

федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Санкт-Петербургский национальный исследовательский  
университет информационных технологий, механики и оптики»

На правах рукописи



**Борисов Олег Игоревич**

**Адаптивные и робастные алгоритмы управления по выходу  
многоканальными системами**

05.13.01 — Системный анализ, управление и обработка информации  
(в технических системах)

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук, доцент  
Пыркин Антон Александрович

Санкт-Петербург – 2017

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ</b> .....	<b>4</b>
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	<b>5</b>
<b>Глава 1 ОБЗОР МЕТОДОВ АДАПТИВНОГО И РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ</b> .....	<b>16</b>
1.1 Обзор методов робастного управления по принципу сильной об- ратной связи . . . . .	16
1.2 Обзор методов управления в условиях насыщения по входу . . . .	18
1.3 Обзор методов адаптивного управления обратимыми многока- нальными системами . . . . .	26
1.4 Обобщенная постановка задачи . . . . .	29
<b>Глава 2 СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ВЫХОДУ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ</b> .....	<b>33</b>
2.1 Алгоритм синтеза робастных регуляторов по выходу в простран- стве состояний . . . . .	33
2.2 Обеспечение заданного быстродействия замкнутой системы . . . .	39
2.3 Интеграция внутренней модели внешнего возмущения . . . . .	50
2.4 Выводы по главе . . . . .	59
<b>Глава 3 КВАЗИМНОГОМЕРНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЕКОМПОЗИРУЕ- МЫМИ МНОГОКАНАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ С НАСЫЩЕНИ- ЕМ ПО ВХОДУ</b> .....	<b>60</b>
3.1 Управление с компенсацией внешних возмущений и антивиндап- коррекцией . . . . .	60
3.1.1 Компенсация статических возмущений . . . . .	62

3.1.2	Компенсация полигармонических возмущений со смещением	75
3.2	Метод декомпозиции математической модели многоканального объекта управления	87
3.3	Стабилизация квадрокоптера с насыщением по входу	88
3.4	Выводы по главе	101
<b>Глава 4 АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО ВЫХОДУ МНОГОКАНАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ</b>		
		<b>102</b>
4.1	Постановка задачи	102
4.2	Базовые допущения и робастная минимальная фазовость	103
4.3	Интеграция внутренней модели и ее динамическая настройка	110
4.4	Моделирование системы стабилизации скорости надводного водоизмещающего судна	120
4.4.1	Регулирование всех выходных переменных	122
4.4.2	Стабилизация и частичное регулирование выходных переменных	124
4.5	Интеграция наблюдателя по принципу сильной обратной связи и схемы антивиндап-коррекции	127
4.6	Стабилизация макета надводного водоизмещающего судна	133
4.7	Выводы по главе	139
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>		<b>140</b>
<b>СЛОВА БЛАГОДАРНОСТИ</b>		<b>142</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b>		<b>143</b>

**СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ**

$t$	время
$x, \mathbf{x}$	вектор переменных состояния
$y$	выходные регулируемые переменные
$u$	управляющие сигналы, удовлетворяющие условию насыщения
$v$	неограниченные управляющие сигналы
$\kappa$	функция без памяти, удовлетворяющая секторным ограничениям
$\text{sat}(\cdot)$	функция насыщения
$\tau$	время переходного процесса
$\delta$	возмущающее воздействие
$A, \mathbf{A}$	матрица состояния
$B, \mathbf{B}$	матрицы входов управления
$C, \mathbf{C}$	матрица выхода регулируемых переменных
$s$	комплексная переменная Лапласа
$I$	единичная матрица

## ВВЕДЕНИЕ

Класс многоканальных систем является достаточно широким подклассом технических систем в целом. К ним, например, относятся беспилотные летательные аппараты, надводные водоизмещающие суда, манипуляционные и мобильные роботы. В настоящее время область применения робототехнических систем интенсивно расширяется. Если некоторое время назад они использовались только для решения простых промышленных задач, то сейчас роботы, уже утвердив себя в качестве неотъемлемой части технологического процесса, активно используются в космических исследованиях (при проведении точных работ в открытом космосе), медицине (при выполнении робот-ассистированных операций), спасательных операциях (мониторинг местности с помощью беспилотных летательных аппаратов и перемещение мобильных роботов по развалам или недоступным для человека участкам), быту (роботы-пылесосы, роботы для мойки окон) и прочее. Следовательно, совершенствование методов управления такими системами является актуальной и важной задачей.

Достаточно сложными техническими объектами в смысле управления являются летательные аппараты, обладающие сравнительно высокими скоростями полета. Сложность объясняется повышенными требованиями к безопасности движения. При этом сам летательный аппарат подвержен весьма серьезным внешним воздействиям: ветер, зоны турбулентности, грозовые тучи, и многое другое, характерное для данного типа объектов управления.

В прикладных исследованиях теории управления в последнее время приобрели достаточно высокую популярность летательные аппараты типа «квадрокоптер», которые отличаются наличием четырех винтов, вращающихся диагонально в противоположных направлениях. В настоящее время использование квадрокоптеров становится все более востребованным. Они находят все большее применение в различных областях. Среди тех задач, где они уже успешно

применяются, можно выделить следующие области. Во-первых, журналистика и операторская работа, а именно ведение панорамных съемок и репортажей с высоты птичьего полета и фотографирования. Во-вторых, мониторинг и инспектирование важных объектов, где затруднено присутствие человека или сопряжено с риском для жизни (например, автономных нефтяных вышек). В-третьих, помощь в поисково-спасательных операциях и транспортировка лекарств и предметов первой необходимости для нуждающихся в места стихийных бедствий.

Существуют также потенциальные области применения квадрокоптеров, в которых уже были совершены первые экспериментальные попытки их использования. Это, прежде всего, доставка товаров, что значительно бы ускорило, упростило и удешевило этот процесс. Помимо этого, существуют разработки по дистанционному оказанию первой помощи пострадавшим посредством квадрокоптеров с использованием средств телеуправления.

Интерес исследователей и инженеров теории управления к ним вызван по следующим причинам. Квадрокоптеры отличаются высокой маневренностью, стабильностью и лучшими летными качествами в сравнении с другими летательными аппаратами. Они позволяют осуществлять вертикальный взлет и легко менять направление движения. Квадрокоптеры имеют относительно простую, недорогую и вместе с тем надежную конструкцию и аппаратную оснастку, что делает аппарат более доступным в финансовом плане. Квадрокоптеры менее, чем, например, вертолеты, подвержены влиянию вибрационных возмущений, вызванных вращением винтов. Это связано с тем, что наличие нескольких винтов позволяет существенно эффективнее стабилизировать полет. В то же время задача разработки управления для стабилизации квадрокоптера является нетривиальной. Этому имеется целый ряд причин.

Математическая модель, описывающая поведение квадрокоптера, является многоканальной, а именно объект управляется посредством четырех входных сигналов (для каждого привода) и имеет шесть выходных переменных (три линейные и три угловые координаты, однозначно задающие положение и ориен-

тацию твердого тела в трехмерном пространстве). Нелинейность математической модели квадрокоптера также усложняет синтез управления. Она обусловлена наличием перекрестных связей между динамическими каналами объекта. Как и для любой реальной системы, для квадрокоптеров характерно насыщение по входу. Крайне важно учитывать его на этапе разработки закона управления. Если при проведении компьютерного моделирования, разработчик практически неограничен в уровне подаваемого управляющего сигнала на объект, то на практике, все технические приложения имеют пределы по входу, обусловленные аппаратными возможностями системы. Пренебрежение насыщением по входу может привести к снижению качества переходного процесса, увеличению перерегулирования выходной переменной, появление автоколебаний и даже потери устойчивости. Поэтому на этапе синтеза регулятора необходимо учитывать, помимо нелинейности модели в целом, еще и нелинейность входного сигнала типа «насыщение». Реальные объекты зачастую характеризуются параметрическими и сигнальными неопределенностями. Иными словами, значения параметров модели квадрокоптера (масса, моменты инерции, координаты центра масс) могут быть неизвестны или известны неточно. Могут быть недоступны измерению производные выходного сигнала. В случае квадрокоптера речь идет о его скорости и ускорении по каждому из каналов. В силу обозначенных проблем, важно обеспечивать робастность регулятора по отношению к этим неопределенностям. При этом возможность простой настройки параметров управления позволит существенно упростить инженерную реализацию регулятора и повысит его эффективность. Летательные аппараты подвержены влиянию внешних ветровых возмущений. Они могут быть причиной появления статических ошибок выходных переменных. Повышение астатизма системы позволит их устранить.

Весьма наглядный пример сложной технической многоканальной системы, функционирующей в условиях нестационарной внешней среды, — надводное водоизмещающее судно. В открытом море судно подвергается возмущениям, имеющим различную природу и происхождение. Выделяют три типа возму-

щений, существенно влияющих на качество управления: ветровые воздействия, волновые воздействия и течение. Система автоматического управления движением судна может решать различные задачи: стабилизация курса, движение вдоль заданной траектории, стабилизация продольной и поперечной скоростей, динамическое позиционирование в точке. К системам автоматического управления движением предъявляются жесткие требования к динамическим и точностным показателям качества. Например, для задачи стабилизации курса установившаяся ошибка не должна превышать значение 1 градуса. Для нефтеналивных судов большого водоизмещения, длина которых может быть более 100 метров, необходимо синтезировать системы динамического позиционирования в точке. При том, что судно может находиться под нефтяной вышкой более суток, система управления должна обеспечивать точность позиционирования с отклонением не более 20 см при различного рода возмущениях.

Регуляторы со сложной структурой зачастую могут быть неприменимы в прикладных задачах в силу необходимости обеспечения значительных вычислительных мощностей и наличия дополнительных датчиков. В диссертации наибольшее внимание уделено синтезу управлению по выходу с простой инженерной реализацией. Исследуются также более сложные задачи, когда стабилизируемый объект характеризуется насыщением по входу, является многоканальным и подвержен влиянию неизвестных возмущающих воздействий.

**Цели и задачи.** Целью диссертационной работы является разработка алгоритмов адаптивного и робастного управления по выходу классом многоканальных систем в условиях параметрической неопределенности, влияния внешних возмущающих воздействий и наличия насыщения по входу.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

1. Разработан алгоритм синтеза робастных регуляторов по выходу в пространстве состояний на основе принципа сильной обратной связи. Предложен алгоритм обеспечения заданного быстродействия при известных номиналь-



ных параметрах объекта и проведен анализ робастности. С использованием метода внутренней модели синтезирован алгоритм компенсации внешних возмущений, проведен анализ устойчивости замкнутой системы и сходимости ошибки регулирования к нулю.

2. Разработан алгоритм робастного управления по выходу с антивиндап-коррекцией для объектов с насыщением по входу и подверженных влиянию внешних возмущающих воздействий. Приведено доказательство абсолютной устойчивости замкнутой системы с разработанным регулятором с помощью критерия Попова. С использованием метода декомпозиции разработанный регулятор был применен в задаче стабилизации беспилотного летательного аппарата типа «квадрокоптер». Проведены экспериментальные исследования.
3. Разработан алгоритм адаптивного управления по выходу многоканальными системами с динамически настраиваемой внутренней моделью с учетом влияния перекрестных связей. Показана устойчивость замкнутой системы с предлагаемым алгоритмом. Разработанный регулятор был применен в задаче динамического позиционирования макета надводного водоизмещающего судна. Проведены экспериментальные исследования.

**Научная новизна.** В диссертационной работе был разработан новый алгоритм синтеза робастных регуляторов по выходу в пространстве состояний на основе принципа сильной обратной связи. Предложен алгоритм обеспечения заданного быстродействия при известных номинальных параметрах объекта с использованием инструментария линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимнообратных матриц. Предложен алгоритм компенсации внешних возмущающих воздействий для параметрически неопределенных объектов с насыщением по входу. С использованием метода декомпозиции разработанный регулятор был использован в задаче стабилизации беспилотного летательного аппарата типа «квадрокоптер» с компенсацией интегрального насыщения

и внешних возмущений, обусловленных влиянием воздушного потока. Разработан новый алгоритм адаптивного управления по выходу многоканальными системами с динамически настраивающейся внутренней моделью внешнего возмущения, который был использован в задаче динамического позиционирования макета надводного судна.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Результаты, полученные в диссертационной работе, имеют как теоретическую ценность в области современной теории управления, так и являются востребованными во многих инженерных задачах. Алгоритм синтеза робастных регуляторов по выходу на основе принципа сильной обратной связи позволяет в явном виде проводить анализ модели замкнутой системы в пространстве состояний, модифицировать структуру регулятора для различных задач (например, для обеспечения заданного быстродействия, компенсации внешних возмущающих воздействий), что представляет ценность с научной точки зрения для синтеза новых алгоритмов управления. Проведенные экспериментальные исследования стабилизации многоканальных систем, таких как беспилотный летательный аппарат типа «квадрокоптер», макет надводного водоизмещающего судна, подтверждают высокую практическую ценность полученных результатов в инженерии при программировании реальных технических систем.

**Методы исследования.** При решении поставленных задач использовался спектр методов современной теории автоматического управления, включающих в том числе принципы синтеза адаптивных и робастных алгоритмов управления и исследования нелинейных систем, в частности в форме Лурье с нелинейностью типа «насыщение». Для описания динамических систем использовались методы пространства состояний, операторный метод, преобразование Лапласа. Для разработки алгоритмов управления использовались метод пассивации систем, инструментарий линейных матричных неравенств, алгоритм поиска взаимнообратных матриц, принцип внутренней модели, метод обратного счета компенсации интегрального перенасыщения, геометрические подходы. Для до-

казательства устойчивости замкнутых систем с разработанными алгоритмами управления использовались корневой метод, критерий Попова, второй (прямой) метод Ляпунова. Апробация разработанных алгоритмов управления проводилась с помощью численного моделирования в среде MATLAB, а также при проведении экспериментальных исследований на базе лабораторного стенда «КОМЕКС-1» кафедры управления сложными системами Университета ИТМО и установки «CyberShip Arctic Drillship» департамента морских технологий Норвежского университета естественных и технических наук (NTNU).

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Алгоритм синтеза робастных регуляторов по выходу в пространстве состояний на основе принципа сильной обратной связи.
2. Алгоритм робастного управления по выходу с антивиндап-коррекцией для объектов с насыщением по входу.
3. Алгоритм адаптивного и робастного управления по выходу многоканальными системами в условиях внешних параметрически неопределенных возмущающих воздействий.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Достоверность результатов, представленных в диссертационной работе, подтверждается:

- строгостью доказательств теорем и утверждений, корректным использованием математического аппарата;
- представленными в диссертационной работе результатами численного моделирования в программной среде MATLAB;
- представленными в диссертационной работе результатами двух экспериментальных исследований разработанных алгоритмов на базе лабораторного стенда «КОМЕКС-1» кафедры управления сложными системами Университета ИТМО и установки «CyberShip Arctic Drillship» департамента мор-

ских технологий Норвежского университета естественных и технических наук (NTNU);

- печатными работами, а также статьями в сборниках трудов международных конференций. Среди 38 научных работ восемь опубликованы в российских журналах, рекомендованных ВАК [1–8], 25 — в изданиях, индексируемых базами данных Scopus и Web of Science [9–33], одно учебное пособие [34], четыре свидетельства о регистрации программ для ЭВМ [35–38].

Основные результаты работы докладывались на 16 международных конференциях:

- 7th IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management and Control (7-ая конференция по промышленному моделированию, менеджменту и управлению, 19–21 июня 2013, Санкт-Петербург, Россия) [32, 33];
- 11th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing (11-ая международный семинар по адаптации и обучению в управлении и обработке сигналов, 3–5 июля 2013, Кан, Франция) [31];
- 22nd Mediterranean Conference on Control and Automation (22-ая средиземноморская конференция по управлению и автоматизации, 16–19 июня 2014, Палермо, Италия) [26];
- 19th IFAC World Congress (19-ый всемирный конгресс международной федерации автоматического управления, 24–29 августа 2014, Кейптан, ЮАР) [27, 28];
- 2014 IEEE Multi-Conference on Systems and Control (Мультиконференция по системам и управлению 2014, 8–10 октября 2014, Антиб, Франция) [29, 30];
- 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems (1-ая конференция по моделированию, идентификации и управ-

- лению нелинейными системами, 24–26 июня 2015, Санкт-Петербург, Россия) [24, 25];
- 34th Chinese Control Conference (34-ая китайская конференция по управлению, 28–30 июля 2015, Ханчжоу, Китай) [23];
  - 11th IFAC Symposium on Advances in Control Education (11-ый симпозиум по достижениям в области преподавания управления, 1–3 июня, Братислава, Словакия) [17, 19, 20];
  - 24th Mediterranean Conference on Control and Automation (24-ая средиземноморская конференция по управлению и автоматизации, 21–24 июня 2016, Афины, Греция) [16];
  - 12th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing (12-ый международный семинар по адаптации и обучению в управлении и обработке сигналов, 29 июня – 1 июля 2016, Эйндховен, Нидерланды) [18, 21];
  - 11th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences (11-ый международная конференция по математическим проблемам в инженерии, авиапромышленности и естественных науках, 5–8 июля, Ла-Рошель, Франция) [13];
  - 21st International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (21-ый международная конференция по методам и моделям в автоматизации и робототехнике, 29 августа – 1 сентября 2016, Мендзыздое, Польша) [15];
  - 42nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (42-ая ежегодная конференция сообщества промышленной электроники, 24–27 октября 2016, Флоренция, Италия) [14];

- 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (25-ая средиземноморская конференция по управлению и автоматизации, 3–6 июля, Валетта, Мальта) [12];
- 20th IFAC World Congress (20-ый всемирный конгресс международной федерации автоматического управления, 9–14 июля 2017, Тулуза, Франция) [10, 11];
- IEEE 15th International Conference on Industrial Informatics (15-ая международная конференция промышленной информатики, 24–26 июля 2017, Эмден, Германия) [9].

Результаты диссертационного исследования были использованы в следующих НИР:

- «Развитие методов адаптивного и робастного управления сложными нелинейными системами с применением к мехатронным и робототехническим приложениям» (Государственное задание № 2014/190 (проект 2118));
- «Методы адаптивного управления нелинейными системами с запаздыванием и неопределенностями» (Государственное задание №2.8878.2017/8.9);
- «Робастные и адаптивные системы управления, коммуникации и вычисления» (проект 14.Z50.31.0031);
- «Нелинейное и адаптивное управление сложными системами» (субсидия 074-U01);
- «Исследование адаптивного и робастного управления по выходу робототехническими системами» (грант Правительства Санкт-Петербурга, диплом ПСП № 14056, распоряжение от 05.12.2014 № 161);
- «Система динамического позиционирования на основе адаптивной модификации последовательного компенсатора» (грант Правительства Санкт-

Петербурга, диплом ПСП № 15336, распоряжение КНВШ от 27.11.2015 № 134);

- «Управление многоканальными робототехническими системами с неопределенными параметрами и насыщением по входу» (грант Правительства Санкт-Петербурга, диплом ПСП № 16238, распоряжение КНВШ от 28.11.2016 № 148).

**Личный вклад.** Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы [1–38]. Соискатель принимал непосредственное участие на всех этапах диссертационного исследования, включая разработку алгоритмов адаптивного и робастного управления, анализ устойчивости замкнутых систем, проведение численного моделирования и экспериментальных исследований.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 38 печатных изданиях, восемь из которых опубликованы в российских журналах, рекомендованных ВАК [1–8], 25 — в изданиях, индексируемых базами данных Scopus и Web of Science [9–33], одно учебное пособие [34], четыре свидетельства о регистрации программ для ЭВМ [35–38].

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 162 страниц с 19 рисунками. Список литературы содержит 149 наименований.

## Глава 1

### ОБЗОР МЕТОДОВ АДАПТИВНОГО И РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В главе представлен обзор методов адаптивного и робастного управления по принципу сильной обратной связи, компенсации внешних возмущающих воздействий применительно к объектам с насыщением по входу, а также обратимыми многоканальными системами. Дан сравнительный анализ существующих решений. Выделены достоинства и недостатки известных подходов. Сформулирована обобщенная постановка задачи, решению которой посвящены последующие главы диссертации.

#### 1.1 Обзор методов робастного управления по принципу сильной обратной связи

В главе представлен обзор методов управления робастного управления. Рассмотрен сравнительный анализ существующих методов управления. Выделены достоинства и недостатки известных подходов.

В диссертационной работе предложены методы управления объектами, математические модели которых могут содержать неизвестные или неточно заданные параметры. Помимо решения теоретической задачи управления для практики важным аспектом является реализуемость на практике и удовлетворение заданным требованиям [39]. Обеспечение робастной устойчивости синтезируемых алгоритмов крайне важно с прикладной точки зрения [40]. Законы управления простой структуры с легко настраиваемыми параметрами являются инженерно привлекательными в различных областях, включая аэрокосмическую, робототехническую и электротехническую [25, 32, 41–46]. В частности, методы адаптивного управления по выходу востребованы для большого количества практических



задач, где законы управления с использованием переменных состояний трудно или даже невозможно реализовать.

Результаты, полученные в диссертационной работе, представляют собой развитие метода адаптивного и робастного управления по выходу «последовательный компенсатор», описанный в ряде статей [42, 47–50] и положительно зарекомендовавший себя в робототехнических приложениях [32, 34].

