Текст] / J.M. Kuang, M. Liu, X. Lin // Stereo vision. – InTech. – 2008. – С. 197-220.
111. Landau, I.D. Adaptive control [Текст] / I.D. Landau // N.-Y.: Marcel Dekker, 1979.
112. Landau, I.D. A Hyperstability Criterion for Model Reference Adaptive Control Systems [Текст] / I.D. Landau // IEEE Trans. Autom. Control. – 1969. – Vol.15, № 5. – P. 552-554.
113. Li, Z. Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: a unified viewpoint [Текст] / Z. Li, Z. Duan, G. Chen, L. Huang // IEEE Trans. Circuit. Syst. I. – 2010. – Vol. 57, №1. – P. 213-224.
114. Lin, Z. Robust semiglobal stabilization of minimum-phase input-output linearizable systems via partial state and output feedback [Текст] / Z. Lin, A. Saberi // IEEE Trans. Automat. Control. – 1995. – Vol.40, № 6. – P.1029-1041.
115. Marquez-Martines, L.A. Input-output feedback linearization of time-delay systems [Текст] / L.A. Marquez-Martines, C.H. Moog // IEEE Trans. Automat. Control. – 2004. – Vol.49, № 5. – P. 781-786.

116. Mohar B. Some applications of Laplace eigenvalues of graphs. “Graph Symmetry: Algebraic Methods and Applications” [Текст] / B. Mohar // NATO ASI Ser.C 497. – 1997. – P. 225-275.
117. Monopoli, R.V. Model reference adaptive control with an augmented signal [Текст] / R.V. Monopoli // IEEE Trans. Automat. Control. – 1974. – Vol.19, №5. – P. 474–484.
118. Monopoli, R.V. The Kalman – Yakubovich lemma in adaptive control system design [Текст] / R.V. Monopoli // IEEE Trans. Automat, Control. – 1973. – Vol. AC-18, № 5. – P. 527-529.
119. Moog, C.H. The disturbance decoupling problem for time delay nonlinear systems [Текст] / C.H. Moog, R. Castro-Linares, M. Velasco-Villa, L.A. Marquez-Martines // IEEE Trans. Automat. Control. – 2000. – Vol.45, № 2. – P. 305-309.
120. Morse, A.S. High-order parameter tuners for adaptive control of nonlinear systems [Текст] / A.S. Morse // Systems, Models and Feedback: Theory and Applications. – Birkhauser, 1992. – P. 339-364.
121. Narendra, K. A new adaptive law for robust adaptation without persistent excitation [Текст] / K. Narendra, A. Annaswamy // IEEE Trans. Automat. Control. – 1987. – Vol.32, №2. – P. 134-145.
122. Narendra, K. Stable adaptive systems [Текст] / K. Narendra, A. Annaswamy // Englewood Cliffs, N.J.:Prentice-Hall, 1989.
123. Narendra, K. Stable adaptive observers and controllers [Текст] / K. Narendra, L.S. Valavani // Proc. IEEE. – 1976. – Vol. 64, № 8. – P. 94-105.
124. Nikiforov, V.O. Adaptive servomechanism controller with an implicit reference model [Текст] / V.O. Nikiforov // International Journal of Control. – 1997. – Vol.68, №2 – P. 277–286.
125. Nikiforov, V.O. Robust high-order tuner of simplified structure [Текст] / V.O. Nikiforov // Automatica. – 1999. – Vol. 35, № 8. – P. 1409-1417.
126. Oguchi, T. Input-output linearization of retarded nonlinear systems by using an extension of Lie derivative [Текст] / T. Oguchi, A. Watanabe, T. Nakamizo // International Journal of Control. – 2002. –V.75, № 8. – P. 582-590.

127. Parks, P.C. Lyapunov Redesign of Model Reference Adaptive Control Systems [Текст] / P.C. Parks // IEEE Trans. Autom. Control. – 1966. – Vol.11, № 3. – P. 362-367.
128. Pomet, J.-B. Adaptive nonlinear regulation: estimation from the Lyapunov equation [Текст] / J.-B. Pomet, L. Praly // IEEE Trans. Automat. Control. – 1992. – Vol.37, № 6. – P. 729-740.
129. Pyrkin, A. Output Control Approach "Consecutive Compensator" Providing Exponential and L-infinity-stability for Nonlinear Systems with Delay and Disturbance [Текст] / A. Pyrkin, A. Bobtsov, M. Faronov [et al.] // Proceedings of 2011 IEEE International Conference on Control Applications. – 2011. – P. 1499-1504.
130. Pyrkin, A. Output Controller for Uncertain Nonlinear Systems with Structural, Parametric, and Signal Disturbances [Текст] / A. Pyrkin, A. Bobtsov, M. Faronov [et al.] // 2012 IEEE International Conference on Control Applications. – 2012. – P. 1528-1533.
131. Pyrkin, A. Rejection of sinusoidal disturbance of unknown frequency for linear system with input delay [Текст] / A. Pyrkin, A. Smyshlyaev, N. Bekiaris-Liberis, M. Krstic // Proc. American Control Conference. – 2010.
132. Pyrkin, A. Output control algorithm for unstable plant with input delay and cancellation of unknown biased harmonic disturbance [Текст] / A. Pyrkin, A. Smyshlyaev, N. Bekiaris-Liberis, M. Krstic // Proc. 9th IFAC Workshop on Time Delay System. – 2010.
133. Ren, W. Consensus Seeking in Multiagent Systems Under Dynamically Changing Interaction Topologies [Текст] / W. Ren, R.W. Beard // IEEE Trans. Automat. Control. – 2005. – Vol. 50. – P. 655-661.
134. Ren, W. Information Consensus in Multivehicle Cooperative Control [Текст] / W. Ren, R.W. Beard, E.M. Atkins // IEEE Control Syst. Magazine. – 2007. – Vol. 27. – P. 71-82.

135. Richard, J-P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems [Текст] / J-P. Richard // Automatica. – 2003. – Vol.39, № 10. – P.1667–1694.
136. Rohrs, C. Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics [Текст] / C. Rohrs, L.Valavani, M. Athans, G. Stein // IEEE Trans. Automat. Control. – 1985. – Vol.30, №9. – P. 881-889.
137. Siljak, D.D. Decentralized Control of Complex Systems [Текст] / D.D. Siljak. – Mathematics in Science and Engineering. Boston, MA: Academic, 1990. Vol. 184.
138. Tao, G. Model reference adaptive control for plants with unknown relative degree [Текст] / G. Tao, P.A. Ioannou // IEEE Trans. Automat. Control. – 1993. – Vol. 38, №6. – P. 976-982.
139. Utkin, V.I. Sliding Modes in Control Optimization [Текст] / V.I. Utkin. – Springer, Heidelberg, 1992.
140. Wu, A A new decentralized model reference adaptive control for a class of interconnected dynamic systems using variable structure design [Текст] / A. Wu, L. Fu, C. Hsu // Int. J. Adaptive Contr. Signal Processing. – 1993. – Vol. 7, № 1. – P. 33-43.
141. Yoshioka, C. Observer-based consensus control strategy for multi-agent system with communication time delay [Текст] / C. Yoshioka, T. Namerikawa // Proc. IEEE MSC. – 2008. – P. 1037-1042.
142. Yu, W. Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems [Текст] / W. Yu, G. Chen, M. Cao // Automatica. – 2010. – Vol. 46, №6. – P. 1089-1095.