В ряде работ [42, 47, 49] были рассмотрены модели нелинейных систем, состоящие из линейной части с неизвестными параметрами и статическим нелинейным блоком с запаздывающим аргументом. Эти системы могут быть описаны в следующей форме

$$a(p)y(t) = b(p)u(t) + c(p)\varpi(y(t - \tau)) + e(p)\delta(t), \quad (1.1)$$

где  $p = d/dt$  — обозначает оператор дифференцирования; выходная регулируемая переменная  $y(t)$  доступна измерению, а ее производные не доступны для измерения;  $a(p) = p^n + \dots + a_1p + a_0$ ,  $b(p) = b_m p^m + \dots + b_1p + b_0$  и произвольные полиномы  $c(p)$  и  $e(p)$  — взаимно простые полиномы с неизвестными параметрами; относительная степень модели системы  $\rho = n - m$ ; полином  $b(p)$  гурвицев и параметр  $b_m > 0$ ; неизвестная функция  $\varpi(y(t - \tau))$  такая, что

$$|\varpi(y(t - \tau))| \leq C_0 |y(t - \tau)| \text{ для всех } y(t - \tau), \quad (1.2)$$

где  $\tau > 0$  — неизвестное постоянное или переменное запаздывание,  $y(\vartheta) = \phi(\vartheta)$ ,  $\forall \vartheta \in [-\tau, 0]$  и число  $C_0$  неизвестно;  $\delta(t)$  — ограниченное возмущение. Следует отметить, что числа  $m$  и  $n$  могут быть неизвестны, и только знание относительной степени  $\rho = n - m$  является необходимым.

Нет никаких сомнений, что задача активной компенсации возмущающих воздействий является актуальной для широкого класса технических объектов управления. На сегодняшний день получено большое число алгоритмов управления в условиях внешних воздействий [8, 22, 31, 51–87]. Кроме того, в работах [16, 27, 28, 30, 31] исследовались задачи компенсации внешних возмущений в условиях наличия в каналах связи системы запаздывания по времени.

Предлагаемый в диссертационной работе алгоритм, основанный на принципе пассивации (см. [88, 89]), позволяет решать задачи, аналогичные с [44, 90–92], но с менее строгими требованиями к объекту управления.

Для обеспечения заданного быстродействия синтезированного алгоритма управления при условии известных номинальных параметрах объекта в диссертационной работе используется инструментарий линейных матричных неравенств, который позволяет решать целый класс задач современной теории управления [51, 93].

Полученные в диссертационной работе результаты имеют прикладной характер и могут быть востребованы как при разработке различных киберфизических систем на базе роботов-манипуляторов [9, 14] с использованием соответствующего программного обеспечения [37, 38], так и в образовательном процессе [17, 19, 20].

## 1.2 Обзор методов управления в условиях насыщения по входу

Одна из общепринятых классификаций систем основана на удовлетворении элементов системы принципу линейности, согласно которому для

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2)$$

справедливо

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = f(c_1 x_1 + c_2 x_2).$$

Иными словами, в теории управления принято подразделять системы на линейные и нелинейные и, соответственно, саму теорию — на разделы линейных систем [94] и нелинейных систем [95] с соответствующим математическим аппаратом. При этом первый из них, как правило, рассматривается как базовый ввиду относительной простоты используемых подходов. Однако, тем не менее, в теории линейных систем существует целый ряд задач, предполагающие нетривиальные решения [96–99]. Теория нелинейных систем, в свою очередь, представляется как следующий шаг с уточненным анализом поведения систем и

синтезом усложненных алгоритмов управления, учитывающих нюансы функционирования, присущие, различным нелинейным элементам. В качестве примера последних можно привести такие типовые нелинейности, как реле, насыщение, зона нечувствительности, квантование [100], которые определенным образом усложняют поведение систем, что требует применения дополнительного инструментария для их анализа. По этой причине одним из распространенных подходов в разработке управления для нелинейных систем является их линеаризация [101]. Эта процедура позволяет получить приближенное математическое описание объекта, как правило, в некоторой рабочей области, которое отвечает принципу линейности.

Как нетрудно заметить, линейные или линеаризованные системы являются в определенной мере абстрактной идеализацией, которая упрощает ученым синтез алгоритмов управления, но с другой стороны в некоторой степени отдаляет их от реального поведения системы. Строго говоря, все реальные технические системы являются нелинейными, поскольку в них всегда присутствуют те или иные неучтенные при синтезе факторы. Как уже было отмечено, в случаях, когда ими можно пренебречь в рамках рассматриваемой задачи, допускается предположение о линейности модели объекта. Но так или иначе, любая техническая система имеет свои ограничения, в том числе по управлению.

В рамках Главы 3 рассматриваются вопросы, связанные со стабилизацией объекта при насыщении по входу или, другими словами, при ограничении на управление, что является крайне важным с практической точки зрения. В самом деле, аппаратные возможности любой технической системы не могут быть безграничными. Если при компьютерном моделировании того или иного алгоритма разработчик имеет возможность формировать и отправлять на модель объекта управляющий сигнал теоретически любой, разве что ограниченный вычислительными мощностями персонального компьютера, то при программировании реального объекта сигнал управления, превышающий пределы насыщения, не будет восприниматься системой, что эквивалентно разомкнутому контуру с сиг-

налом на входе равным пределу насыщения. При этом ограничение может быть обусловлено различными физическими принципами. Пределы насыщения могут накладываться на напряжение, момент вращения, температуру и прочее. Так, например, в работе [15] рассматривалось управление роботизированным макетом надводного судна с насыщением по скважности сигнала широтно-импульсной модуляции. Поскольку скважность представляет собой отношение периода импульсов к их длительности, то в этой связи естественным ограничением является тот факт, что скважность не может быть больше единицы.

Наличие блока насыщения совместно с интегральной компонентной в структуре регулятора, как правило, приводит к так называемому «интегральному насыщению» при больших значениях ошибки, что в свою очередь может выражаться в увеличении времени переходного процесса и значения перерегулирования, которое при критических значениях в реальных системах может привести к появлению автоколебаний и даже потери устойчивости.

Проблема насыщения по входу заключается в том, что когда сигнал управления выходит за соответствующие пределы, обусловленные аппаратными возможностями системы или физическими свойствами, интегральная компонента аккумулирует ненулевое значение ошибки, что приводит к росту сигнала, который в состоянии насыщения не участвует в стабилизации объекта. Очевидно, что синтез регулятора с учетом таких ограничений позволит увеличить качество поведения системы, а именно уменьшить перерегулирование или даже устранить его полностью, исключить вероятность появления автоколебаний и потерю устойчивости.

Для того, чтобы учесть влияние насыщения и устранить его отрицательный эффект, используют методы так называемой антивиндап-коррекции, основанные на различных принципах. Рассмотрим некоторые из них [102, 103].

1. **Ограничение по задающему воздействию.** Способ предполагает определение допустимых областей, в пределах которых могут задаваться желае-

мые значения так, чтобы управляющий сигнал не приближался к пределам насыщения. Как правило, такой подход ограничивает качество регулирования и в то же время не решает проблему в условиях наличия внешних возмущений.

2. **Принудительная остановка интегрирования.** Способ заключается в деактивации интегрального контура при достижении управляющего сигнала предела насыщения. Реализация предполагает введение условного алгоритма, обеспечивающего мгновенный разрыв интегрального контура при входе сигнала в зону насыщения.
3. **Метод обратного счета.** Подход предполагает формирование дополнительного сигнала рассогласования между насыщенным сигналом управлением и исходным. Когда этот сигнал ненулевой, т.е. управляющее воздействие превышает предел насыщения, он обеспечивает компенсацию сигнала, подаваемого на вход интегральной компоненты, в результате чего сокращается накопление ошибки регулирования на выходе интегратора и устраняется эффект интегрального насыщения. Преимуществом в сравнении с предыдущим подходом является то, что интегральный контур в данном случае деактивируется динамически, а не принудительно посредством условного алгоритма.
4. **Регуляторы с следящим режимом.** В функционировании систем управления с антивиндап-компенсацией на базе обратного счета можно выделить два режима: собственно регулирование объекта, а также следящий режим, при котором интегральная компонента обеспечивает сходимость выходной переменной к сигналу на входе. Этот принцип может использоваться при каскадном управлении.
5. **Условное интегрирование.** Подход представляет собой альтернативу методу обратного счета или регуляторам с следящим режимом. Его механизм

заключается в том, что интегрирование отключается в случае, если управляющий сигнал далек от установившегося режима. Интегральный контур активируется только при выполнении определенных условий, в противном случае он остается постоянным.

Метод антивиндап-компенсации активно используется в целом ряде практических приложений. Например, эффект интегрального насыщения исследуется при проектировании систем управления летательными аппаратами в [104–110]. Задача управления дискретно-событийной промышленной системой с использованием процедуры антивиндап-коррекции рассматривается в [111]. Для систем с ограниченным управлением актуальной задачей является синтез оптимальных алгоритмов [112].

При анализе замкнутых систем с насыщением по входу вводят понятие абсолютной устойчивости, которое предполагает наличие в системе глобально равномерно асимптотически устойчивого положения равновесия [100]. Для того, чтобы установить абсолютную устойчивость замкнутой системы используют круговой критерий или критерий Попова [100, 113]. При этом анализ, как правило, предполагает выполнение эквивалентных преобразований для выделения линейной части с номинальным регулятором и контура секторной нелинейности [113, 114].

Для примера рассмотрим процедуру анализа устойчивости в терминах [113]. Пусть задана система вида

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (1.3)$$

где  $u$  — ограниченный управляющий сигнал, удовлетворяющий

$$u = \text{sat}(v) = \begin{cases} u_{max} & \text{при } v \geq u_{max}, \\ u & \text{при } u_{min} < v < u_{max}, \\ u_{min} & \text{при } v \leq u_{min}. \end{cases}$$

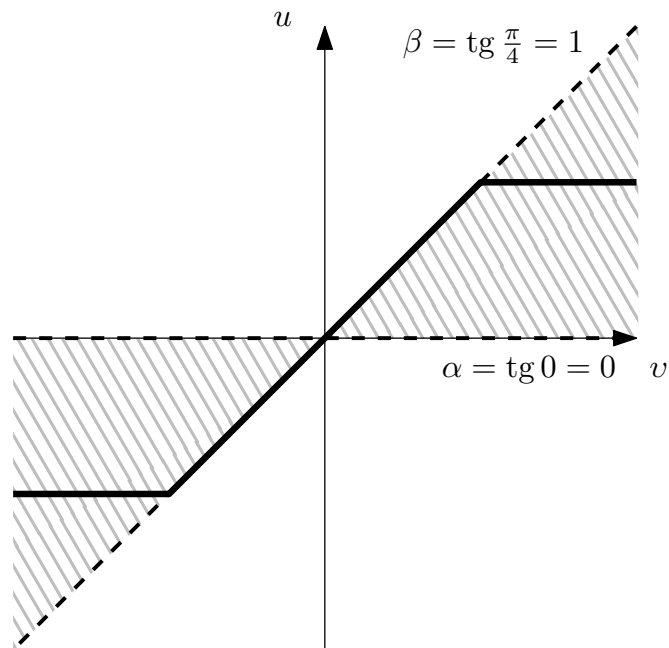


Рисунок 1.1. Секторные ограничения нелинейности типа «насыщение».

Далее перепишем (1.3) как

$$\dot{x} = Ax + b(u + \underbrace{v - v}_0) = Ax + bv - b\kappa(v), \quad (1.4)$$

$$v = c^T x, \quad (1.5)$$

где  $v$  — управляющий сигнал номинального линейного регулятора,  $\kappa(v) = v - u$  — нелинейный сигнал антивиндап-компенсации, удовлетворяющий условию

$$\kappa(\kappa - v) \leq 0. \quad (1.6)$$

В справедливости (1.6) можно убедиться следующим образом. Нелинейность типа «насыщение» по определению удовлетворяет условию секторных ограничений вида

$$(u - \alpha v)(u - \beta v) \leq 0,$$

откуда, учитывая коэффициенты наклона  $\alpha = 0$  и  $\beta = 1$  (см. Рис. 1.1), запишем

$$u(u - v) \leq 0. \quad (1.7)$$

Подставим  $\kappa$  в (1.6):

$$(v - u)(v - u - v) \leq 0$$

или

$$u(u - v) \leq 0,$$

что эквивалентно (1.7).

**Предложение 1.1.** Для обеспечения абсолютной устойчивости системы (1.4),(1.5) необходимо синтезировать такой закон управления  $v$ , чтобы выполнялось линейное матричное неравенство вида [113]

$$N = \begin{bmatrix} (A^T + cb^T)P + P(A + bc^T) & c - Pb \\ c^T - b^T P & -2 \end{bmatrix} < 0.$$

*Доказательство.* Для системы (1.4),(1.5), выберем кандидат-функцию Ляпунова в виде:

$$V = x^T P x, \quad (1.8)$$

где  $P = P^T > 0$  — симметрическая положительно определенная матрица.

После дифференцирования (1.8) получим

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = \\ &= (Ax + bv - b\kappa(v))^T P x + x^T P (Ax + bv - b\kappa(v)) = \\ &= x^T A^T P x + vb^T P x - \kappa(v)b^T P x + x^T P A x + x^T P b v - x^T P b \kappa(v) = \\ &= x^T A^T P x + \underbrace{x^T c}_{v} b^T P x - \kappa(v)b^T P x + x^T P A x + x^T P b \underbrace{c^T x}_{v} - x^T P b \kappa(v) = \\ &= x^T A^T P x + x^T c b^T P x - \kappa(v)b^T P x + x^T P A x + x^T P b c^T x - x^T P b \kappa(v) = \\ &= x^T ((A^T + cb^T)P + P(A + bc^T))x - 2x^T P b \kappa(v). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Далее перепишем условие секторных ограничений (1.6) как

$$\kappa(v - \kappa) \geq 0. \quad (1.10)$$



Используя  $S$ -процедуру, добавим неотрицательное значение  $2\kappa(v - \kappa)$  к производной (1.9) и перейдем к неравенству

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq x^T((A^T + cb^T)P + P(A + bc^T))x - 2x^T Pb\kappa + 2\kappa(v - \kappa) = \\
 &= x^T((A^T + cb^T)P + P(A + bc^T))x - 2x^T Pb\kappa + 2\kappa v - 2\kappa^2 = \\
 &= x^T((A^T + cb^T)P + P(A + bc^T))x - 2x^T Pb\kappa + 2\kappa \underbrace{x^T c}_v - 2\kappa^2 = \\
 &= x^T((A^T + cb^T)P + P(A + bc^T))x - 2x^T(Pb - c)\kappa - 2\kappa^2. \quad (1.11)
 \end{aligned}$$

Перепишем условие глобальной асимптотической устойчивости  $\dot{V} < 0$  с учетом (1.11) в форме линейного матричного неравенства

$$\begin{bmatrix} x^T & \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A^T + cb^T)P + P(A + bc^T) & c - Pb \\ c^T - b^T P & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \kappa \end{bmatrix} < 0,$$

откуда видно, что из отрицательной определенности матрицы

$$N = \begin{bmatrix} (A^T + cb^T)P + P(A + bc^T) & c - Pb \\ c^T - b^T P & -2 \end{bmatrix}$$

следует глобальная асимптотическая устойчивость системы (1.4),(1.5), что и требовалось доказать.  $\square\square\square$

В некоторых задачах удобнее использовать частотные критерии, связанные с понятием строго вещественной положительностью передаточных функций [100]. В Главе 3 используется критерий Попова для доказательства абсолютной устойчивости замкнутой системы с предлагаемым алгоритмом управления. В дополнение в Главе 3 сформулировано утверждение об  $\mathcal{L}_2$ -устойчивости рассматриваемой системы в терминах «вход-выход» с использованием теоремы о малом коэффициенте усиления [100].

В Главе 3 представлены результаты автора, опубликованные в работах [6, 12, 13, 18, 26, 29], которые интегрально можно определить как алгоритм квазимногомерного управления декомпозируемыми многоканальными системами с антивиндап-компенсацией. В рамках главы без потери общности рас-

считается задача стабилизации квадрокоптера с проведением соответствующих экспериментальных исследований с использованием лабораторного стенда «КОМЕКС-1», аппаратная и программная части которой описаны в работах [115, 116]. Эта установка, помимо выполнения экспериментальных исследований, может использоваться и в образовательных целях [117]. Перед проведением апробации алгоритмов на практике, предварительно их целесообразно испытать на математической модели установки, которая может быть идентифицирована с помощью метода наименьших квадратов, как это было реализовано для регулирования высоты в [118].

Использование летательных аппаратов в качестве приложения для апробации алгоритмов в подобных задачах широко распространено. Например, адаптивный закон управления на основе метода пассивации был использован при управлении квадрокоптером в [116, 119], а также установкой «Вертолет» (LAAS Helicopter Benchmark) в [120], где проводились экспериментальные испытания канала управления тангажом. Задача оценивания углов крена и тангажа рассматривалась в [121] с проведением экспериментальной апробации. Сравнительный практический анализ между ПИД-регулятором и оптимальным проведен в [122]. Компенсация ветровых возмущений для квадрокоптеров в лабораторных условиях приведена в [123].

### **1.3 Обзор методов адаптивного управления обратимыми многоканальными системами**

Известно, что для решения задачи стабилизации по выходу при условии действия на многомерный объект внешних возмущений необходимо и достаточно интегрировать в структуру регулятора внутреннюю модель этих воздействий, состоящую из  $p$  одинаковых копий наибольшей циклической компоненты генератора. При этом в качестве входного сигнала для внутренней модели выступает вектор ошибок регулирования  $e$  аддитивно с законом управления, который,

в свою очередь, синтезируется на базе состояния внутренней модели, а также любых дополнительных сигналов, которые доступны измерению в условиях конкретной задачи [124]. Задача внутренней модели формировать в замкнутой системе инвариантное подпространство, на котором обеспечивается сходимость вектора регулируемых переменных. Задача закона управления при этом обеспечивать асимптотическую аттрактивность этого инвариантного подпространства.

Если параметры, характеризующие модель генератора внешних возмущений, неизвестны, то для решения поставленной задачи они должны быть либо идентифицированы оффлайн, либо динамически настроены онлайн. В качестве примера можно привести задачу оценки частот, которая привлекает внимание ученых достаточно много лет [73, 125–128]. Кроме того, задача управления по выходу с адаптивной оценкой возмущения исследовалась в работах [129–132]. В работах [1, 10, 21] рассматривались непрямые методы адаптации для синтеза следящей системы на базе робота-манипулятора. В результате исследований была зарегистрирована программа для управления робототехнической системой в условиях мультигармонических возмущений [36]. Задача быстрой идентификации параметров генератора хаотического сигнала была решена в [2, 11].

Если параметры внутренней модели не постоянны, задача синтеза закона управления усложняется необходимостью стабилизировать нестационарную систему при том, что закон управления должен быть робастным в случае неопределенности параметров объекта. По этой причине, на сколько известно автору, задача синтеза управления до сих пор рассматривалась для систем, где только вектор регулируемых переменных доступен измерению, векторы управляющих сигналов  $u$  и регулируемых переменных  $e$  имеют одинаковые размерности, а также при допущении о минимальной фазовости стабилизируемого объекта.

Одной из задач диссертационного исследования, рассматриваемой в Главе 4, является получение более широкого в сравнении с аналогами подхода к решению задачи стабилизации систем, в которых  $e$  и  $u$  необязательно имеют одинаковые размерности, а также при наличии дополнительных сигналов  $y$ , доступных для

измерений. В такой постановке задачи при доступности вспомогательных измерений необязательно (и может быть неудобно или даже невозможно) налагать требование сходимости к нулю этих сигналов в установившемся режиме. При наличии таких сигналов в конкретном рассматриваемой задаче они могут быть использованы в качестве инструмента, обеспечивающего достижение робастной устойчивости в системе, по причине чего ими не стоит пренебрегать. Таким образом, в системе управления будут присутствовать сигналы, которые не сходятся к нулю в установившемся режиме. Подобным образом, если в системе имеется  $m > p$  управляющих сигналов, из которых необходимо только  $p$  для решения задачи стабилизации, оставшиеся могут послужить инструментом для достижения робастной устойчивости. При этом стоит отметить, что выбор входных сигналов для решения задачи стабилизации может оказаться непростым (а иногда даже невозможным). В Главе 4 предлагается решение, в котором структура управления, изначально предложенная в [124], расширена таким образом, чтобы учитывать неопределенности внутренней модели, а также обеспечить робастную устойчивость с использованием всех управляющих сигналов и доступных измерений с использованием понятия робастной минимальной фазовости.

В Главе 3 представлены результаты автора, опубликованные в работах [4, 5, 7, 15, 19, 23, 24, 33], которые посвящены управлению макетом надводного водоизмещающего судна в различных постановках задач. В рамках главы без потери общности рассматривается задача стабилизации надводного водоизмещающего судна с проведением соответствующих экспериментальных исследований с использованием установки «CyberShip Arctic Drillship» департамента морских технологий Норвежского университета естественных и технических наук (NTNU).

В работах [133, 134] представлен симулятор надводных судов и их силовой установки. В статье [134] приведено подробное описание всех подсистем надводного судна и их взаимосвязей. В частности, в работе исследуется интеграция силовой установки и системы динамического позиционирования. В работе

показаны некоторые сценарии работы с симулятором (динамическое позиционирование в условиях внешних возмущений, реконфигурация каналов силовой установки).

#### 1.4 Обобщенная постановка задачи

Рассмотрим многоканальную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu + Rw, \quad (1.12)$$

$$y = Cx + Qw \quad (1.13)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}^m$  — вектор управляющих сигналов,  $y \in \mathbb{R}^p$  — вектор выходных переменных,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  — вектор возмущающих воздействий,  $A, B, R, C, Q$  — матрицы соответствующих размерностей, в общем случае зависящие от вектора неизвестных параметров  $\mu$ .

Вектор возмущающих воздействий  $w$  рассматривается как состояние линейной системы вида

$$\dot{w} = S(\varrho)w, \quad (1.14)$$

где  $\varrho$  — вектор неизвестных параметров,  $S$  — матрица соответствующей размерности.

Управляющий сигнал  $u$  удовлетворяет условию насыщения

$$u = \text{sat}(v) = \begin{cases} u_{max} & \text{при } v \geq u_{max}, \\ u & \text{при } u_{min} < v < u_{max}, \\ u_{min} & \text{при } v \leq u_{min}, \end{cases} \quad (1.15)$$

$u_{min}$  и  $u_{max}$  — пределы насыщения по входу,  $v$  — управляющий сигнал, генерируемый номинальным линейным регулятором.

**Допущение 1.1.** *Объект (1.12), (1.13) минимально-фазовый (нуль-динамика устойчива).*

**Допущение 1.2.** Векторная относительная степень объекта (1.12), (1.13) известна  $\{\rho_1, \rho_2 \dots \rho_p\}$ .

**Допущение 1.3.** Пределы насыщения по входу  $u_{min}$  и  $u_{max}$  равны по модулю, но имеют противоположные знаки

$$\begin{aligned} |u_{min}| &= |u_{max}|, \\ u_{min} + u_{max} &= 0. \end{aligned}$$

**Допущение 1.4.** Возмущающее воздействие ограничено  $w \in \mathcal{L}_\infty$ , причем номинальный управляющий сигнал  $u_0$ , необходимый для компенсации такого возмущения в установившемся режиме удовлетворяет неравенству

$$u_{min} \leq |u_0| \leq u_{max}.$$

**Допущение 1.5.** Доступен измерению вектор дополнительных переменных  $y' \in \mathbb{R}^q$

$$y' = C'x + Q'w, \quad (1.16)$$

где  $C'$ ,  $Q'$  — матрицы соответствующих размерностей.

В диссертационной работе ставится задача синтеза закона управления  $u$  с использованием измерений вектора выходных переменных  $y$  и вектора дополнительных измеряемых переменных  $y_0$ , который обеспечивает выполнение целевого условия вида

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0. \quad (1.17)$$

При ненулевом задающем воздействии  $y^*$  должно быть выполнено целевое условие для ошибки регулирования эквивалентное (1.17)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y^*(t)| = 0. \quad (1.18)$$

### Задача 1

Рассмотрим частный случай объекта управления (1.12), (1.13), допуская, что  $m = p = 1$ , вектор  $\varrho$  генератора возмущений (1.14) известен. Примем Допущения 1.1, 1.2. Задача заключается в разработке такого закона управления  $u$  с использованием измерений только выходной переменной  $y$ , который обеспечивает выполнение целевого условия (1.17).

При условии известных номинальных значений параметров объекта дополнительно ставится задача обеспечения времени переходного процесса не более заданного

$$\tau \leq \tau^*.$$

Решение Задачи 1 представлено в Главе 2 и проиллюстрировано численным моделированием.

### Задача 2

Рассмотрим объект управления (1.12), (1.13), допуская, что, объект декомпозируемый, вектор  $\varrho$  генератора возмущений (1.14) известен. Примем Допущения 1.1–1.4. Задача заключается в разработке такого закона управления  $u$  с использованием измерений только вектора выходных переменных  $y$ , который обеспечивает выполнение целевого условия (1.18).

Ставится задача проведения экспериментальных исследований по стабилизации летательного аппарата типа квадрокоптер.

Решение Задачи 2 представлено в Главе 3 и проиллюстрировано экспериментальными исследованиями на базе лабораторного стенда «КОМЕКС-1» кафедры управления сложными системами Университета ИТМО.

### Задача 3

Рассмотрим объект управления (1.12), (1.13). Примем Допущения 1.1–1.5. Задача заключается в разработке такого закона управления  $u$  с использованием

измерений вектора выходных переменных  $y$  и вектора дополнительных измеряемых переменных  $y'$ , который обеспечивает выполнение целевого условия (1.18).

Ставится задача проведения экспериментальных исследований по стабилизации надводного водоизмещающего судна.

Решение Задачи 3 представлено в Главе 4 и проиллюстрировано экспериментальными исследованиями на базе установки «CyberShip Arctic Drillship» департамента морских технологий Норвежского университета естественных и технических наук (NTNU).



## Глава 2

### СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ВЫХОДУ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

В настоящей главе представлено решение Задачи 1. Разработан алгоритм синтеза робастных регуляторов по выходу в пространстве состояний на основе принципа сильной обратной связи [3]. Предложен алгоритм обеспечения заданного быстродействия при известных номинальных параметрах объекта и проведен анализ робастности. С использованием метода внутренней модели синтезирован алгоритм компенсации внешних возмущений, проведен анализ устойчивости замкнутой системы и сходимости ошибки регулирования к нулю.

#### 2.1 Алгоритм синтеза робастных регуляторов по выходу в пространстве состояний

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (2.1)$$

$$y = c^T x, \quad (2.2)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}^1$  — управляющий сигнал,  $y \in \mathbb{R}^1$  — измеряемая выходная переменная,  $A$ ,  $b$ ,  $c$  — матрица состояния и векторы входа и выхода соответствующих размерностей.

Примем во внимания следующие допущения.

**Допущение 2.1.** *Объект (2.1), (2.2) минимально-фазовый (нуль-динамика устойчива).*

**Допущение 2.2.** *Относительная степень объекта (2.1), (2.2)  $\rho \geq 1$  известна.*

Целью является разработка такого закона управления  $u$  с использованием измерений только выходной переменной  $y$ , который обеспечивает выполнение соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Выполним замену переменных для выделения нуль-динамики системы. Модель объекта (2.1), (2.2) в форме «вход-выход» имеет вид:

$$y(s) = \frac{b(s)}{a(s)}u(s), \quad (2.3)$$

где  $b(s)$  — гурвицев полином в соответствии с Допущением 2.1.

Выполним следующие преобразования модели (2.3):

$$\begin{aligned} \frac{a(s)}{b(s)}y(s) &= u(s), \\ \left( c(s) + \frac{d(s)}{b(s)} \right) y(s) &= u(s), \\ c(s)y(s) &= u(s) - \frac{d(s)}{b(s)}y(s). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Степени полиномов  $c(s)$ ,  $d(s)$ ,  $b(s)$  соответственно равны  $\rho$ ,  $n - \rho - 1$ ,  $n - \rho$ .

Перепишем модель объекта управления (2.4) как

$$z(s) = \frac{d(s)}{b(s)}y(s), \quad (2.5)$$

$$y(s) = \frac{1}{c(s)}(u(s) - z(s)). \quad (2.6)$$

Подсистемы (2.5) и (2.6) соответственно эквивалентны моделям в пространстве состояний

$$\dot{z}_1 = \bar{A}_1 z_1 + \bar{b}_1 y, \quad (2.7)$$

$$z = \bar{c}_1^T z_1, \quad (2.8)$$

$$\dot{z}_2 = \bar{A}_2 z_2 + \bar{b}_2 (u - z), \quad (2.9)$$

$$y = \bar{c}_2^T z_2. \quad (2.10)$$

Подставим выражения (2.8) в (2.9) и (2.10) в (2.7), после чего получим общую модель

$$\dot{z}_1 = \bar{A}_1 z_1 + \bar{b}_1 \bar{c}_2^T z_2, \quad (2.11)$$

$$\dot{z}_2 = -b_2 \bar{c}_1^T z_1 + \bar{A}_2 z_2 + \bar{b}_2 u, \quad (2.12)$$

$$z = \bar{c}_1^T z_1, \quad (2.13)$$

$$y = \bar{c}_2^T z_2. \quad (2.14)$$

Перепишем (2.11)–(2.14) в виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} u, \quad (2.15)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & c_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

где  $A_{11} = \bar{A}_1$ ,  $A_{12} = \bar{b}_1 \bar{c}_2^T$ ,  $A_{21} = -b_2 \bar{c}_1^T$ ,  $A_{22} = \bar{A}_2$ ,  $b_2 = \bar{b}_2$ ,  $c_2^T = \bar{c}_2^T$ .

Выделим ключевые свойства системы (2.15), (2.16).

- Матрица  $A_{11}$  гурвицева в силу Допущения 2.1.
- Матрица  $A_{22}$  может быть выбрана во фробениусовой форме, что обеспечивает следующий вид векторов  $b_2$  и  $c_2^T$ :

$$b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad c_2^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Допустим, что сигнал  $z_2$  доступен измерению, тогда выберем закон управления в виде:

$$u = -\kappa c_k^T z_2, \quad (2.17)$$

где  $\kappa > 0$  — параметр управления,  $c_k^T = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_\rho]$  — вектор коэффициентов произвольного гурвицева полинома вида

$$k(s) = k_\rho s^{\rho-1} + \dots + k_2 s + k_1.$$

Известно, что существует число  $\kappa^*$  такое, что  $\forall \kappa \geq \kappa^*$  замкнутая система (2.15), (2.17) экспоненциально устойчива (результат совпадает с «теоремой Фрадкова», описанной в [135]).

В самом деле, модель замкнутой системы имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \kappa b_2 c_k^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_1} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

где в силу структуры матрицы  $A_{22}$  и вектора  $b_2$  видно, что существует число  $\kappa^*$  такое, что для  $\forall \kappa \geq \kappa^*$  матрица  $A_{22} - \kappa b_2 c_k^T$  гурвицева и, более того, с учетом гурвицевости  $A_{11}$  подавляет блочные элементы  $A_{21}$  и  $A_{12}$ :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}_1) &= \det(A_{11}) \det(A_{22} - \kappa b_2 c_k^T - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}), \\ \det(\mathbf{A}_1) &= \det(A_{11}) \det\left(A_{22} - \kappa b_2 c_k^T - \frac{A_{21} \operatorname{adj}(A_{11}) A_{12}}{\det(A_{11})}\right), \end{aligned}$$

в результате чего спектр матрицы  $\mathbf{A}_1$  смещается влево от мнимой оси, обеспечивая гурвицевость матрицы состояния замкнутой системы.

Вернемся к основной задаче, при которой доступна измерению только выходная переменная  $y$ . Выберем закон управления вида

$$u = -\kappa(c_k^T \xi + y), \quad (2.19)$$

$$\dot{\xi} = A_q \xi + b_q y, \quad (2.20)$$

где  $\kappa > 0$  матрица  $A_q$  и векторы  $b_q, c_k$  имеют вид:

$$A_q = \begin{bmatrix} -q_\rho \sigma & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -q_{\rho-1} \sigma^2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -q_2 \sigma^{\rho-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -q_1 \sigma^\rho & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad b_q = \begin{bmatrix} q_\rho \sigma \\ q_{\rho-1} \sigma^2 \\ \vdots \\ q_2 \sigma^{\rho-1} \\ q_1 \sigma^\rho \end{bmatrix}, \quad c_k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{\rho-1} \\ k_\rho \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

где  $\sigma > 0$  и  $q_i$  ( $i = \overline{1, \rho}$ ) выбраны из условия гурвицевости системы (2.20),  $k_i$  ( $i = \overline{1, \rho}$ ) – коэффициенты произвольного гурвицева полинома вида

$$k(s) = k_\rho s^{\rho-1} + \cdots + k_2 s + k_1.$$

**Замечание 2.1.** Заметим, что в частном случае для простоты параметры  $q_i$  и  $k_i$  могут быть выбраны равными.

**Замечание 2.2.** Заметим, что матрица  $A_q$  может быть представлена в виде:

$$A_q = \sigma T \underbrace{\begin{bmatrix} -q_\rho & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -q_{\rho-1} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -q_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -q_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{A_{q0}} T^{-1}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma^{\rho-1} \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

где матрица  $A_{q0}$  гурвицева. Следовательно, собственные числа матриц  $A_q$  и  $A_{q0}$  связаны соотношением

$$\lambda\{A_q\} = \sigma \lambda\{A_{q0}\} = \sigma \lambda\{T A_{q0} T^{-1}\}.$$

Объединяя объект (2.15), (2.16) с законом управления (2.19), (2.20) получим модель замкнутой системы

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} - \kappa b_2 c_2^T & -\kappa b_2 c_k^T \\ 0 & b_q c_2^T & A_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \xi \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Введем новую переменную  $\chi = z_2 - \xi$  и вычислим ее производную:

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= \dot{z}_2 - \dot{\xi} = \\ &= A_{21} z_1 + A_{22} z_2 - \kappa b_2 c_2^T z_2 - \kappa b_2 c_k^T \underbrace{(z_2 - \chi)}_{\xi} - b_q c_2^T z_2 - A_q \underbrace{(z_2 - \chi)}_{\xi} \\ &= A_{21} z_1 + \underbrace{(A_{22} - (A_q + b_q c_2^T))}_{I_0} z_2 - \kappa b_2 (c_k^T + c_2^T) z_2 + (A_q + \kappa b_2 c_k^T) \chi, \end{aligned}$$

где

$$I_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Перепишем модель замкнутой системы (2.23) с использованием новой переменной  $\chi$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} - \kappa b_2(c_k^T + c_2^T) & \kappa b_2 c_k^T \\ A_{21} & A_{22} - I_0 - \kappa b_2(c_k^T + c_2^T) & A_q + \kappa b_2 c_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \chi \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

Аналогично рассуждениям для (2.18), можно показать, что существует число  $\kappa^*$  такое, что  $\forall \kappa \geq \kappa^*$  блочная матрица

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \kappa b_2(c_k^T + c_2^T) \end{bmatrix}.$$

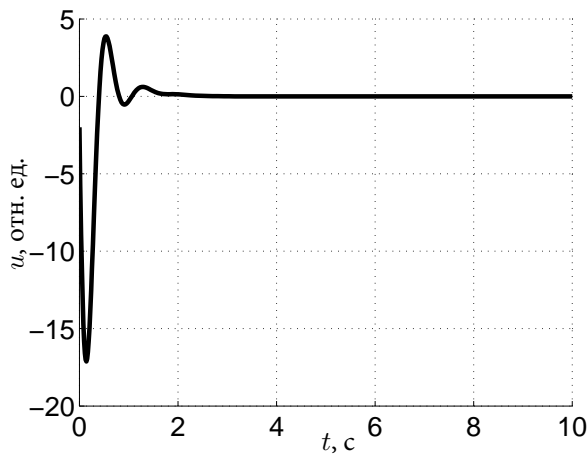
гурвицева. Кроме того, известно, что существует число  $\sigma^*$  такое, что  $\forall \sigma \geq \sigma^*$  матрица  $A_q$  подавляет блоки  $\mathbf{A}_{12}$  и  $\mathbf{A}_{21}$  ввиду их независимости от параметра  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \det(A_1) \det(A_q + \kappa b_2 c_k^T - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12}) \\ \det(\mathbf{A}) &= \det(A_1) \det\left(A_q + \kappa b_2 c_k^T - \frac{\mathbf{A}_{21} \operatorname{adj}(\mathbf{A}_{11}) \mathbf{A}_{12}}{\det(\mathbf{A}_{11})}\right), \end{aligned}$$

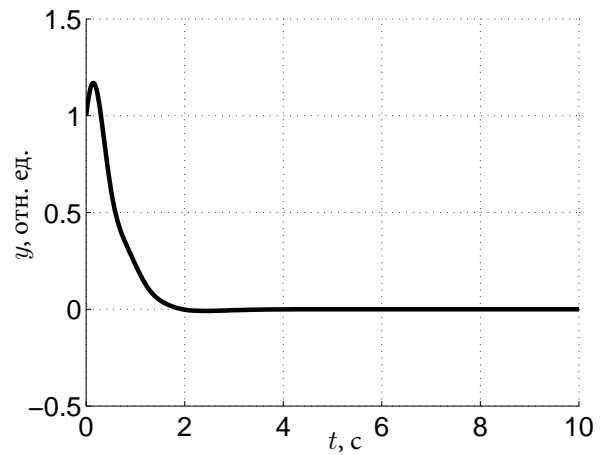
в результате чего спектр матрицы  $\mathbf{A}$  смещается влево от мнимой оси, обеспечивая гурвицевость матрицы состояния замкнутой системы (2.25), равно как и (2.23).

*Пример 1. Рассмотрим систему (2.1), (2.2) с параметрами*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$



(а) Переходной процесс управляющего сигнала



(б) Переходной процесс выходной переменной

Рисунок 2.1. Результаты моделирования в Примере 1.

Найдем передаточную функцию объекта

$$\frac{b(s)}{a(s)} = c^T (sI - A)^{-1} b = \frac{1}{s^2 + s},$$

откуда определим относительную степень  $\rho = 2$ , с учетом чего выберем закон управления (2.19), (2.20) с параметрами  $\kappa = 2$ ,

$$A_q = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_q = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \end{bmatrix}, \quad c_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где  $\sigma = 10$ .

Результаты моделирования приведены на Рис. 2.1.

## 2.2 Обеспечение заданного быстродействия замкнутой системы

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (2.26)$$

$$y = c^T x, \quad (2.27)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}^1$  — управляющий сигнал,  $y \in \mathbb{R}^1$  — измеряемая выходная переменная,  $A$ ,  $b$ ,  $c$  — матрица состояния и векторы входа и выхода соответствующих размерностей.

Примем Допущения 2.1 и 2.2 применительно к объекту (2.26),(2.27), а также для достижения заданного качества регулирования введем дополнительное.

**Допущение 2.3.** Матрица  $A$  и векторы  $b$  и  $c$  объекта (2.26), (2.27) рассматриваются в виде

$$A = A_0 + \Delta A, \quad b = b_0 + \Delta b, \quad c^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0],$$

где  $A_0$  и  $b_0$  — известные номинальные параметры,  $\Delta A$  и  $\Delta b$  — ограниченная параметрическая неопределенность.

Целью является разработка такого закона управления  $u$  с использованием измерений только выходной переменной  $y$ , который обеспечивает выполнение соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0,$$

а также обеспечение времени переходного процесса не более заданного

$$\tau \leq \tau^*. \quad (2.28)$$

Воспользуемся степенью устойчивости  $\alpha$  как приближенной количественной оценкой быстродействия системы [94]. Известно, что ее связь с временем переходного процесса  $\tau$  определяется с помощью соотношения [94, 136]:

$$\tau^* \approx \frac{1}{\alpha^*} \ln \frac{1}{\Delta^*},$$

где  $\Delta^*$  — относительная погрешность. При  $\Delta^* = 0,05$  имеем

$$\tau^* \approx \frac{3}{\alpha^*},$$

откуда выразим

$$\alpha^* \approx \frac{3}{\tau^*}. \quad (2.29)$$

**Замечание 2.3.** Задача обеспечения времени переходного процесса не более заданного (2.28) эквивалентна задаче обеспечения степени устойчивости не менее рассчитанного с помощью (2.29)

$$\alpha \geq \alpha^*. \quad (2.30)$$



Выберем закон управления вида

$$u = -\kappa(c_k^T \xi + y), \quad (2.31)$$

$$\dot{\xi} = A_q \xi + b_q y, \quad (2.32)$$

где  $\kappa = 1$ , матрица  $A_q$  и векторы  $b_q$ ,  $c_k$  имеют вид:

$$A_q = \begin{bmatrix} -q_\rho \sigma & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -q_{\rho-1} \sigma^2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -q_2 \sigma^{\rho-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -q_1 \sigma^\rho & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad b_q = \begin{bmatrix} q_\rho \sigma \\ q_{\rho-1} \sigma^2 \\ \vdots \\ q_2 \sigma^{\rho-1} \\ q_1 \sigma^\rho \end{bmatrix}, \quad c_k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{\rho-1} \\ k_\rho \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

где  $\sigma > 0$  и  $q_i$  ( $i = \overline{1, \rho}$ ) выбраны из условия гурвицевости системы (2.32),  $k_i$  ( $i = \overline{1, \rho}$ ) — параметры управления, рассчитываемые для обеспечения желаемого быстродействия в системе.

Объединяя объект (2.26), (2.27) с законом управления (2.31), (2.32) получим модель замкнутой системы

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bc^T & -bc_k^T \\ b_q c^T & A_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Введем новую переменную

$$\chi = \iota c^T x - \xi,$$

где  $\iota = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ , и вычислим ее производную:

$$\begin{aligned}
\dot{\chi} &= \iota c^T \dot{x} - \dot{\xi} = \\
&= \iota c^T (Ax - bc^T x - \underbrace{bc_k^T (\iota c^T x - \chi)}_{\xi}) - b_q c^T x - A_q \underbrace{(\iota c^T x - \chi)}_{\xi} = \\
&= \iota c^T Ax - \iota c^T bc^T x - \iota c^T bc_k^T (\iota c^T x - \chi) - b_q c^T x - A_q \iota c^T x + A_q \chi = \\
&= \iota c^T Ax - \iota c^T bc^T x - \underbrace{\iota c^T bc_k^T (\iota c^T x - \chi)}_0 - (b_q + A_q \iota) c^T x + A_q \chi = \\
&= \iota c^T Ax - \iota c^T bc^T x - \iota c^T bc_k^T \iota c^T x + \iota c^T bc_k^T \chi + A_q \chi = \\
&= \iota c^T Ax - \iota c^T b(1 + c_k^T \iota) c^T x + \iota c^T bc_k^T \chi + A_q \chi = \\
&= \iota c^T (A - b(1 + c_k^T \iota) c^T) x + (\iota c^T bc_k^T + A_q) \chi.
\end{aligned}$$

Перепишем модель замкнутой системы (2.34) с использованием новой переменной  $\chi$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - b(1 + c_k^T \iota) c^T & bc_k^T \\ \iota c^T (A - b(1 + c_k^T \iota) c^T) & \iota c^T bc_k^T + A_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \chi \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Запишем систему (2.35) в компактном виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad (2.36)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (2.37)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A - b(1 + c_k^T \iota) c^T & bc_k^T \\ \iota c^T (A - b(1 + c_k^T \iota) c^T) & \iota c^T bc_k^T + A_q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \chi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}.$$

С учетом Допущения 2.3 (2.36) примет вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_0 + \Delta \mathbf{A}) \mathbf{x}, \quad (2.38)$$

где

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} A_0 - b_0(1 + c_k^T \iota) c^T & b_0 c_k^T \\ \iota c^T (A_0 - b_0(1 + c_k^T \iota) c^T) & \iota c^T b_0 c_k^T + A_q \end{bmatrix},$$

$$\Delta \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Delta A - \Delta b(1 + c_k^T \iota) c^T & \Delta b c_k^T \\ \iota c^T (\Delta A - \Delta b(1 + c_k^T \iota) c^T) & \iota c^T \Delta b c_k^T \end{bmatrix}.$$

Выполним параметризацию матрицы  $\mathbf{A}_0$  модели (2.38):

$$\mathbf{A}_0 = \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{b}} c_k^T \bar{\mathbf{c}}^T, \quad (2.39)$$

где

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A_0 - b_0 c^T & 0 \\ \iota c^T (A_0 - b_0 c^T) & A_q \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} b_0 \\ \iota c^T b_0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{c}}^T = \begin{bmatrix} -\iota c^T & I \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Примем  $\Delta \mathbf{A} = 0$ , тогда для стабилизации объекта со степенью устойчивости не менее заданной  $\alpha^*$  (2.30) достаточно существование положительно определенной симметрической матрицы  $P = P^T > 0$ , удовлетворяющей матричному неравенству Ляпунова:

$$\mathbf{A}_0^T P + P \mathbf{A}_0 + 2\alpha^* P < 0, \quad (2.41)$$

Подставим (2.39) в (2.41), получим:

$$(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{b}} c_k^T \bar{\mathbf{c}}^T)^T P + P (\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{b}} c_k^T \bar{\mathbf{c}}^T) + 2\alpha^* P < 0, \quad (2.42)$$

$$\bar{\mathbf{A}}^T P + \bar{\mathbf{c}} c_k \bar{\mathbf{b}}^T P + P \bar{\mathbf{A}} + P \bar{\mathbf{b}} c_k^T \bar{\mathbf{c}}^T + 2\alpha^* P < 0, \quad (2.43)$$

Перепишем (2.43) в канонической форме:

$$M + N^T c_k L + L^T c_k^T N < 0, \quad (2.44)$$

где  $M = \bar{\mathbf{A}}^T P + P \bar{\mathbf{A}} + 2\alpha^* P$ ,  $N = \bar{\mathbf{c}}^T$ ,  $L = \bar{\mathbf{b}}^T P$ .

Неравенство (2.44) разрешимо при выполнении следующих условий

$$W_N^T M W_N < 0, \quad (2.45)$$

$$W_L^T M W_L < 0, \quad (2.46)$$

где столбцы матриц  $W_N$  и  $W_L$  образуют базисы ядер матриц  $N$  и  $L$ , соответственно.

Заметим, что

$$W_L = P^{-1}W_{\bar{b}^T} = RW_{\bar{b}^T}, \quad (2.47)$$

где  $R > 0$ , столбцы матрицы  $W_{\bar{b}^T}$  образуют базис ядра  $\bar{b}^T$ .

С учетом (2.47) условие разрешимости (2.46) линейного матричного неравенства (2.44) можно переписать следующим образом:

$$W_{\bar{b}^T}^T(R\bar{A}^T + \bar{A}R + 2\alpha^*R)W_{\bar{b}^T} < 0. \quad (2.48)$$

Задача расчета вектора параметров управления  $c_k$  для обеспечения степени устойчивости не менее  $\alpha^*$  сводится к поиску взаимнообратных матриц  $P$  и  $R$ , удовлетворяющих условиям:

$$W_{\bar{c}^T}^T(\bar{A}^T P + P\bar{A} + 2\alpha^*P)W_{\bar{c}^T} < 0, \quad (2.49)$$

$$W_{\bar{b}^T}^T(R\bar{A}^T + \bar{A}R + 2\alpha^*R)W_{\bar{b}^T} < 0, \quad (2.50)$$

$$P > 0, \quad R > 0, \quad (2.51)$$

$$PR = I, \quad (2.52)$$

где  $W_{\bar{c}^T} = W_N$ ,  $I$  — единичная матрица.

Проанализируем робастность алгоритма при  $\Delta A \neq 0$ . Исследуем устойчивость системы (2.38) с помощью кандидат-функции Ляпунова

$$V = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}, \quad (2.53)$$

где  $P$  удовлетворяет (2.49)–(2.52). Продифференцировав (2.53), получим

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \mathbf{x}^T(\mathbf{A}_0^T P + P \mathbf{A}_0)\mathbf{x} + \mathbf{x}^T(\Delta \mathbf{A}^T P + P \Delta \mathbf{A})\mathbf{x} = \\
 &= -2\alpha^* \mathbf{x}^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T(\Delta \mathbf{A}^T P + P \Delta \mathbf{A})\mathbf{x} \leq \\
 &\leq -2\alpha^* \mathbf{x}^T P \mathbf{x} + 2\|\Delta \mathbf{A}\| \|P\| \mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq \\
 &\leq -2\alpha^* \mathbf{x}^T P \mathbf{x} + 2\|\Delta \mathbf{A}\| \frac{\lambda_{\max}\{P\}}{\lambda_{\min}\{P\}} \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \leq \\
 &\leq -2 \underbrace{\left( \alpha^* - \|\Delta \mathbf{A}\| \frac{\lambda_{\max}\{P\}}{\lambda_{\min}\{P\}} \right)}_{\beta} V,
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

что при  $\beta > 0$  эквивалентно выполнению неравенства

$$(\mathbf{A}_0 + \Delta \mathbf{A})^T P + P(\mathbf{A}_0 + \Delta \mathbf{A}) + 2\beta P < 0. \tag{2.55}$$

Используя алгоритм поиска взаимнообратных матриц, описанный в работах [137, 138], а также в обзорной статье [139], и определив оптимальное значение матрицы  $P$ , удовлетворяющее условиям (2.49)–(2.52), как функцию от  $A_0$ ,  $b_0$  и  $\alpha^*$ , можем записать, что при

$$\|\Delta \mathbf{A}\| < \alpha^* \frac{\lambda_{\min}\{P\}}{\lambda_{\max}\{P\}} \tag{2.56}$$

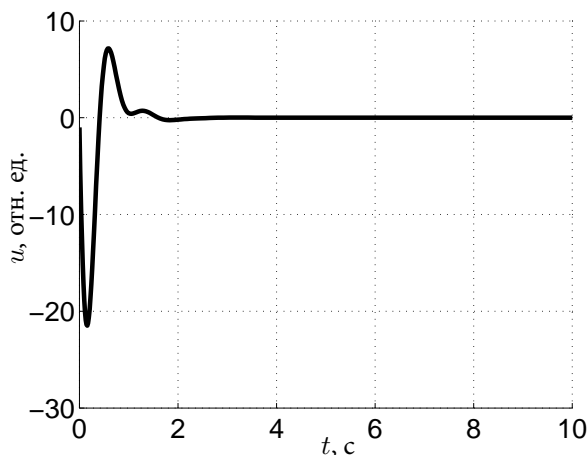
справедливо

$$\dot{V} \leq -2\beta V,$$

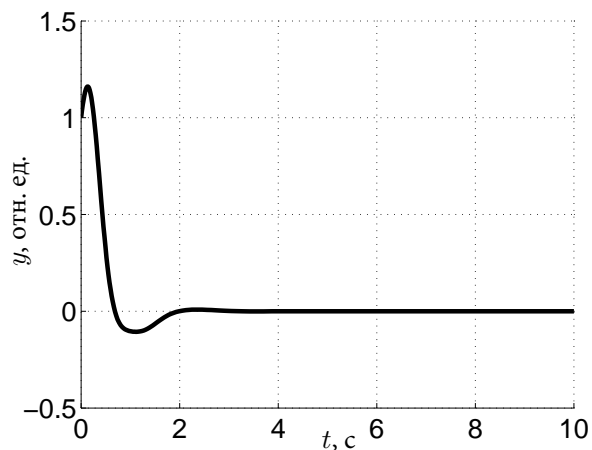
откуда следует экспоненциальная устойчивость системы (2.38).

Далее запишем

$$V(t) \leq e^{-2\beta t} V(0),$$



(а) Переходной процесс управляющего сигнала



(б) Переходной процесс выходной переменной

Рисунок 2.2. Результаты моделирования в Примере 2.

откуда с учетом (2.53) следует

$$\begin{aligned}
 \|x(t)\| &= \sqrt{x^T x} \leq \\
 &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}\{P\}}} \sqrt{x^T P x} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}\{P\}}} \sqrt{V} \leq \\
 &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}\{P\}}} e^{-\beta t} \sqrt{x^T(0) P x(0)} \leq \\
 &\leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}\{P\}}{\lambda_{\min}\{P\}}} e^{-\beta t} \|x(0)\|,
 \end{aligned}$$

откуда при  $x \in \Delta_r = 0,05 \sqrt{\frac{\lambda_{\max}\{P\}}{\lambda_{\min}\{P\}}} \|x(0)\|$  обеспечивается время переходного процесса, удовлетворяющее

$$\tau \approx \frac{3}{\beta}. \quad (2.57)$$

*Пример 2.* Рассмотрим систему (2.1), (2.2) с параметрами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Найдем передаточную функцию объекта

$$\frac{b(s)}{a(s)} = c^T (sI - A)^{-1} b = \frac{1}{s^2 + s},$$

откуда определим относительную степень  $\rho = 2$ , с учетом чего выберем закон управления (2.31),(2.32) с параметрами  $\kappa = 1$ ,

$$A_q = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_q = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \end{bmatrix},$$

где  $\sigma = 10$ .

Примем  $\Delta \mathbf{A} = 0$ , тогда

$$A = A_0, \quad b = b_0.$$

Требуется стабилизировать объект по выходу с временем переходного процесса, удовлетворяющего

$$\tau \leq \tau^* = 2c,$$

что с учетом (2.29) эквивалентно обеспечению степени устойчивости системы, удовлетворяющего

$$\alpha \geq \alpha^* = 1,5.$$

Для расчета параметров управления  $s_k$  определим составляющие параметризованной матрицы состояния замкнутой системы  $\bar{\mathbf{A}}$ ,  $\bar{\mathbf{b}}$  и  $\bar{\mathbf{c}}^T$  (2.39)

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & -100 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{c}}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислим матрицы  $W_{\bar{\mathbf{c}}^T}$  и  $W_{\bar{\mathbf{b}}^T}$

$$W_{\bar{\mathbf{c}}^T} = \begin{bmatrix} 0,7071 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0,7071 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_{\bar{\mathbf{b}}^T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Используя алгоритм поиска взаимнообратных матриц, описанный в работах [137, 138], а также в обзорной статье [139], найдем оптимальные значения  $P$

и  $R$ , удовлетворяющие условиям (2.49)–(2.52):

$$P = \begin{bmatrix} 4,2172 & 0,8303 & -0,2783 & 0,1636 \\ 0,8303 & 0,7373 & -1,2413 & 0,2387 \\ -0,2783 & -1,2413 & 11,5733 & -0,7694 \\ 0,1636 & 0,2387 & -0,7694 & 0,1805 \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

$$R = \begin{bmatrix} 0,3218 & -0,4841 & -0,0293 & 0,2234 \\ -0,4841 & 3,1346 & 0,1090 & -3,2420 \\ -0,0293 & 0,1090 & 0,1250 & 0,4154 \\ 0,2234 & -3,2420 & 0,4154 & 11,3973 \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

С учетом (2.58), (2.59), вычислим матрицы  $M$ ,  $N$ ,  $L$  линейного матричного неравенства (2.44)

$$M = \begin{bmatrix} 10,9911 & 4,8621 & -13,1747 & -0,0261 \\ 4,8621 & -0,0848 & -2,6437 & -1,3697 \\ -13,1747 & -2,6437 & -42,8562 & -1,0878 \\ -0,0261 & -1,3697 & -1,0878 & -0,9975 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 0,8303 & 0,7373 & -1,2413 & 0,2387 \end{bmatrix},$$

после чего, разрешив неравенство (2.44) относительно  $c_k$ , получим искомый вектор

$$c_k = \begin{bmatrix} 6,6228 \\ 1,9568 \end{bmatrix}.$$



Проверим выполнение заданных требований. Подставим рассчитанное значение  $c_k$  в (2.39), получим матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7,6228 & -1 & 6,6228 & 1,9568 \\ 0 & 1 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & -100 & 0 \end{bmatrix},$$

собственные числа которой равны

$$\lambda_1\{\mathbf{A}\} = -2.0812 + 2.5028j,$$

$$\lambda_2\{\mathbf{A}\} = -2.0812 - 2.5028j,$$

$$\lambda_3\{\mathbf{A}\} = -3.4188 + 7.7624j,$$

$$\lambda_4\{\mathbf{A}\} = -3.4188 - 7.7624j,$$

откуда видно, что  $\text{Re}(\lambda_i\{\mathbf{A}\}) \geq \alpha^* = 1,5$ ,  $i = \overline{1,4}$ .

Проанализируем робастность алгоритма при  $\Delta\mathbf{A} \neq 0$ . Вычислим собственные числа матрицы  $P$

$$\lambda_1\{P\} = 0,0798,$$

$$\lambda_2\{P\} = 0,4703,$$

$$\lambda_3\{P\} = 4,3711,$$

$$\lambda_4\{P\} = 11,7870,$$

откуда с учетом (2.56), получим, что при параметрической неопределенности

$$\|\Delta\mathbf{A}\| < \alpha^* \frac{\lambda_{\min}\{P\}}{\lambda_{\max}\{P\}} = 1,5 \frac{0,0798}{11,7870} = 0,0101$$

сохраняется экспоненциальная устойчивость системы (2.38). При  $\Delta\mathbf{A} = 0,01$  значение  $\beta$  равно

$$\alpha^* - \|\Delta\mathbf{A}\| \frac{\lambda_{\max}\{P\}}{\lambda_{\min}\{P\}} = 1,5 - 0,01 \frac{11,7870}{0,0798} = 0,0229.$$

Результаты моделирования приведены на Рис. 2.2.

### 2.3 Интеграция внутренней модели внешнего возмущения

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = Ax + bu + Rw, \quad (2.60)$$

$$y = c^T x, \quad (2.61)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}^1$  — управляющий сигнал,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  — вектор возмущающих воздействий,  $y \in \mathbb{R}^1$  — измеряемая выходная переменная,  $A, R, b, c$  — матрицы и векторы соответствующих размерностей.

Вектор возмущающих воздействий  $w$  рассматривается как состояние линейной системы вида

$$\dot{w} = S(\varrho)w, \quad (2.62)$$

где  $\varrho$  — вектор параметров,  $S$  — матрица соответствующей размерности.

Примем во внимания Допущения 2.1 и 2.2 относительно объекта (2.60), (2.61), а также дополним их следующими.

**Допущение 2.4.** Вектор  $\varrho$  генератора возмущений (2.62) известен.

Целью является разработка такого закона управления  $u$  с использованием измерений только выходной переменной  $y$ , который обеспечивает выполнение соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

в условиях наличия в канале управления внешних возмущений.

Выполним замену переменных для выделения нуль-динамики системы. Модель объекта (2.60), (2.61) в форме «вход-выход» имеет вид:

$$y(s) = \frac{b(s)}{a(s)}u(s) + \frac{r(s)}{a(s)}w(s), \quad (2.63)$$

где  $b(s)$  — гурвицев полином в силу Допущения 2.1.

Выполним следующие преобразования модели (2.63):

$$\begin{aligned}\frac{a(s)}{b(s)}y(s) &= u(s) + \frac{r(s)}{b(s)}w(s), \\ \left(c(s) + \frac{d(s)}{b(s)}\right)y(s) &= u(s) + \left(r_2(s) + \frac{r_1(s)}{b(s)}\right)w(s), \\ c(s)y(s) &= \left(u(s) - \frac{d(s)}{b(s)}y(s) + \frac{r_1(s)}{b(s)}w(s)\right) + r_2(s)w(s).\end{aligned}\quad (2.64)$$

Степени полиномов  $d(s)$ ,  $r_2(s)$ ,  $c(s)$ ,  $b(s)$ ,  $r_1(s)$  соответственно равны  $n - \rho - 1$ ,  $n - \rho - 1$ ,  $\rho$ ,  $n - \rho$ ,  $\rho - 1$ .

Перепишем модель объекта управления (2.64) как

$$\begin{aligned}z(s) &= \frac{d(s)}{b(s)}y(s) - \frac{r_1(s)}{b(s)} \\ y(s) &= \frac{1}{c(s)}(u(s) - z(s)) + \frac{r_2(s)}{c(s)}w(s),\end{aligned}$$

что эквивалентно модели в пространстве состояний

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} w, \quad (2.65)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & c_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

Выделим ключевые свойства системы (2.65)–(2.66).

- Матрица  $A_{11}$  гурвицева в силу Допущения 2.1.
- Матрица  $A_{22}$  может быть выбрана во фробениусовой форме, что обеспечивает следующий вид векторов  $b_2$  и  $c_2$ :

$$b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Выберем закон управления вида

$$u = -\kappa(c_k^T \xi + y) - \gamma^T \eta, \quad (2.67)$$

$$\dot{\xi} = A_q \xi + b_q y, \quad (2.68)$$

$$\dot{\eta} = \Phi \eta + g(\kappa(c_k^T \xi + y) + \gamma^T \eta), \quad (2.69)$$

где  $\kappa > 0$  матрица  $A_q$  и векторы  $b_q, c_k$  имеют вид:

$$A_q = \begin{bmatrix} -q_\rho \sigma & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -q_{\rho-1} \sigma^2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -q_2 \sigma^{\rho-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -q_1 \sigma^\rho & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad b_q = \begin{bmatrix} q_\rho \sigma \\ q_{\rho-1} \sigma^2 \\ \vdots \\ q_2 \sigma^{\rho-1} \\ q_1 \sigma^\rho \end{bmatrix}, \quad c_k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{\rho-1} \\ k_\rho \end{bmatrix},$$

где  $\sigma > 0$ , и  $q_i$  ( $i = \overline{1, \rho}$ ) выбраны из условия гурвицевости системы (2.68),  $k_i$  ( $i = \overline{1, \rho}$ ) — коэффициенты произвольного гурвицева полинома вида

$$k(s) = k_\rho s^{\rho-1} + \cdots + k_2 s + k_1,$$

матрица  $\Phi$  — произвольная гурвицева матрица во фробениусовой форме размерности  $n_w \times n_w$ , векторы  $g^T = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]$  и  $\gamma$  удовлетворяют

$$\lambda\{\Phi + g\gamma^T\} = \lambda\{S\}.$$

**Замечание 2.4.** Матрица  $F = \Phi + g\gamma^T$  представлена в канонически управляемой форме. Заметим, что ее собственные числа удовлетворяют

$$\lambda_i\{F\} = \pm j\omega_i, \quad i = \overline{1, l},$$

тогда справедливо

$$s(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2) \cdots (s^2 + \omega_l^2) = s^{2l+1} + \theta_1 s^{2l-1} + \cdots + \theta_l,$$

тогда матрица  $F$  может выбрана в форме

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -\theta_l & 0 & -\theta_{l-1} & 0 & \dots & -\theta_1 & 0 \end{bmatrix},$$

откуда матрица  $\Phi$  будет иметь вид

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & \dots & \varphi_{2l+1} \end{bmatrix},$$

откуда можем получить вектор  $\gamma$  как

$$\gamma = \begin{bmatrix} -\varphi_1 \\ -\varphi_2 - \theta_l \\ -\varphi_3 \\ \vdots \\ -\varphi_{2l-1} \\ -\varphi_{2l} - \theta_1 \\ -\varphi_{2l+1} \end{bmatrix}.$$

Объединяя объект (2.65), (2.66) с законом управления (2.67)-(2.69) получим модель замкнутой системы

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} - \kappa b_2 c_2^T & -\kappa b_2 c_k^T & -b_2 \gamma^T \\ 0 & b_q c_2^T & A_q & 0 \\ 0 & \kappa g c_2^T & \kappa g c_k^T & \Phi + g \gamma^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w. \quad (2.70)$$

Введем новую переменную  $\chi = z_2 - \xi$  и вычислим ее производную:

$$\begin{aligned}
\dot{\chi} &= \dot{z}_2 - \dot{\xi} = \\
&= A_{21}z_1 + A_{22}z_2 - \kappa b_2 c_2^T z_2 - \underbrace{\kappa b_2 c_k^T (z_2 - \chi)}_{\xi} - \\
&\quad - b_2 \gamma^T \eta + R_2 w - b_q c_2^T z_2 - A_q \underbrace{(z_2 - \chi)}_{\xi} = \\
&= A_{21}z_1 + (A_{22} - \underbrace{(A_q + b_q c_2^T)}_{I_0} - \kappa b_2 (c_k^T + c_2^T))z_2 + \\
&\quad + (A_q + \kappa b_2 c_k^T)\chi - b_2 \gamma^T \eta + R_2 w,
\end{aligned}$$

где

$$I_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.71)$$

Перепишем модель замкнутой системы (2.70) с использованием новой переменной  $\chi$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{\chi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} - \kappa b_2 (c_k^T + c_2^T) & \kappa b_2 c_k^T & -b_2 \gamma^T \\ A_{21} & A_{22} - I_0 - \kappa b_2 (c_k^T + c_2^T) & A_q + \kappa b_2 c_k^T & -b_2 \gamma^T \\ 0 & \kappa g (c_k^T + c_2^T) & -\kappa g c_k^T & \Phi + g \gamma^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \chi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_2 \\ 0 \end{bmatrix} w. \quad (2.72)$$

Введем новую переменную  $\zeta = g(b_2^T b_2)^{-1} b_2^T z_2 + \eta$  и вычислим ее производную:

$$\begin{aligned}
\dot{\zeta} &= g(b_2^T b_2)^{-1} b_2^T \dot{z}_2 + \dot{\eta} = \\
&= g(b_2^T b_2)^{-1} b_2^T A_{21} z_1 + g(b_2^T b_2)^{-1} b_2^T A_{22} z_2 - \kappa g \underbrace{(b_2^T b_2)^{-1} b_2^T (c_k^T + c_2^T)}_I z_2 + \\
&\quad + \kappa g \underbrace{(b_2^T b_2)^{-1} b_2^T c_k^T}_I \chi - g \underbrace{(b_2^T b_2)^{-1} b_2^T}_{I} \gamma^T \underbrace{(\zeta - g(b_2^T b_2)^{-1} b_2^T z_2)}_{\eta} + \\
&\quad + g(b_2^T b_2)^{-1} b_2^T R_2 w + \kappa g (c_k^T + c_2^T) z_2 - \kappa g c_k^T \chi + \\
&\quad + (\Phi + g \gamma^T) \underbrace{(\zeta - g(b_2^T b_2)^{-1} b_2^T z_2)}_{\eta} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g(b_2^T b_2)^{-1} b_2^T A_{21} z_1 + (g(b_2^T b_2)^{-1} b_2^T A_{22} + \underbrace{(g\gamma^T - g\gamma^T - \Phi)}_0) g(b_2^T b_2)^{-1} b_2^T z_2 + \\
&\quad + (\Phi + \underbrace{g\gamma^T - g\gamma^T}_0) \zeta + g(b_2^T b_2)^{-1} b_2^T R_2 w \\
&= g(b_2^T b_2)^{-1} b_2^T A_{21} z_1 + (g(b_2^T b_2)^{-1} b_2^T A_{22} - \Phi g(b_2^T b_2)^{-1} b_2^T) z_2 + \\
&\quad + \Phi \zeta + g(b_2^T b_2)^{-1} b_2^T R_2 w.
\end{aligned}$$

С учетом структуры вектора  $b_2$  примем

$$(b_2^T b_2)^{-1} b_2^T = b_0^{-2} b_2^T = \bar{b}_2^T,$$

где

$$\bar{b}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{1}{b_0} \end{bmatrix},$$

где  $b_0 \neq 0$ .

Перепишем модель замкнутой системы (2.72) с использованием новой переменной  $\zeta$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{\chi} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} - \kappa b_2(c_k^T + c_2^T) + b_2 \gamma^T g \bar{b}_2^T & \kappa b_2 c_k^T & -b_2 \gamma^T \\ A_{21} & A_{22} - I_0 - \kappa b_2(c_k^T + c_2^T) + b_2 \gamma^T g \bar{b}_2^T & A_q + \kappa b_2 c_k^T & -b_2 \gamma^T \\ g \bar{b}_2^T A_{21} & g \bar{b}_2^T A_{22} - \Phi g \bar{b}_2^T & 0 & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \chi \\ \zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_2 \\ g \bar{b}_2^T R_2 \end{bmatrix} w. \quad (2.73)$$

Поменяв местами элементы состояния, перепишем модель (2.73) в виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{\zeta} \\ \dot{z}_2 \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{12} & 0 \\ g \bar{b}_2^T A_{21} & \Phi & g \bar{b}_2^T A_{22} - \Phi g \bar{b}_2^T & 0 \\ A_{21} & -b_2 \gamma^T & A_{22} - \kappa b_2(c_k^T + c_2^T) + b_2 \gamma^T g \bar{b}_2^T & \kappa b_2 c_k^T \\ A_{21} & -b_2 \gamma^T & A_{22} - I_0 - \kappa b_2(c_k^T + c_2^T) + b_2 \gamma^T g \bar{b}_2^T & A_q + \kappa b_2 c_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \zeta \\ z_2 \\ \chi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ g \bar{b}_2^T R_2 \\ R_2 \\ R_2 \end{bmatrix} w. \quad (2.74)$$

В силу Допущения 2.1 и выбранного базиса модели (2.65), (2.66) матрица  $A_{11}$  гурвицева. Далее заметим, что блок

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ g \bar{b}_2^T A_{21} & \Phi \end{bmatrix}$$

гурвицев, в силу соответствующего выбора матрицы  $\Phi$  в (2.69). В самом деле, система с такой матрицей состояния

$$\begin{bmatrix} \dot{\varsigma}_1 \\ \dot{\varsigma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ g \bar{b}_2^T A_{21} & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \end{bmatrix}$$

представляет собой последовательное соединение двух устойчивых систем.

Далее можно показать, что существует число  $\kappa^*$  такое, что для  $\forall \kappa \geq \kappa^*$  блок

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{12} \\ g\bar{b}_2^T A_{21} & \Phi & g\bar{b}_2^T A_{22} - \Phi g\bar{b}_2^T \\ A_{21} & -b_2\gamma^T & A_{22} - \kappa b_2(c_k^T + c_2^T) + b_2\gamma^T g\bar{b}_2^T \end{bmatrix}$$

гурвицев. Действительно, от параметра  $\kappa$  зависит только блочный элемент  $A_{22} - \kappa b_2(c_k^T + c_2^T) + b_2\gamma^T g\bar{b}_2^T$ , поэтому увеличение этого параметра не окажет влияния на остальные блочные элементы, а при достаточно большом значении приведет к смещению спектра блока  $\mathbf{A}_2$  влево от мнимой оси.

В силу структуры матрицы  $A_q$  аналогично можно показать, что матрица

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{12} & 0 \\ g\bar{b}_2^T A_{21} & \Phi & g\bar{b}_2^T A_{22} - \Phi g\bar{b}_2^T & 0 \\ A_{21} & -b_2\gamma^T & A_{22} - \kappa b_2(c_k^T + c_2^T) + b_2\gamma^T g\bar{b}_2^T & \kappa b_2 c_k^T \\ A_{21} & -b_2\gamma^T & A_{22} - I_0 - \kappa b_2(c_k^T + c_2^T) + b_2\gamma^T g\bar{b}_2^T & A_q + \kappa b_2 c_k^T \end{bmatrix}.$$

гурвицева. Действительно, параметр  $\sigma$ , совместно с вектором  $c_k$  определяющий устойчивую динамику  $A_q$ , а значит и блока  $A_q + \kappa b_2 c_k^T$ , не содержится в остальных блочных элементах, поэтому его увеличение будет способствовать смещению спектра матрицы  $\mathbf{A}$  влево от мнимой оси.

Таким образом, за счет выбора параметров  $\gamma$ ,  $\kappa$ ,  $\sigma$  в системе (2.74) можно добиться гурвицевости всех диагональных блочных элементов матрицы  $\mathbf{A}$ , откуда следует гурвицевость всей матрицы в целом.

Проанализируем значение ошибки в установившемся режиме. Для этого воспользуемся соответствующим выражением Сильвестра для модели (2.70):

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_\xi \\ \Sigma \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} - \kappa b_2 c_2^T & -\kappa b_2 c_k^T & -b_2\gamma^T \\ 0 & b_q c_2^T & A_q & 0 \\ 0 & \kappa g c_2^T & \kappa g c_k^T & \Phi + g\gamma^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_\xi \\ \Sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$



где обратим внимание на четвертую строчку:

$$\Sigma S = (\Phi + g\gamma^T)\Sigma + \kappa g(c_2^T \Pi_2 + c_k^T \Pi_\xi),$$

откуда видно, что в установившемся режиме

$$c_2^T \Pi_2 + c_k^T \Pi_\xi = 0. \quad (2.75)$$

Найдем соотношение между  $c_2^T \Pi_2$  и  $c_k^T \Pi_\xi$ . Рассмотрим вспомогательную переменную  $z_0$ :

$$z_0 = y + c_k^T \xi, \quad (2.76)$$

установившееся значение которой с учетом (2.75) равно нулю.

Из (2.68) имеем

$$\xi(s) = (sI - A_q)^{-1}(b_q y(s) + \xi(0)),$$

где  $\xi(0)$  — начальные условия.

Тогда для (2.76) запишем

$$\begin{aligned} z_0(s) &= y(s) + c_k^T (sI - A_q)^{-1} (b_q y(s) + \xi_1(0) + \xi_2(0)) = \\ &= (c_k^T (sI - A_q)^{-1} b_q + 1) y(s) + \varepsilon(s), \end{aligned}$$

где  $\varepsilon(s) = c_k^T (sI - A_q)^{-1} (\xi_1(0) + \xi_2(0))$  соответствует экспоненциально затухающей функции  $\varepsilon$ .

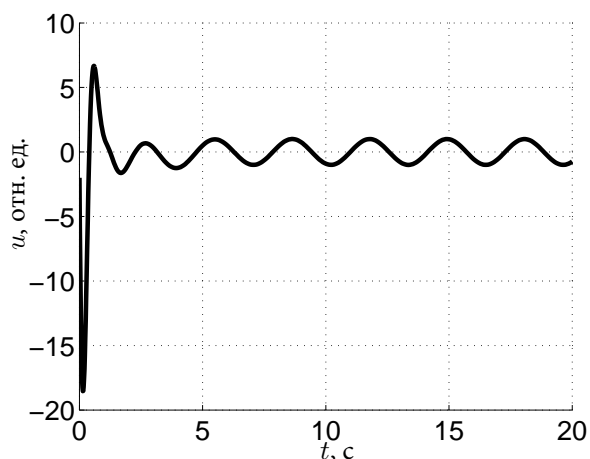
Если  $c_k^T$  выбран таким образом, что числитель передаточной функции  $(c_k^T (sI - A_q)^{-1} b_q + 1)$  гурвицев и относительная степень равна нулю, то из

$$y(s) = (c_k^T (sI - A_q)^{-1} b_q + 1)^{-1} (z_0(s) - \varepsilon(s))$$

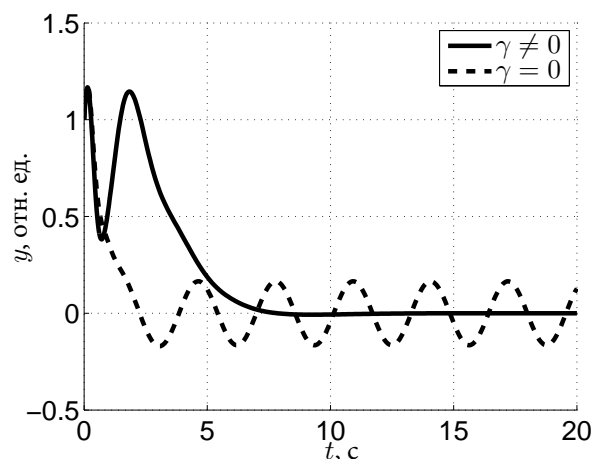
найдем, что установившаяся ошибка  $y$ , равно как и  $c_k^T \xi$ , сходится к нулю.

*Пример 3. Рассмотрим систему (2.60), (2.61) с параметрами*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



(а) Переходной процесс управляющего сигнала



(б) Переходной процесс выходной переменной

Рисунок 2.3. Результаты моделирования в Примере 3.

и генератор возмущения (2.62) с параметрами

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad w(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Найдем передаточную функцию объекта

$$\frac{b(s)}{a(s)} = c^T (sI - A)^{-1} b = \frac{1}{s^2 + s},$$

откуда определим относительную степень  $\rho = 2$ , с учетом чего выберем закон управления (2.67)–(2.69) с параметрами  $\kappa = 2$ ,

$$A_q = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_q = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \end{bmatrix}, \quad c_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где  $\sigma = 10$ .

Вычислим вектор  $\gamma$  в соответствии с Замечанием 2.4

$$\gamma = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Результаты моделирования приведены на Рис. 2.3.

## **2.4 Выводы по главе**

В разделе 1.1 разработан алгоритм синтеза робастных регуляторов по выходу в пространстве состояний на основе принципа сильной обратной связи.

В разделе 1.2 разработан алгоритм обеспечения заданного быстродействия замкнутой системы. Проведено численное моделирование.

В разделе 1.3 разработан алгоритм компенсации внешних возмущений с использованием метода внутренней модели.

Предлагаемые решения проиллюстрированы численным моделированием.

### Глава 3

## КВАЗИМНОГОМЕРНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЕКОМПОЗИРУЕМЫМИ МНОГОКАНАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ С НАСЫЩЕНИЕМ ПО ВХОДУ

В настоящей главе представлено решение Задачи 2. Разработан алгоритм робастного управления по выходу с антивиндап-коррекцией для объектов с насыщением по входу. Приведено доказательство абсолютной устойчивости замкнутой системы с разработанным регулятором с помощью критерия Попова. С использованием метода декомпозиции разработанный регулятор был применен в задаче стабилизации беспилотного летательного аппарата типа квадрокоптер. Проведены экспериментальные исследования базе испытательного стенда «КОМЕКС-1» лаборатории управления сложными системами ИПМаш РАН. В ряде работ были исследованы частные случаи синтеза управления для квадрокоптеров с различными постановками задач [6, 12, 13, 18, 26, 29]. В развитие этих работ далее представлен более общий результат.

### 3.1 Управление с компенсацией внешних возмущений и антивиндап-коррекцией

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = Ax + bu + Rw, \quad (3.1)$$

$$y = c^T x, \quad (3.2)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}^1$  — управляющий сигнал,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  — вектор возмущающих воздействий,  $y \in \mathbb{R}^1$  — измеряемая выходная переменная,  $A$ ,  $R$ ,  $b$ ,  $c$  — матрицы и векторы соответствующих размерностей.

Вектор возмущающих воздействий  $w$  рассматривается как состояние линейной системы вида

$$\dot{w} = S(\varrho)w, \quad (3.3)$$

где  $\rho$  — вектор параметров,  $S$  — матрица соответствующей размерности.

Управляющий сигнал  $u$  удовлетворяет условию насыщения

$$u = \text{sat}(v) = \begin{cases} u_{max} & \text{при } v \geq u_{max}, \\ u & \text{при } u_{min} < v < u_{max}, \\ u_{min} & \text{при } v \leq u_{min}, \end{cases} \quad (3.4)$$

$u_{min}$  и  $u_{max}$  — пределы насыщения по входу,  $v$  — управляющий сигнал, генерируемый номинальным линейным регулятором.

Примем во внимания следующие допущения.

**Допущение 3.1.** *Объект (3.1), (3.2) минимально-фазовый (нуль-динамика устойчива).*

**Допущение 3.2.** *Относительная степень объекта (3.1), (3.2)  $\rho \geq 1$  известна.*

**Допущение 3.3.** *Вектор  $\rho$  генератора возмущений (3.3) известен.*

**Допущение 3.4.** *Пределы насыщения по входу  $u_{min}$  и  $u_{max}$  равны по модулю, но имеют противоположные знаки:*

$$\begin{aligned} |u_{min}| &= |u_{max}|, \\ u_{min} + u_{max} &= 0. \end{aligned}$$

**Допущение 3.5.** *Возмущающее воздействие ограничено  $w \in \mathcal{L}_\infty$ , причем номинальный управляющий сигнал  $u_0$ , необходимый для компенсации такого возмущения в установившемся режиме удовлетворяет неравенству*

$$u_{min} \leq |u_0| \leq u_{max}.$$

Целью является разработка такого закона управления  $u$  с использованием измерений только выходной переменной  $y$ , который обеспечивает выполнение соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

в условиях влияния внешнего возмущения с компенсацией интегрального насыщения при ограничениях на входное воздействие (3.4).

Выполнив замену переменных для выделения нуль-динамики системы, запишем эквивалентную модель объекта (3.1), (3.2) в пространстве состояний

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} w, \quad (3.5)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & c_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

где  $A_{11}$  гурвицева в силу Допущения 3.1, векторы  $b_2$  и  $c_2$  имеют вид

$$b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### 3.1.1 Компенсация статических возмущений

Рассмотрим генератор возмущений (3.3) при

$$S = 0,$$

что эквивалентно статическому сигналу.

Выберем закон управления вида

$$v = -\kappa(c_k^T \xi + y) - \gamma \eta, \quad (3.7)$$

$$\dot{\xi} = A_q \xi + b_q y, \quad (3.8)$$

$$\dot{\eta} = \kappa(c_k^T \xi + y) + \nu \varkappa(v), \quad (3.9)$$

$$\varkappa(v) = v - \text{sat}(v), \quad (3.10)$$

где  $\varkappa(v)$  — нелинейный сигнал антивиндап-коррекции,  $\kappa > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\nu > 0$ , матрица  $A_q$  и векторы  $b_q$ ,  $c_k$  имеют вид:

$$A_q = \begin{bmatrix} -q_\rho \sigma & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -q_{\rho-1} \sigma^2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -q_2 \sigma^{\rho-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -q_1 \sigma^\rho & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad b_q = \begin{bmatrix} q_\rho \sigma \\ q_{\rho-1} \sigma^2 \\ \vdots \\ q_2 \sigma^{\rho-1} \\ q_1 \sigma^\rho \end{bmatrix}, \quad c_k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{\rho-1} \\ k_\rho \end{bmatrix},$$

где  $\sigma > 0$  и  $q_i$  ( $i = \overline{1, \rho}$ ) выбраны из условия гурвицевости системы (3.8),  $k_i$  ( $i = \overline{1, \rho}$ ) — коэффициенты произвольного гурвицева полинома вида

$$k(s) = k_\rho s^{\rho-1} + \cdots + k_2 s + k_1.$$

Объединяя объект (3.5), (3.6) с законом управления (3.7)-(3.10) получим модель замкнутой системы

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} - \kappa b_2 c_2^T & -\kappa b_2 c_k^T & -b_2 \gamma \\ 0 & b_q c_2^T & A_q & 0 \\ 0 & \kappa c_2^T & \kappa c_k^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -b_2 \\ 0 \\ \nu \end{bmatrix} \varkappa + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w. \quad (3.11)$$

Введем новую переменную  $\chi = z_2 - \xi$  и вычислим ее производную:

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= \dot{z}_2 - \dot{\xi} = \\ &= A_{21} z_1 + A_{22} z_2 - \kappa b_2 c_2^T z_2 - \underbrace{\kappa b_2 c_k^T (z_2 - \chi)}_{\xi} - \\ &\quad - b_2 \gamma \eta - b_2 \varkappa + R_2 w - b_q c_2^T z_2 - \underbrace{A_q (z_2 - \chi)}_{\xi} = \\ &= A_{21} z_1 + (A_{22} - \underbrace{(A_q + b_q c_2^T)}_{I_0} - \kappa b_2 (c_k^T + c_2^T)) z_2 + \\ &\quad + (A_q + \kappa b_2 c_k^T) \chi - b_2 \gamma \eta - b_2 \varkappa + R_2 w, \end{aligned}$$

где

$$I_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Перепишем замкнутую модель (3.11) с использованием новой переменной  $\chi$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{\chi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} - \kappa b_2(c_k^T + c_2^T) & \kappa b_2 c_k^T & -b_2 \gamma \\ A_{21} & A_{22} - I_0 - \kappa b_2(c_k^T + c_2^T) & A_q + \kappa b_2 c_k^T & -b_2 \gamma \\ 0 & \kappa(c_k^T + c_2^T) & -\kappa c_k^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \chi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -b_2 \\ -b_2 \\ \nu \end{bmatrix} \varkappa + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_2 \\ 0 \end{bmatrix} w. \quad (3.13)$$

Введем новую переменную  $\zeta = (b_2^T b_2)^{-1} b_2^T z_2 + \eta$  и вычислим ее производную:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= (b_2^T b_2)^{-1} b_2^T \dot{z}_2 + \dot{\eta} = \\ &= (b_2^T b_2)^{-1} b_2^T A_{21} z_1 + (b_2^T b_2)^{-1} b_2^T A_{22} z_2 - \underbrace{\kappa (b_2^T b_2)^{-1} b_2^T b_2 (c_k^T + c_2^T)}_I z_2 + \\ &\quad + \underbrace{\kappa (b_2^T b_2)^{-1} b_2^T b_2 c_k^T}_I \chi - \underbrace{\gamma (b_2^T b_2)^{-1} b_2^T b_2}_I (\underbrace{\zeta - (b_2^T b_2)^{-1} b_2^T z_2}_\eta) - \\ &\quad - \underbrace{(b_2^T b_2)^{-1} b_2^T b_2}_I \varkappa + (b_2^T b_2)^{-1} b_2^T R_2 w + \kappa(c_k^T + c_2^T) z_2 - \kappa c_k^T \chi + \nu \varkappa = \\ &= (b_2^T b_2)^{-1} b_2^T A_{21} z_1 + (b_2^T b_2)^{-1} b_2^T (A_{22} + \gamma I) z_2 - \gamma \zeta + (\nu - 1) \varkappa + \\ &\quad + (b_2^T b_2)^{-1} b_2^T R_2 w. \end{aligned} \quad (3.14)$$

С учетом структуры вектора  $b_2$  примем

$$(b_2^T b_2)^{-1} b_2^T = b_0^{-2} b_2^T = \bar{b}_2^T,$$

где

$$\bar{b}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{b_0} \end{bmatrix},$$

где  $b_0 \neq 0$ .

Перепишем замкнутую модель (3.13) с использованием новой переменной  $\zeta$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{\chi} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} - \kappa b_2(c_k^T + c_2^T) + \gamma b_2 \bar{b}_2^T & \kappa b_2 c_k^T & -b_2 \gamma \\ A_{21} & A_{22} - I_0 - \kappa b_2(c_k^T + c_2^T) + \gamma b_2 \bar{b}_2^T & A_q + \kappa b_2 c_k^T & -b_2 \gamma \\ \bar{b}_2^T A_{21} & \bar{b}_2^T (A_{22} + \gamma I) & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \chi \\ \zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -b_2 \\ -b_2 \\ (\nu - 1) \end{bmatrix} \varkappa + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_2 \\ \bar{b}_2^T R_2 \end{bmatrix} w. \quad (3.15)$$



Поменяв местами элементы состояния, перепишем модель (3.15) в виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{\zeta} \\ \dot{z}_2 \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{12} & 0 \\ \bar{b}_2^T A_{21} & -\gamma & \bar{b}_2^T (A_{22} + \gamma I) & 0 \\ A_{21} & -b_2 \gamma & A_{22} - \kappa b_2 (c_k^T + c_2^T) + \gamma b_2 \bar{b}_2^T & \kappa b_2 c_k^T \\ A_{21} & -b_2 \gamma & A_{22} - I_0 - \kappa b_2 (c_k^T + c_2^T) + \gamma b_2 \bar{b}_2^T & A_q + \kappa b_2 c_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \zeta \\ z_2 \\ \chi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (\nu - 1) \\ -b_2 \\ -b_2 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} R_1 \\ \bar{b}_2^T R_2 \\ R_2 \\ R_2 \end{bmatrix} w. \quad (3.16)$$

В силу Допущения 3.1 и выбранного базиса модели (3.5), (3.6) матрица  $A_{11}$  гурвицева. Далее заметим, что блок

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ \bar{b}_2^T A_{21} & -\gamma \end{bmatrix}$$

гурвицев, поскольку выбор  $\gamma > 0$  обеспечит смещение спектра блока  $\mathbf{A}_1$  влево от мнимой оси. Действительно, система с такой матрицей состояния

$$\begin{bmatrix} \dot{\varsigma}_1 \\ \dot{\varsigma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ \bar{b}_2^T A_{21} & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \end{bmatrix}$$

представляет собой последовательное соединение двух устойчивых систем.

Далее можно показать, что существует такое число  $\kappa^*$ , что для  $\forall \kappa \geq \kappa^*$  блок

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{12} \\ \bar{b}_2^T A_{21} & -\gamma & \bar{b}_2^T (A_{22} + \gamma I) \\ A_{21} & -b_2 \gamma & A_{22} - \kappa b_2 (c_k^T + c_2^T) + \gamma b_2 \bar{b}_2^T \end{bmatrix}$$

гурвицев. Действительно, от параметра  $\kappa$  зависит только блочный элемент  $A_{22} - \kappa b_2 (c_k^T + c_2^T) + \gamma b_2 \bar{b}_2^T$ , поэтому увеличение этого параметра не окажет влияния на оставшиеся блочные элементы, а при достаточно большом значении приведет к смещению спектра блока  $\mathbf{A}_2$  влево от мнимой оси.

В силу структуры матрицы  $A_q$  аналогично можно показать, что матрица

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{12} & 0 \\ \bar{b}_2^T A_{21} & -\gamma & \bar{b}_2^T (A_{22} + \gamma I) & 0 \\ A_{21} & -b_2 \gamma & A_{22} - \kappa b_2 (c_k^T + c_2^T) + \gamma b_2 \bar{b}_2^T & \kappa b_2 c_k^T \\ A_{21} & -b_2 \gamma & A_{22} - I_0 - \kappa b_2 (c_k^T + c_2^T) + \gamma b_2 \bar{b}_2^T & A_q + \kappa b_2 c_k^T \end{bmatrix}.$$

гурвицева. Действительно, параметр  $\sigma$ , совместно с вектором  $c_k$  определяющий устойчивую динамику  $A_q$ , а значит и блока  $A_q + \kappa b_2 c_k^T$ , не содержится в остальных блочных элементах, поэтому его увеличение будет способствовать смещению спектра матрицы  $\mathbf{A}$  влево от мнимой оси.

Таким образом, в силу выбора параметров  $\gamma, \kappa, \sigma$  в системе (3.16) можно добиться гурвицевости всех диагональных блочных элементов матрицы  $\mathbf{A}$ , откуда следует гурвицевость всей матрицы в целом.

Временно допустим, что  $w = 0$ , и рассмотрим случай без внешних возмущений. Запишем замкнутую систему (3.16) в компактном виде как объединение объекта (3.1),(3.2) и закона управления (3.7)–(3.10)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\varkappa(v), \quad (3.17)$$

$$v = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (3.18)$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A - \kappa b c^T & -\kappa b c_k^T & -\gamma b \\ b_q c^T & A_q & 0 \\ \kappa c^T & \kappa c_k^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ \nu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\kappa c \\ -\kappa c_k \\ -\gamma \end{bmatrix}.$$

**Утверждение 3.1.** *Замкнутая система, состоящая из линейной части (3.17)–(3.18) и функции без памяти  $\varkappa(v)$ , абсолютно устойчива при всех начальных условиях.*

*Доказательство.* Согласно критерию Попова [100], замкнутая система, состоящая из линейной части (3.17)–(3.18) и функции без памяти  $\varkappa(v)$  абсолютно устойчива, если существует константа  $\varpi \geq 0$ , такая что

$$(1 + \lambda_i \varpi) \neq 0$$

для каждого собственного числа  $\lambda_i$  матрицы  $\mathbf{A}$ , а также передаточная функция

$$W(s) = 1 + (1 + s\varpi)W_\ell(s)$$

строго положительно вещественная, где  $W_\ell(s)$  — передаточная функция линейной части системы (3.17)–(3.18), определяемая как

$$W_\ell(s) = \mathbf{c}^T (sI - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}. \quad (3.19)$$

Примем  $\varpi = 0$ , тогда для доказательства абсолютной устойчивости системы достаточно показать строго положительную вещественность передаточной функции

$$W(s) = 1 + W_\ell(s). \quad (3.20)$$

Вычислим передаточную функцию (3.19)

$$\begin{aligned} W_\ell(s) &= \begin{bmatrix} -\kappa c^T & -\kappa c_k^T & -\gamma \end{bmatrix} \left( sI - \begin{bmatrix} A - \kappa bc^T & -\kappa bc_k^T & -\gamma b \\ b_q c^T & A_q & 0 \\ \kappa c^T & \kappa c_k^T & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ \nu \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\kappa c^T & -\kappa c_k^T & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A + \kappa bc^T & \kappa bc_k^T & \gamma b \\ -b_q c^T & sI - A_q & 0 \\ -\kappa c^T & -\kappa c_k^T & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ \nu \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\kappa c^T & -\kappa c_k^T & -\gamma \end{bmatrix} \mathcal{A} \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ \nu \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Выразив матрицу  $\mathcal{A}$  в блочном виде как

$$\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{A}}_{11} & \bar{\mathcal{A}}_{12} \\ \bar{\mathcal{A}}_{21} & \bar{\mathcal{A}}_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{A}}_{11} &= sI - A + \kappa bc^T, & \bar{\mathcal{A}}_{12} &= \begin{bmatrix} \kappa bc_k^T & \gamma b \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathcal{A}}_{21} &= \begin{bmatrix} -b_q c^T \\ -\kappa c^T \end{bmatrix}, & \bar{\mathcal{A}}_{22} &= \begin{bmatrix} sI - A_q & 0 \\ -\kappa c_k^T & s \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

воспользуемся формулой Фробениуса для расчета блочной обратной матрицы.

Вычислим обратную матрицу от блока  $\bar{\mathcal{A}}_{22}$

$$\bar{\mathcal{A}}_{22} = \begin{bmatrix} sI - A_q & 0 \\ -\kappa c_k^T & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (sI - A_q)^{-1} & 0 \\ \frac{\kappa}{s} c_k^T (sI - A_q)^{-1} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_q & 0 \\ \frac{\kappa}{s} c_k^T \mathcal{A}_q & \frac{1}{s} \end{bmatrix},$$

где

$$\mathcal{A}_q = (sI - A_q)^{-1}.$$

Вычислим блок  $\mathcal{A}_{11}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{11} &= \left( sI - A + \kappa b c^T - \begin{bmatrix} \kappa b c_k^T & \gamma b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_q(s) & 0 \\ \frac{\kappa}{s} c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_q c^T \\ -\kappa c^T \end{bmatrix} \right)^{-1} = \\ &= \left( sI - A + \kappa b c^T - \begin{bmatrix} \kappa b c_k^T \mathcal{A}_q(s) + \frac{\gamma \kappa}{s} b c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \frac{\gamma}{s} b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_q c^T \\ -\kappa c^T \end{bmatrix} \right)^{-1} = \\ &= \left( sI - A + \kappa b c^T + \kappa b c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q c^T + \frac{\gamma \kappa}{s} b c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q c^T + \frac{\gamma \kappa}{s} b c^T \right)^{-1} = \\ &= \left( sI - A + \frac{\kappa}{s} b (s c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q + s + \gamma c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q + \gamma) c^T \right)^{-1} = \\ &= \left( sI - A + \frac{\kappa}{s} b (s (c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q + 1) + \gamma (c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q + 1)) c^T \right)^{-1} = \\ &= \left( sI - A + \frac{\kappa}{s} b ((c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q + 1)(s + \gamma)) c^T \right)^{-1} = \\ &= \left( sI - A + b \frac{\kappa b_q(s)(s + \gamma)}{s a_q(s)} c^T \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где

$$\frac{b_q(s)}{a_q(s)} = c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q + 1. \quad (3.23)$$

**Замечание 3.1.** Заметим, что в силу выбора матрицы  $A_q$  и векторов  $b_q$  и  $c_k$  можно обеспечить гурвицевость числителя и знаменателя передаточной функции (3.23).

Вычислим блок  $\mathcal{A}_{12}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{12} &= -\mathcal{A}_{11} \begin{bmatrix} \kappa b c_k^T & \gamma b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_q(s) & 0 \\ \frac{\kappa}{s} c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \\
&= -\mathcal{A}_{11} \begin{bmatrix} \kappa b c_k^T \mathcal{A}_q(s) + \frac{\gamma \kappa}{s} b c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \frac{\gamma}{s} b \end{bmatrix} = \\
&= -\mathcal{A}_{11} \begin{bmatrix} \kappa b c_k^T \mathcal{A}_q(s) (1 + \frac{\gamma}{s}) & \frac{\gamma}{s} b \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\kappa(s+\gamma)}{s} \mathcal{A}_{11} b c_k^T \mathcal{A}_q(s) & -\frac{\gamma}{s} \mathcal{A}_{11} b \end{bmatrix}. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Вычислим блок  $\mathcal{A}_{21}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{21} &= - \begin{bmatrix} \mathcal{A}_q(s) & 0 \\ \frac{\kappa}{s} c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_q c^T \\ -\kappa c^T \end{bmatrix} \mathcal{A}_{11} = \\
&= - \begin{bmatrix} -\mathcal{A}_q(s) b_q c^T \\ -\frac{\kappa}{s} c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q c^T - \frac{\kappa}{s} c^T \end{bmatrix} \mathcal{A}_{11} = \\
&= \begin{bmatrix} \mathcal{A}_q(s) b_q c^T \\ \frac{\kappa}{s} (c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q + 1) c^T \end{bmatrix} \mathcal{A}_{11},
\end{aligned}$$

откуда с учетом (3.23) имеем

$$\mathcal{A}_{21} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_q(s) b_q c^T \mathcal{A}_{11} \\ \frac{\kappa b_q(s)}{s a_q(s)} c^T \mathcal{A}_{11} \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

Вычислим блок  $\mathcal{A}_{22}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{22} &= \bar{\mathcal{A}}_{22} - \mathcal{A}_{21} \begin{bmatrix} \frac{\kappa(s+\gamma)}{s} b c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \frac{\gamma}{s} b \end{bmatrix} = \\
&= \bar{\mathcal{A}}_{22} - \begin{bmatrix} \mathcal{A}_q(s) b_q c^T \mathcal{A}_{11} \\ \frac{\kappa b_q(s)}{s a_q(s)} c^T \mathcal{A}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\kappa(s+\gamma)}{s} b c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \frac{\gamma}{s} b \end{bmatrix} = \\
&= \bar{\mathcal{A}}_{22} - \begin{bmatrix} \frac{\kappa(s+\gamma)}{s} \mathcal{A}_q(s) b_q c^T \mathcal{A}_{11} b c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \frac{\gamma}{s} \mathcal{A}_q(s) b_q c^T \mathcal{A}_{11} b \\ \frac{\kappa^2(s+\gamma) b_q(s)}{s^2 a_q(s)} c^T \mathcal{A}_{11} b c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \frac{\gamma \kappa b_q(s)}{s^2 a_q(s)} c^T \mathcal{A}_{11} b \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

обозначив

$$\begin{aligned}
\frac{\beta(s)}{\alpha(s)} &= c^T \mathcal{A}_{11} b = c^T \left( sI - A + b \frac{\kappa b_q(s)(s+\gamma)}{s a_q(s)} c^T \right)^{-1} b = \\
&= \frac{b(s) s a_q(s)}{s a_q(s) a(s) + \kappa b_q(s)(s+\gamma) b(s)}, \tag{3.26}
\end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{22} &= \begin{bmatrix} \mathcal{A}_q(s) & 0 \\ \frac{\kappa}{s} c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \frac{1}{s} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\kappa(s+\gamma)}{s} \mathcal{A}_q(s) b_q \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \frac{\gamma}{s} \mathcal{A}_q(s) b_q \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} \\ \frac{\kappa^2(s+\gamma) b_q(s)}{s^2 a_q(s)} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \frac{\gamma \kappa b_q(s)}{s^2 a_q(s)} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\kappa(s+\gamma)}{s} \mathcal{A}_q(s) b_q \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} c_k^T\right) \mathcal{A}_q(s) & -\frac{\gamma}{s} \mathcal{A}_q(s) b_q \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} \\ \left(1 - \frac{\kappa(s+\gamma) b_q(s)}{s a_q(s)} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}\right) \frac{\kappa}{s} c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \left(1 - \frac{\gamma \kappa b_q(s)}{s a_q(s)} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}\right) \frac{1}{s} \end{bmatrix}, \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Вернемся к блочной матрице (3.21) и с учетом (3.22), (3.24), (3.25), (3.27) запишем

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & -\frac{\kappa(s+\gamma)}{s} \mathcal{A}_{11} b c_k^T \mathcal{A}_q(s) & -\frac{\gamma}{s} \mathcal{A}_{11} b \\ \mathcal{A}_q(s) b_q c^T \mathcal{A}_{11} & \left(1 - \frac{\kappa(s+\gamma)}{s} \mathcal{A}_q(s) b_q \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} c_k^T\right) \mathcal{A}_q(s) & -\frac{\gamma}{s} \mathcal{A}_q(s) b_q \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} \\ \frac{\kappa b_q(s)}{s a_q(s)} c^T \mathcal{A}_{11} & \left(1 - \frac{\kappa(s+\gamma) b_q(s)}{s a_q(s)} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}\right) \frac{\kappa}{s} c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \left(1 - \frac{\gamma \kappa b_q(s)}{s a_q(s)} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}\right) \frac{1}{s} \end{bmatrix}.$$

Вычислим передаточную функцию

$$\begin{aligned}
W_\ell(s) &= \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ \nu \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -\kappa c^T & -\kappa c_k^T & -\gamma \end{bmatrix} \mathcal{A} \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ \nu \end{bmatrix} = \\
&= \kappa c^T \mathcal{A}_{11} b + \kappa c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q c^T \mathcal{A}_{11} b + \frac{\gamma \kappa b_q(s)}{s a_q(s)} c^T \mathcal{A}_{11} b + \frac{\gamma \nu \kappa}{s} c^T \mathcal{A}_{11} b + \\
&\quad + \frac{\gamma \nu \kappa}{s} c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} - \frac{\gamma \nu}{s} \left(1 - \frac{\gamma \kappa b_q(s)}{s a_q(s)} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}\right) = \\
&= \kappa c^T \mathcal{A}_{11} b + \kappa c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q c^T \mathcal{A}_{11} b + \frac{\gamma \kappa b_q(s)}{s a_q(s)} c^T \mathcal{A}_{11} b + \frac{\gamma \nu \kappa}{s} c^T \mathcal{A}_{11} b + \\
&\quad + \frac{\gamma \nu \kappa}{s} c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} - \frac{\gamma \nu}{s} + \frac{\gamma^2 \nu \kappa b_q(s)}{s^2 a_q(s)} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)},
\end{aligned}$$

откуда с учетом (3.26) имеем

$$\begin{aligned}
W_\ell(s) &= \kappa \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} + \kappa c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} + \frac{\gamma \kappa b_q(s)}{s a_q(s)} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} + \frac{\gamma \nu \kappa}{s} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} + \\
&\quad + \frac{\gamma \nu \kappa}{s} c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} - \frac{\gamma \nu}{s} + \frac{\gamma^2 \nu \kappa b_q(s)}{s^2 a_q(s)} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} = \\
&= \left(1 + c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q + \frac{\gamma b_q(s)}{s a_q(s)}\right) + \left(1 + c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q\right) \frac{\gamma \nu}{s} + \\
&\quad + \frac{\gamma^2 \nu b_q(s)}{s^2 a_q(s)} \kappa \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} - \frac{\gamma \nu}{s},
\end{aligned}$$

откуда с учетом (3.23) имеем

$$\begin{aligned}
W_\ell(s) &= \left( \frac{b_q(s)}{a_q(s)} + \frac{\gamma b_q(s)}{s a_q(s)} + \frac{\gamma \nu b_q(s)}{s a_q(s)} + \frac{\gamma^2 \nu b_q(s)}{s^2 a_q(s)} \right) \kappa \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} - \frac{\gamma \nu}{s} = \\
&= \left( 1 + \frac{\gamma}{s} + \frac{\gamma \nu}{s} + \frac{\gamma^2 \nu}{s^2} \right) \frac{\kappa b_q(s)}{a_q(s)} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} - \frac{\gamma \nu}{s} = \\
&= \left( 1 + \frac{\gamma}{s} + \left( 1 + \frac{\gamma}{s} \right) \frac{\gamma \nu}{s} \right) \frac{\kappa b_q(s)}{a_q(s)} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} - \frac{\gamma \nu}{s} = \\
&= \left( 1 + \frac{\gamma \nu}{s} \right) \left( 1 + \frac{\gamma}{s} \right) \kappa \frac{b_q(s)}{a_q(s)} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} - \frac{\gamma \nu}{s} = \\
&= \frac{\kappa(s + \gamma \nu)(s + \gamma) b_q(s)}{s^2 a_q(s)} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} - \frac{\gamma \nu}{s},
\end{aligned}$$

с учетом (3.26) имеем

$$\begin{aligned}
W_\ell(s) &= \frac{\kappa(s + \gamma \nu)(s + \gamma) b_q(s) b(s)}{s(s a_q(s) a(s) + \kappa b_q(s)(s + \gamma) b(s))} - \frac{\gamma \nu}{s} = \\
&= \frac{\kappa(s + \gamma \nu)(s + \gamma) b_q(s) b(s)}{s(s a_q(s) a(s) + \kappa b_q(s)(s + \gamma) b(s))} - \frac{\gamma \nu}{s},
\end{aligned}$$

обозначив

$$\beta_\kappa(s) = \kappa b_q(s)(s + \gamma) b(s), \quad (3.28)$$

имеем

$$\begin{aligned}
W_\ell(s) &= \frac{(s + \gamma \nu) \beta_\kappa(s) - \gamma \nu (s a_q(s) a(s) + \beta_\kappa(s))}{s(s a_q(s) a(s) + \beta_\kappa(s))} = \\
&= \frac{(s + \gamma \nu) \beta_\kappa(s) - \gamma \nu s a_q(s) a(s) - \gamma \nu \beta_\kappa(s)}{s(s a_q(s) a(s) + \beta_\kappa(s))} = \\
&= \frac{(s + \gamma \nu - \gamma \nu) \beta_\kappa(s) - \gamma \nu s a_q(s) a(s)}{s(s a_q(s) a(s) + \beta_\kappa(s))} = \\
&= \frac{s \beta_\kappa(s) - \gamma \nu s a_q(s) a(s)}{s(s a_q(s) a(s) + \beta_\kappa(s))} = \\
&= \frac{\beta_\kappa(s) - \gamma \nu a_q(s) a(s)}{s a_q(s) a(s) + \beta_\kappa(s)}.
\end{aligned}$$

Вернемся к передаточной функции (3.20) и покажем ее строго положительную вещественность

$$\begin{aligned} W(s) &= W_\ell(s) + 1 = \frac{\beta_\kappa(s) - \gamma\nu a_q(s)a(s)}{sa_q(s)a(s) + \beta_\kappa(s)} + 1 = \\ &= \frac{\beta_\kappa(s) - \gamma\nu a_q(s)a(s) + sa_q(s)a(s) + \beta_\kappa(s)}{sa_q(s)a(s) + \beta_\kappa(s)} = \\ &= \frac{2\beta_\kappa(s) + (s - \gamma\nu)a_q(s)a(s)}{sa_q(s)a(s) + \beta_\kappa(s)}, \end{aligned}$$

откуда с учетом (3.28) имеем

$$W(s) = \frac{2\kappa b_q(s)(s + \gamma)b(s) + (s - \gamma\nu)a_q(s)a(s)}{sa_q(s)a(s) + \kappa b_q(s)(s + \gamma)b(s)}. \quad (3.29)$$

В самом деле, известно, что с учетом Замечания 3.1 и Допущения 3.1 существует число  $\kappa^*$  такое, что при  $\kappa \geq \kappa^*$  достигается гурвицевость полиномов числителя и знаменателя передаточной функции (3.29), относительная степень которой при этом равна нулю, ввиду чего обеспечивается ее строго положительная вещественность, выполнение частотного условия

$$\operatorname{Re} W(j\omega) > 0, \quad \forall \omega \in [-\infty, \infty]$$

или, что тоже самое,

$$\operatorname{Re} W_\ell(j\omega) > -1, \quad \forall \omega \in [-\infty, \infty]$$

и, согласно критерию Попова [100], абсолютная устойчивость системы (3.17), (3.18), что и требовалось доказать.  $\square\square\square$

Вернемся к случаю наличия внешних возмущений  $w \neq 0$ , и проанализируем значение установившейся ошибки. Очевидно, что в установившемся режиме справедливо

$$v = \operatorname{sat}(v),$$

откуда следует, что

$$\varkappa(v) = v - \operatorname{sat}(v) = 0,$$



с учетом чего воспользуемся соответствующим выражением Сильвестра для модели (3.11):

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_\xi \\ \Sigma \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} - \kappa b_2 c_2^T & -\kappa b_2 c_k^T & -b_2 \gamma \\ 0 & b_q c_2^T & A_q & 0 \\ 0 & \kappa c_2^T & \kappa c_k^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_\xi \\ \Sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где обратим внимание на четвертую строчку:

$$\Sigma S = \kappa (c_2^T \Pi_2 + c_k^T \Pi_\xi),$$

откуда видно, что в установившемся режиме

$$c_2^T \Pi_2 + c_k^T \Pi_\xi = 0. \quad (3.30)$$

Найдем соотношение между  $c_2^T \Pi_2$  и  $c_k^T \Pi_\xi$ . Рассмотрим вспомогательную переменную  $z_0$ :

$$z_0 = y + c_k^T \xi, \quad (3.31)$$

установившееся значение которой с учетом (3.30) равно нулю.

Из (2.68) имеем

$$\xi(s) = (sI - A_q)^{-1} (b_q y(s) + \xi(0)),$$

где  $\xi(0)$  — начальные условия.

Тогда для (3.31) запишем

$$\begin{aligned} z_0(s) &= y(s) + c_k^T (sI - A_q)^{-1} (b_q y(s) + \xi_1(0) + \xi_2(0)) = \\ &= (c_k^T (sI - A_q)^{-1} b_q + 1) y(s) + \varepsilon(s), \end{aligned}$$

где  $\varepsilon(s) = c_k^T (sI - A_q)^{-1} (\xi_1(0) + \xi_2(0))$  соответствует экспоненциально затухающей функции  $\varepsilon$ .

Если  $c_k^T$  выбран таким образом, что числитель передаточной функции  $(c_k^T (sI - A_q)^{-1} b_q + 1)$  гурвицев и относительная степень равна нулю, то из

$$y(s) = (c_k^T (sI - A_q)^{-1} b_q + 1)^{-1} (z_0(s) - \varepsilon(s))$$

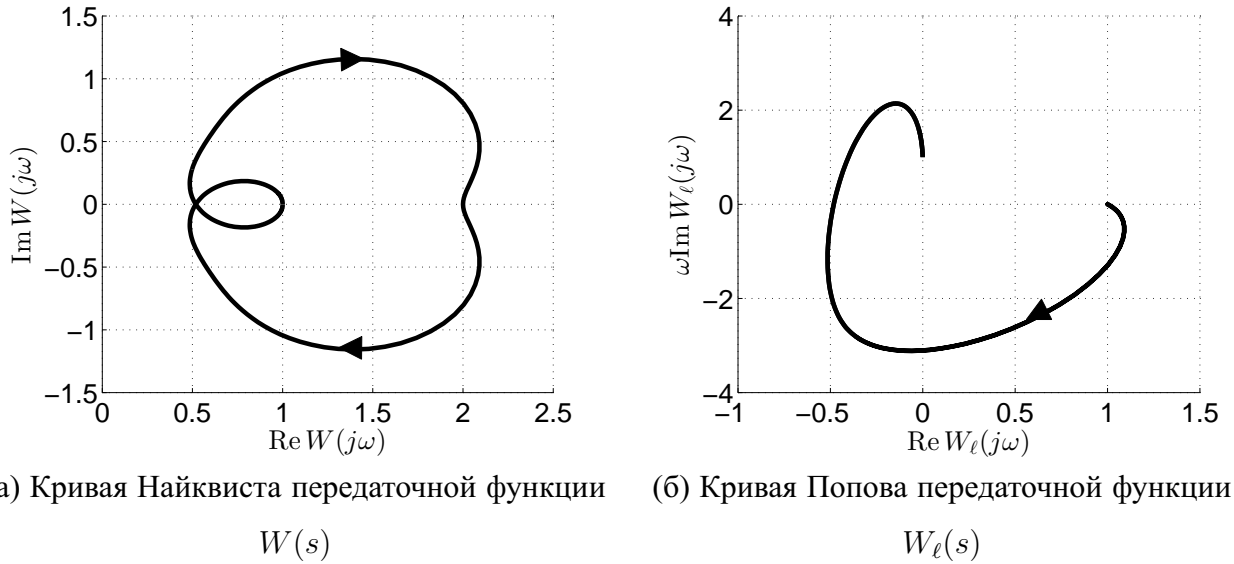


Рисунок 3.1. Результаты моделирования в Примере 4.

найдем, что установившаяся ошибка  $y$ , равно как и  $c_k^T \xi$ , сходится к нулю.

*Пример 4. Рассмотрим систему (3.1),(3.2) с параметрами*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

*пределами насыщения  $u_{max} = 5$  и  $u_{min} = -5$  и генератор возмущения (3.3) с параметрами*

$$S = 0, \quad w(0) = 2.$$

*Найдем передаточную функцию объекта*

$$\frac{b(s)}{a(s)} = c^T (sI - A)^{-1} b = \frac{1}{s^2 + s},$$

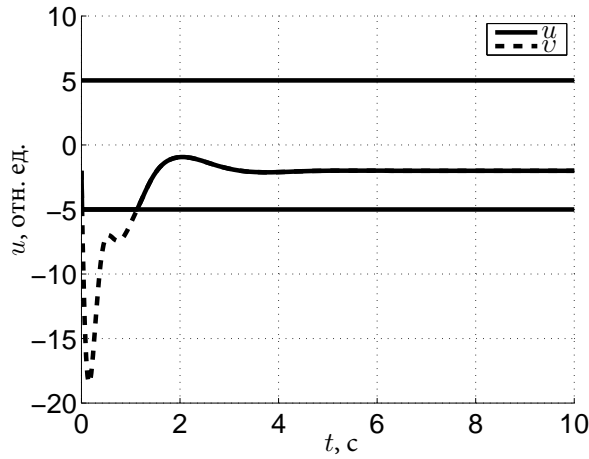
*откуда определим относительную степень  $\rho = 2$ , с учетом чего выберем закон управления (3.7)–(3.10) с параметрами  $\kappa = 2$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\nu = 1$ ,*

$$A_q = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_q = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \end{bmatrix}, \quad c_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

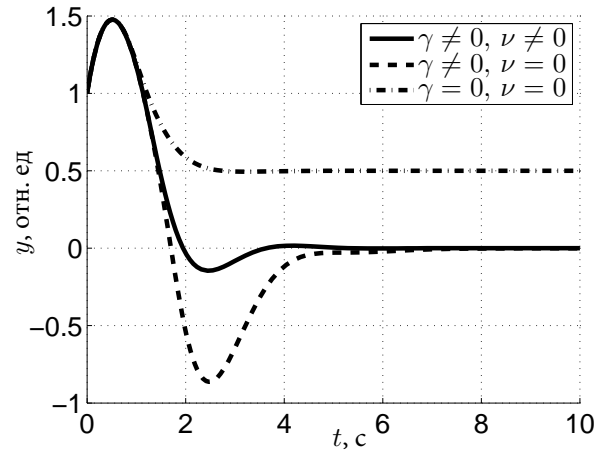
*где  $\sigma = 10$ .*

*Передаточная функция (3.29) имеет вид:*

$$W(s) = \frac{s^5 + 10s^4 + 103s^3 + 474s^2 + 1180s + 800}{s^5 + 11s^4 + 112s^3 + 342s^2 + 640s + 400}. \quad (3.32)$$



(а) Переходной процесс управляющего сигнала



(б) Переходной процесс выходной переменной

Рисунок 3.2. Результаты моделирования в Примере 4.

Кривая Найквиста передаточной функции (3.32) изображен на Рис. 3.1а. Как видно, диаграмма расположена строго справа от мнимой оси. Кривая Попова [100] изображена на Рис. 3.1б. Как видно, график расположен справа от вертикальной прямой, проходящей через точку  $-1 + j0$ . Результаты моделирования приведены на Рис. 3.2.

### 3.1.2 Компенсация полигармонических возмущений со смещением

Без потери общности рассмотрим генератор возмущений (3.3) при

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega^2 & 0 \end{bmatrix},$$

что эквивалентно смещенному гармоническому сигналу с частотой  $\omega$ .

Выберем закон управления вида

$$v = -\kappa(c_k^T \xi + y) - \gamma^T \eta, \quad (3.33)$$

$$\dot{\xi} = A_q \xi + b_q y, \quad (3.34)$$

$$\dot{\eta} = \Phi \eta + g(\kappa(c_k^T \xi + y) + \gamma^T \eta + \nu \varkappa(v)), \quad (3.35)$$

$$\varkappa(v) = v - \text{sat}(v), \quad (3.36)$$

где  $\varkappa(v)$  — нелинейный сигнал антивиндап-коррекции,  $\nu > 0$ ,  $\kappa > 0$  матрица  $A_q$  и вектора  $b_q, c_k$  имеют вид:

$$A_q = \begin{bmatrix} -q_\rho \sigma & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -q_{\rho-1} \sigma^2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -q_2 \sigma^{\rho-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -q_1 \sigma^\rho & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad b_q = \begin{bmatrix} q_\rho \sigma \\ q_{\rho-1} \sigma^2 \\ \vdots \\ q_2 \sigma^{\rho-1} \\ q_1 \sigma^\rho \end{bmatrix}, \quad c_k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{\rho-1} \\ k_\rho \end{bmatrix},$$

где  $\sigma > 0$  и  $q_i$  ( $i = \overline{1, \rho}$ ) выбраны из условия гурвицевости системы (3.34),  $k_i$  ( $i = \overline{1, \rho}$ ) — коэффициенты произвольного гурвицева полинома вида

$$k(s) = k_\rho s^{\rho-1} + \cdots + k_2 s + k_1,$$

матрица  $\Phi$  — произвольная гурвицева матрица во фробениусовой форме размерности  $n_w \times n_w$ , векторы  $g^T = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]$  и  $\gamma$  удовлетворяют

$$\lambda\{\Phi + g\gamma^T\} = \lambda\{S\}.$$

Объединяя объект (3.5), (3.6) с законом управления (3.33)-(3.36) получим модель замкнутой системы

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} - \kappa b_2 c_2^T & -\kappa b_2 c_k^T & -b_2 \gamma^T \\ 0 & b_q c_2^T & A_q & 0 \\ 0 & \kappa g c_2^T & \kappa g c_k^T & \Phi + g \gamma^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -b_2 \\ 0 \\ \nu g \end{bmatrix} \varkappa + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w. \quad (3.37)$$

Преобразовав модель (3.37) аналогично (2.70)–(2.74), получим

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{\zeta} \\ \dot{z}_2 \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{12} & 0 \\ g \bar{b}_2^T A_{21} & \Phi & g \bar{b}_2^T A_{22} - \Phi g \bar{b}_2^T & 0 \\ A_{21} & -b_2 \gamma^T & A_{22} - \kappa b_2 (c_k^T + c_2^T) + b_2 \gamma^T g \bar{b}_2^T & \kappa b_2 c_k^T \\ A_{21} & -b_2 \gamma^T & A_{22} - I_0 - \kappa b_2 (c_k^T + c_2^T) + b_2 \gamma^T g \bar{b}_2^T & A_q + \kappa b_2 c_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \zeta \\ z_2 \\ \chi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (\nu - 1)g \\ -b_2 \\ -b_2 \end{bmatrix} \varkappa + \begin{bmatrix} R_1 \\ g \bar{b}_2^T R_2 \\ R_2 \\ R_2 \end{bmatrix} w, \quad (3.38)$$

где подобно рассуждениям применительно к (2.74) можно показать гурвицевость матрицы состояния.

Временно допустим, что  $w = 0$ , и рассмотрим случай без внешних возмущений. Запишем замкнутую систему (3.38) в компактном виде как объединение

объекта (3.1),(3.2) и закона управления (3.33)–(3.36)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\varkappa(v), \quad (3.39)$$

$$v = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (3.40)$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A - \kappa bc^T & -\kappa bc_k^T & -b\gamma^T \\ b_q c^T & A_q & 0 \\ \kappa g c^T & \kappa g c_k^T & \Phi + g\gamma^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ \nu g \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\kappa c \\ -\kappa c_k \\ -\gamma \end{bmatrix}.$$

**Утверждение 3.2.** *Замкнутая система, состоящая из линейной части (3.39)–(3.40) и функции без памяти  $\varkappa(v)$  абсолютно устойчива при всех начальных условиях.*

*Доказательство.* Согласно критерию Попова [100], замкнутая система, состоящая из линейной части (3.39)–(3.40) и функции без памяти  $\varkappa(v)$  абсолютно устойчива, если существует константа  $\varpi \geq 0$ , такая что

$$(1 + \lambda_i \varpi) \neq 0$$

для каждого собственного числа  $\lambda_i$  матрицы  $\mathbf{A}$ , а также передаточная функция

$$W(s) = 1 + (1 + s\varpi)W_\ell(s)$$

строго положительно вещественная, где  $W_\ell(s)$  — передаточная функция линейной части системы (3.39)–(3.40), определяемая как

$$W_\ell(s) = \mathbf{c}^T (sI - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}. \quad (3.41)$$

Примем  $\varpi = 0$ , тогда для доказательства абсолютной устойчивости системы достаточно показать строго положительную вещественность передаточной функции

$$W(s) = 1 + W_\ell(s). \quad (3.42)$$

Вычислим передаточную функцию (3.41)

$$\begin{aligned}
W_\ell(s) &= \begin{bmatrix} -\kappa c^T & -\kappa c_k^T & -\gamma^T \end{bmatrix} \left( sI - \begin{bmatrix} A - \kappa bc^T & -\kappa bc_k^T & -b\gamma^T \\ b_q c^T & A_q & 0 \\ \kappa g c^T & \kappa g c_k^T & \Phi + g\gamma^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ \nu g \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -\kappa c^T & -\kappa c_k^T & -\gamma^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A + \kappa bc^T & \kappa bc_k^T & b\gamma^T \\ -b_q c^T & sI - A_q & 0 \\ -\kappa g c^T & -\kappa g c_k^T & sI - \Phi - g\gamma^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ \nu g \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -\kappa c^T & -\kappa c_k^T & -\gamma^T \end{bmatrix} \mathcal{A} \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ \nu g \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Выразив матрицу  $\mathcal{A}$  в блочном виде как

$$\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{A}}_{11} & \bar{\mathcal{A}}_{12} \\ \bar{\mathcal{A}}_{21} & \bar{\mathcal{A}}_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{A}}_{11} &= sI - A + \kappa bc^T, & \bar{\mathcal{A}}_{12} &= \begin{bmatrix} \kappa bc_k^T & b\gamma^T \end{bmatrix}, \\
\bar{\mathcal{A}}_{21} &= \begin{bmatrix} -b_q c^T \\ -\kappa g c^T \end{bmatrix}, & \bar{\mathcal{A}}_{22} &= \begin{bmatrix} sI - A_q & 0 \\ -\kappa g c_k^T & sI - \Phi - g\gamma^T \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

воспользуемся формулой Фробениуса для расчета блочной обратной матрицы.

Вычислим обратную матрицу от блока  $\bar{\mathcal{A}}_{22}$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{A}}_{22} &= \begin{bmatrix} sI - A_q & 0 \\ -\kappa g c_k^T & sI - \Phi - g\gamma^T \end{bmatrix}^{-1} = \\
&= \begin{bmatrix} (sI - A_q)^{-1} & 0 \\ \kappa (sI - \Phi - g\gamma^T)^{-1} g c_k^T (sI - A_q)^{-1} & (sI - \Phi - g\gamma^T)^{-1} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \mathcal{A}_q(s) & 0 \\ \kappa \mathcal{F}(s) g c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \mathcal{F}(s) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{A}_q(s) = (sI - A_q)^{-1}, \quad \mathcal{F}(s) = (sI - \Phi - g\gamma^T)^{-1}.$$

Вычислим блок  $\mathcal{A}_{11}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{11} &= \left( sI - A + \kappa bc^T - \begin{bmatrix} \kappa bc_k^T & b\gamma^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_q(s) & 0 \\ \kappa \mathcal{F}(s) g c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \mathcal{F}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_q c^T \\ -\kappa g c^T \end{bmatrix} \right)^{-1} = \\
&= \left( sI - A + \kappa bc^T - \begin{bmatrix} \kappa bc_k^T \mathcal{A}_q(s) + \kappa b\gamma^T \mathcal{F}(s) g c_k^T \mathcal{A}_q(s) & b\gamma^T \mathcal{F}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_q c^T \\ -\kappa g c^T \end{bmatrix} \right)^{-1} = \\
&= (sI - A + \kappa bc^T + \kappa bc_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q c^T + \kappa b\gamma^T \mathcal{F}(s) g c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q c^T + \\
&\quad + \kappa b\gamma^T \mathcal{F}(s) g c^T)^{-1} = \\
&= (sI - A + \kappa b(1 + c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q + \gamma^T \mathcal{F}(s) g c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q + \gamma^T \mathcal{F}(s) g) c^T)^{-1} = \\
&= (sI - A + \kappa b(1 + c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q + \gamma^T \mathcal{F}(s) g (c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q + 1)) c^T)^{-1} = \\
&= (sI - A + \kappa b(c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q + 1)(\gamma^T \mathcal{F}(s) g + 1) c^T)^{-1} = \\
&= \left( sI - A + b \frac{\kappa b_q(s) \bar{g}(s)}{a_q(s) f(s)} c^T \right)^{-1}, \tag{3.44}
\end{aligned}$$

где

$$\frac{b_q(s)}{a_q(s)} = c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q + 1, \tag{3.45}$$

$$\frac{\bar{g}(s)}{f(s)} = \underbrace{\gamma^T \mathcal{F}(s) g}_{\frac{g(s)}{f(s)}} + 1 = \frac{g(s)}{f(s)} + 1 = \frac{g(s) + f(s)}{f(s)}. \tag{3.46}$$

**Замечание 3.2.** Заметим, что в силу выбора матриц  $A_q$ ,  $\Phi$  и векторов  $b_q$ ,  $c_k$ ,  $\gamma$  и  $g$  можно обеспечить гурвицевость полиномов  $b_q(s)$ ,  $a_q(s)$  и  $\bar{g}(s)$ .

Вычислим блок  $\mathcal{A}_{12}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{12} &= -\mathcal{A}_{11} \begin{bmatrix} \kappa bc_k^T & b\gamma^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_q(s) & 0 \\ \kappa \mathcal{F}(s) g c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \mathcal{F}(s) \end{bmatrix} = \\
&= -\mathcal{A}_{11} \begin{bmatrix} \kappa bc_k^T \mathcal{A}_q(s) + \kappa b\gamma^T \mathcal{F}(s) g c_k^T \mathcal{A}_q(s) & b\gamma^T \mathcal{F}(s) \end{bmatrix} = \\
&= -\mathcal{A}_{11} \begin{bmatrix} \kappa b(\gamma^T \mathcal{F}(s) g + 1) c_k^T \mathcal{A}_q(s) & b\gamma^T \mathcal{F}(s) \end{bmatrix} = \\
&= -\mathcal{A}_{11} \begin{bmatrix} \kappa b(\gamma^T \mathcal{F}(s) g + 1) c_k^T \mathcal{A}_q(s) & b\gamma^T \mathcal{F}(s) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

откуда с учетом (3.46) имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{12} &= -\mathcal{A}_{11} \begin{bmatrix} \frac{\kappa \bar{g}(s)}{f(s)} b c_k^T \mathcal{A}_q(s) & b\gamma^T \mathcal{F}(s) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\kappa \bar{g}(s)}{f(s)} \mathcal{A}_{11} b c_k^T \mathcal{A}_q(s) & -\mathcal{A}_{11} b\gamma^T \mathcal{F}(s) \end{bmatrix}. \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Вычислим блок  $\mathcal{A}_{21}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{21} &= - \begin{bmatrix} \mathcal{A}_q(s) & 0 \\ \kappa \mathcal{F}(s) g c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \mathcal{F}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_q c^T \\ -\kappa g c^T \end{bmatrix} \mathcal{A}_{11} = \\
&= - \begin{bmatrix} -\mathcal{A}_q(s) b_q c^T \\ -\kappa \mathcal{F}(s) g c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q c^T - \kappa \mathcal{F}(s) g c^T \end{bmatrix} \mathcal{A}_{11} = \\
&= \begin{bmatrix} \mathcal{A}_q(s) b_q c^T \\ \kappa \mathcal{F}(s) g (c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q + 1) c^T \end{bmatrix} \mathcal{A}_{11},
\end{aligned}$$

откуда с учетом (3.45) имеем

$$\mathcal{A}_{21} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_q(s) b_q c^T \mathcal{A}_{11} \\ \frac{\kappa b_q(s)}{a_q(s)} \mathcal{F}(s) g c^T \mathcal{A}_{11} \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Вычислим блок  $\mathcal{A}_{22}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{22} &= \bar{\mathcal{A}}_{22} - \mathcal{A}_{21} \begin{bmatrix} \frac{\kappa \bar{g}(s)}{f(s)} b c_k^T \mathcal{A}_q(s) & b \gamma^T \mathcal{F}(s) \end{bmatrix} = \\
&= \bar{\mathcal{A}}_{22} - \begin{bmatrix} \mathcal{A}_q(s) b_q c^T \mathcal{A}_{11} \\ \frac{\kappa b_q(s)}{a_q(s)} \mathcal{F}(s) g c^T \mathcal{A}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\kappa \bar{g}(s)}{f(s)} b c_k^T \mathcal{A}_q(s) & b \gamma^T \mathcal{F}(s) \end{bmatrix} = \\
&= \bar{\mathcal{A}}_{22} - \begin{bmatrix} \frac{\kappa \bar{g}(s)}{f(s)} \mathcal{A}_q(s) b_q c^T \mathcal{A}_{11} b c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \mathcal{A}_q(s) b_q c^T \mathcal{A}_{11} b \gamma^T \mathcal{F}(s) \\ \frac{\kappa^2 b_q(s) \bar{g}(s)}{a_q(s) f(s)} \mathcal{F}(s) g c^T \mathcal{A}_{11} b c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \frac{\kappa b_q(s)}{a_q(s)} \mathcal{F}(s) g c^T \mathcal{A}_{11} b \gamma^T \mathcal{F}(s) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

обозначив

$$\begin{aligned}
\frac{\beta(s)}{\alpha(s)} &= c^T \mathcal{A}_{11} b = c^T \left( sI - A + b \frac{\kappa b_q(s) \bar{g}(s)}{a_q(s) f(s)} c^T \right)^{-1} b = \\
&= \frac{b(s) a_q(s) f(s)}{a(s) a_q(s) f(s) + \kappa b(s) b_q(s) \bar{g}(s)}, \quad (3.49)
\end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{22} &= \begin{bmatrix} \mathcal{A}_q(s) & 0 \\ \kappa \mathcal{F}(s) g c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \mathcal{F}(s) \end{bmatrix} - \\
&- \begin{bmatrix} \frac{\kappa \bar{g}(s) \beta(s)}{f(s) \alpha(s)} \mathcal{A}_q(s) b_q c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} \mathcal{A}_q(s) b_q \gamma^T \mathcal{F}(s) \\ \frac{\kappa^2 b_q(s) \bar{g}(s) \beta(s)}{a_q(s) f(s) \alpha(s)} \mathcal{F}(s) g c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \frac{\kappa b_q(s) \beta(s)}{a_q(s) \alpha(s)} \mathcal{F}(s) g \gamma^T \mathcal{F}(s) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \left( 1 - \frac{\kappa \bar{g}(s) \beta(s)}{f(s) \alpha(s)} \mathcal{A}_q(s) b_q c_k^T \right) \mathcal{A}_q(s) & -\frac{\beta(s)}{\alpha(s)} \mathcal{A}_q(s) b_q \gamma^T \mathcal{F}(s) \\ \left( 1 - \frac{\kappa b_q(s) \bar{g}(s) \beta(s)}{a_q(s) f(s) \alpha(s)} \right) \kappa \mathcal{F}(s) g c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \left( 1 - \frac{\kappa b_q(s) \beta(s)}{a_q(s) \alpha(s)} \mathcal{F}(s) g \gamma^T \right) \mathcal{F}(s) \end{bmatrix}. \quad (3.50)
\end{aligned}$$



Вернемся к блочной матрице (3.43) и с учетом (3.44), (3.47), (3.48), (3.50) запишем

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{121} - \frac{\kappa \bar{g}(s)}{f(s)} \mathcal{A}_{11} b c_k^T \mathcal{A}_q(s) & -\mathcal{A}_{11} b \gamma^T \mathcal{F}(s) \\ \mathcal{A}_q(s) b_q c^T \mathcal{A}_{11} & \left(1 - \frac{\kappa \bar{g}(s) \beta(s)}{f(s) \alpha(s)} \mathcal{A}_q(s) b_q c_k^T\right) \mathcal{A}_q(s) & -\frac{\beta(s)}{\alpha(s)} \mathcal{A}_q(s) b_q \gamma^T \mathcal{F}(s) \\ \frac{\kappa b_q(s)}{a_q(s)} \mathcal{F}(s) g c^T \mathcal{A}_{11} & \left(1 - \frac{\kappa b_q(s) \bar{g}(s) \beta(s)}{a_q(s) f(s) \alpha(s)}\right) \kappa \mathcal{F}(s) g c_k^T \mathcal{A}_q(s) & \left(1 - \frac{\kappa b_q(s) \beta(s)}{a_q(s) \alpha(s)} \mathcal{F}(s) g \gamma^T\right) \mathcal{F}(s) \end{bmatrix}.$$

Вычислим передаточную функцию

$$\begin{aligned} W_\ell(s) &= \begin{bmatrix} -\kappa c^T & -\kappa c_k^T & -\gamma^T \end{bmatrix} \mathcal{A} \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ \nu g \end{bmatrix} = \\ &= \kappa c^T \mathcal{A}_{11} b + \kappa c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q c^T \mathcal{A}_{11} b + \frac{\kappa b_q(s)}{a_q(s)} \gamma^T \mathcal{F}(s) g c^T \mathcal{A}_{11} b + \\ &+ \nu \kappa c^T \mathcal{A}_{11} b \gamma^T \mathcal{F}(s) g + \frac{\nu \kappa \beta(s)}{\alpha(s)} c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q \gamma^T \mathcal{F}(s) g - \\ &- \nu \gamma^T \left(1 - \frac{\kappa b_q(s) \beta(s)}{a_q(s) \alpha(s)} \mathcal{F}(s) g \gamma^T\right) \mathcal{F}(s) g = \\ &= \kappa c^T \mathcal{A}_{11} b + \kappa c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q c^T \mathcal{A}_{11} b + \frac{\kappa b_q(s)}{a_q(s)} \gamma^T \mathcal{F}(s) g c^T \mathcal{A}_{11} b + \\ &+ \nu \kappa c^T \mathcal{A}_{11} b \gamma^T \mathcal{F}(s) g + \frac{\nu \kappa \beta(s)}{\alpha(s)} c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q \gamma^T \mathcal{F}(s) g - \\ &- \nu \gamma^T \mathcal{F}(s) g + \frac{\nu \kappa b_q(s) \beta(s)}{a_q(s) \alpha(s)} \gamma^T \mathcal{F}(s) g \gamma^T \mathcal{F}(s) g, \end{aligned}$$

откуда с учетом (3.49), (3.46) имеем

$$\begin{aligned} W_\ell(s) &= \frac{\kappa \beta(s)}{\alpha(s)} + \frac{\kappa \beta(s)}{\alpha(s)} c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q + \frac{\kappa b_q(s) g(s) \beta(s)}{a_q(s) f(s) \alpha(s)} + \\ &+ \frac{\nu \kappa g(s) \beta(s)}{f(s) \alpha(s)} + \frac{\nu \kappa g(s) \beta(s)}{f(s) \alpha(s)} c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q - \\ &- \nu \frac{g(s)}{f(s)} + \frac{\nu \kappa b_q(s) g^2(s) \beta(s)}{a_q(s) f^2(s) \alpha(s)} = \\ &= \frac{\kappa \beta(s)}{\alpha(s)} \left(1 + c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q + \frac{b_q(s) g(s)}{a_q(s) f(s)} + \right. \\ &\left. + (1 + c_k^T \mathcal{A}_q(s) b_q) \frac{\nu g(s)}{f(s)} + \frac{\nu b_q(s) g^2(s)}{a_q(s) f^2(s)}\right) - \nu \frac{g(s)}{f(s)}, \end{aligned}$$

откуда с учетом (3.45) имеем

$$\begin{aligned}
W_\ell(s) &= \frac{\kappa\beta(s)}{\alpha(s)} \left( \frac{b_q(s)}{a_q(s)} + \frac{b_q(s)g(s)}{a_q(s)f(s)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\nu b_q(s)g(s)}{a_q(s)f(s)} + \frac{\nu b_q(s)g^2(s)}{a_q(s)f^2(s)} \right) - \nu \frac{g(s)}{f(s)} = \\
&= \frac{\kappa\beta(s)b_q(s)}{\alpha(s)a_q(s)} \left( 1 + \frac{g(s)}{f(s)} + \frac{\nu g(s)}{f(s)} + \frac{\nu g^2(s)}{f^2(s)} \right) - \nu \frac{g(s)}{f(s)} = \\
&= \frac{\kappa\beta(s)b_q(s)}{\alpha(s)a_q(s)} \left( 1 + \frac{g(s)}{f(s)} + \left( 1 + \frac{g(s)}{f(s)} \right) \frac{\nu g(s)}{f(s)} \right) - \nu \frac{g(s)}{f(s)} = \\
&= \frac{\kappa\beta(s)b_q(s)}{\alpha(s)a_q(s)} \left( 1 + \frac{g(s)}{f(s)} \right) \left( 1 + \frac{\nu g(s)}{f(s)} \right) - \nu \frac{g(s)}{f(s)} = \\
&= \frac{\kappa\beta(s)b_q(s)(f(s) + g(s))(f(s) + \nu g(s))}{\alpha(s)a_q(s)f^2(s)} - \nu \frac{g(s)}{f(s)},
\end{aligned}$$

откуда с учетом (3.49) и (3.46) имеем

$$W_\ell(s) = \frac{\kappa b(s)b_q(s)\bar{g}(s)(f(s) + \nu g(s))}{(a(s)a_q(s)f(s) + \kappa b(s)b_q(s)\bar{g}(s))f(s)} - \nu \frac{g(s)}{f(s)},$$

обозначив

$$\beta_\kappa(s) = \kappa b(s)b_q(s)\bar{g}(s), \quad (3.51)$$

имеем

$$\begin{aligned}
W_\ell(s) &= \frac{\beta_\kappa(s)(f(s) + \nu g(s))}{(a(s)a_q(s)f(s) + \beta_\kappa(s))f(s)} - \nu \frac{g(s)}{f(s)} = \\
&= \frac{\beta_\kappa(s)(f(s) + \nu g(s)) - \nu(a(s)a_q(s)f(s) + \beta_\kappa(s))g(s)}{(a(s)a_q(s)f(s) + \beta_\kappa(s))f(s)} = \\
&= \frac{\beta_\kappa(s)(f(s) + \nu g(s)) - \nu a(s)a_q(s)f(s)g(s) - \nu\beta_\kappa(s)g(s)}{(a(s)a_q(s)f(s) + \beta_\kappa(s))f(s)} = \\
&= \frac{\beta_\kappa(s)(f(s) + \nu g(s) - \nu g(s)) - \nu a(s)a_q(s)f(s)g(s)}{(a(s)a_q(s)f(s) + \beta_\kappa(s))f(s)} = \\
&= \frac{\beta_\kappa(s) - \nu a(s)a_q(s)g(s)}{a(s)a_q(s)f(s) + \beta_\kappa(s)}.
\end{aligned}$$

Вернемся к передаточной функции (3.42) и покажем ее строго положительную вещественность

$$\begin{aligned} W(s) &= W_\ell(s) + 1 = \frac{\beta_\kappa(s) - \nu a(s)a_q(s)g(s)}{a(s)a_q(s)f(s) + \beta_\kappa(s)} + 1 = \\ &= \frac{\beta_\kappa(s) - \nu a(s)a_q(s)g(s) + a(s)a_q(s)f(s) + \beta_\kappa(s)}{a(s)a_q(s)f(s) + \beta_\kappa(s)} = \\ &= \frac{2\beta_\kappa(s) + a(s)a_q(s)(f(s) - \nu g(s))}{a(s)a_q(s)f(s) + \beta_\kappa(s)}, \end{aligned}$$

откуда с учетом (3.51) имеем

$$W(s) = \frac{2\kappa b(s)b_q(s)\bar{g}(s) + a(s)a_q(s)(f(s) - \nu g(s))}{a(s)a_q(s)f(s) + \kappa b(s)b_q(s)\bar{g}(s)}. \quad (3.52)$$

В самом деле, известно, что с учетом Замечания 3.2 и Допущения 3.1 существует число  $\kappa^*$  такое, что при  $\kappa \geq \kappa^*$  достигается гурвицевость полиномов числителя и знаменателя передаточной функции (3.52), относительная степень которой при этом равна нулю, ввиду чего обеспечивается ее строго положительная вещественность, выполнение частотного условия

$$\operatorname{Re} W(j\omega) > 0, \quad \forall \omega \in [-\infty, \infty]$$

или, что тоже самое,

$$\operatorname{Re} W_\ell(j\omega) > -1, \quad \forall \omega \in [-\infty, \infty]$$

и, согласно критерию Попова [100], абсолютная устойчивость системы (3.39), (3.40), что и требовалось доказать.  $\square\square\square$

Вернемся к случаю наличия внешних возмущений  $w \neq 0$ , и проанализируем значение установившейся ошибки. Очевидно, что в установившемся режиме справедливо

$$v = \operatorname{sat}(v),$$

откуда следует, что

$$\varkappa(v) = v - \operatorname{sat}(v) = 0,$$

с учетом чего воспользуемся соответствующим выражением Сильвестра для модели (3.37):

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_\xi \\ \Sigma \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} - \kappa b_2 c_2^T & -\kappa b_2 c_k^T & -b_2 \gamma^T \\ 0 & b_q c_2^T & A_q & 0 \\ 0 & \kappa g c_2^T & \kappa g c_k^T & \Phi + g \gamma^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_\xi \\ \Sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где обратим внимание на четвертую строчку:

$$\Sigma S = \kappa g (c_2^T \Pi_2 + c_k^T \Pi_\xi),$$

откуда видно, что в установившемся режиме

$$c_2^T \Pi_2 + c_k^T \Pi_\xi = 0. \quad (3.53)$$

Найдем соотношение между  $c_2^T \Pi_2$  и  $c_k^T \Pi_\xi$ . Рассмотрим вспомогательную переменную  $z_0$ :

$$z_0 = y + c_k^T \xi, \quad (3.54)$$

установившееся значение которой с учетом (3.53) равно нулю.

Из (3.34) имеем

$$\xi(s) = (sI - A_q)^{-1} (b_q y(s) + \xi(0)),$$

где  $\xi(0)$  — начальные условия.

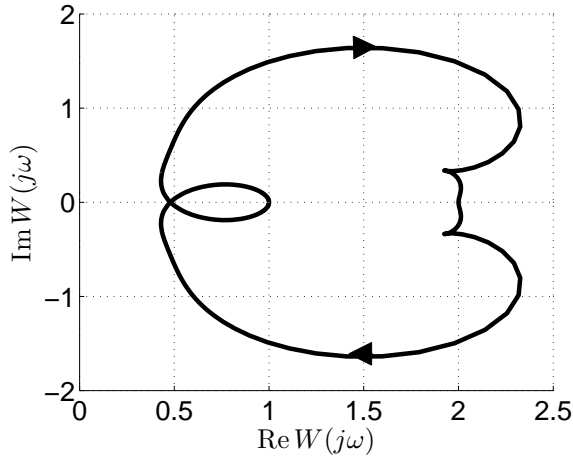
Тогда для (3.54) запишем

$$\begin{aligned} z_0(s) &= y(s) + c_k^T (sI - A_q)^{-1} (b_q y(s) + \xi_1(0) + \xi_2(0)) = \\ &= (c_k^T (sI - A_q)^{-1} b_q + 1) y(s) + \varepsilon(s), \end{aligned}$$

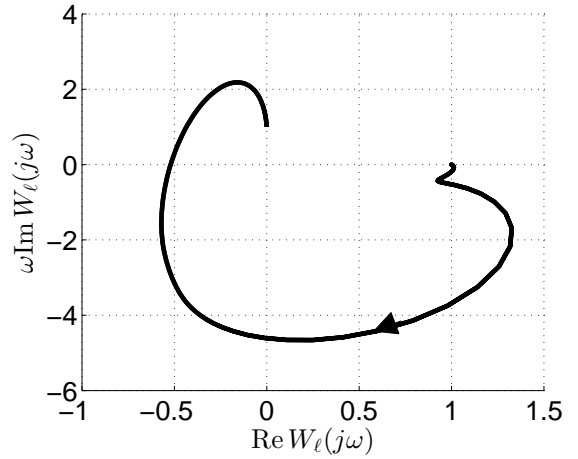
где  $\varepsilon(s) = c_k^T (sI - A_q)^{-1} (\xi_1(0) + \xi_2(0))$  соответствует экспоненциально затухающей функции  $\varepsilon$ .

Если  $c_k^T$  выбран таким образом, что числитель передаточной функции  $(c_k^T (sI - A_q)^{-1} b_q + 1)$  гурвицев и относительная степень равна нулю, то из

$$y(s) = (c_k^T (sI - A_q)^{-1} b_q + 1)^{-1} (z_0(s) - \varepsilon(s))$$



(а) Кривая Найквиста передаточной функции  $W(s)$



(б) Кривая Попова передаточной функции  $W_\ell(s)$

Рисунок 3.3. Результаты моделирования в Примере 5.

найдем, что установившаяся ошибка  $y$ , равно как и  $c_k^T \xi$ , сходится к нулю.

*Пример 5. Рассмотрим систему (3.1),(3.2) с параметрами*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

*пределами насыщения  $u_{max} = 5$  и  $u_{min} = -5$  и генератор возмущений (3.3) с параметрами*

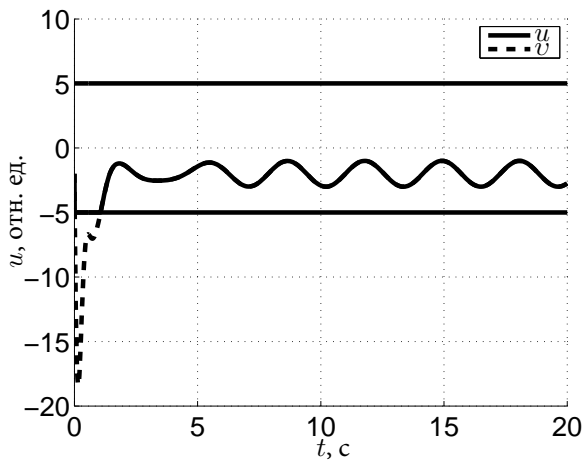
$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad w(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

*Найдем передаточную функцию объекта*

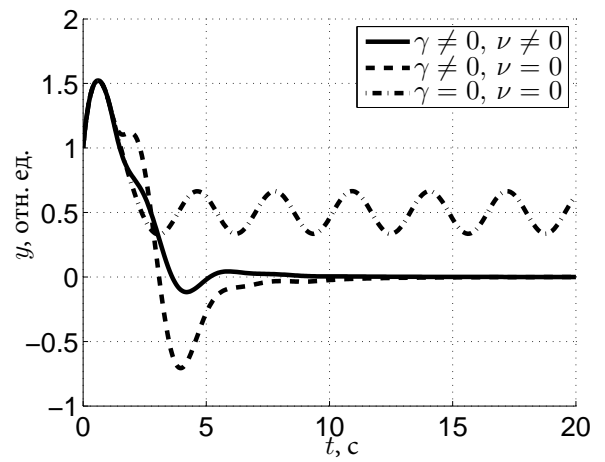
$$\frac{b(s)}{a(s)} = c^T (sI - A)^{-1} b = \frac{1}{s^2 + s},$$

*откуда определим относительную степень  $\rho = 2$ , с учетом чего выберем закон управления (3.33)–(3.36) с параметрами  $\kappa = 2$ ,  $\nu = 1$ ,*

$$A_q = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_q = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \end{bmatrix}, \quad c_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$



(а) Переходной процесс управляющего сигнала



(б) Переходной процесс выходной переменной

Рисунок 3.4. Результаты моделирования в Примере 5.

где  $\sigma = 10$ .

Вычислим вектор  $\gamma$  в соответствии с Замечанием 2.4

$$\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Передаточная функция (3.52) имеет вид:

$$W(s) = \frac{s^7 + 10s^6 + 108s^5 + 528s^4 + 1731s^3 + 2634s^2 + 2780s + 800}{s^7 + 11s^6 + 116s^5 + 386s^4 + 1086s^3 + 1522s^2 + 1440s + 400}. \quad (3.55)$$

Кривая Найквиста передаточной функции (3.55) изображен на Рис. 3.3а. Как видно, диаграмма расположена строго справа от мнимой оси. Кривая Попова [100] изображена на Рис. 3.3б. Как видно, график расположен справа от вертикальной прямой, проходящей через точку  $-1 + j0$ . Результаты моделирования приведены на Рис. 3.4.

### 3.2 Метод декомпозиции математической модели многоканального объекта управления

Рассмотрим класс нелинейных многоканальных систем вида

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (3.56)$$

$$y = h(x), \quad (3.57)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}^m$  — вектор управляющих воздействий,  $y \in \mathbb{R}^m$  — вектор выходных переменных,  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$ ,  $h(\cdot)$  — некоторые нелинейные функции.

Метод декомпозиции, используемый в рамках настоящей главы, предполагает разделение многоканальной системы вида (3.56), (3.57), на  $m$  одноканальных подсистем с допущением слабого взаимовлияния (линеаризацией модели). Такой подход в целом упрощает синтез управления для рассматриваемого класса систем, позволяя использовать  $m$  одномерных регуляторов для независимой стабилизации  $m$  выходных переменных.

Введем новый вектор квазиуправляющих сигналов  $U \in \mathbb{R}^m$  как

$$U = \Upsilon u, \quad (3.58)$$

где  $\Upsilon$  — невырожденная матрица преобразования размерности  $m \times m$ .

**Замечание 3.3.** *Заметим, что при расчете матрицы  $\Upsilon$  квазиуправляющие сигналы  $U_i$ ,  $i = \{1, \dots, m\}$  следует соотносить с регулируемыми переменными. Например, в случае механических систем удобно выбирать исходя из их соответствия некоторым базовым (элементарным) движениям в направлении соответствующих степеней свободы объекта. Таким образом, для твердого объекта в плоскости можно определить три квазиуправляющих сигнала для регулирования вдоль двух ортогональных осей в плоскости, а также вокруг своей оси.*

После декомпозиции и линеаризации получим  $m$  систем вида

$$\dot{x}_i = A_i x_i + b_i U, \quad (3.59)$$

$$y_i = c_i^T x_i, \quad (3.60)$$

где  $x_i$  — вектор состояния,  $A_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  — матрица состояния и векторы входа и выхода соответствующей размерности,  $U_i \in \mathbb{R}^1$  — квазиуправляющий сигнал, который впоследствии будет вырабатываться соответствующим одномерным независимым регулятором.

Для подачи управления непосредственно на объект необходимо выполнить преобразование, обратное (4.77), для того, чтобы распределить полученные квазиуправляющие сигналы между исполнительными приводами системы:

$$u = \Upsilon^{-1} U. \quad (3.61)$$

### 3.3 Стабилизация квадрокоптера с насыщением по входу

Одним из ярких примером многоканальных объектов с декомпозируемой моделью является квадрокоптер. Рассмотрим его в частном случае для описания алгоритма синтеза управления для такого класса систем.

Схема квадрокоптера представлена на Рис. 3.5. Здесь  $u_i$ ,  $i = \{1, 2, 3, 4\}$  — вертикальная компонента подъемной силы  $i$ -го двигателя. Для простоты остальные составляющие принимаются пренебрежимо малыми. Устойчивый полет квадрокоптера обеспечивается за счет вращения двигателей по диагонали попарно в разных направлениях. Для определенности допустим, что первый и третий двигатели вращаются по часовой стрелки, второй и четвертый — против. Примем, что все двигатели вращаются в одной плоскости и оси вращения ей перпендикулярны.



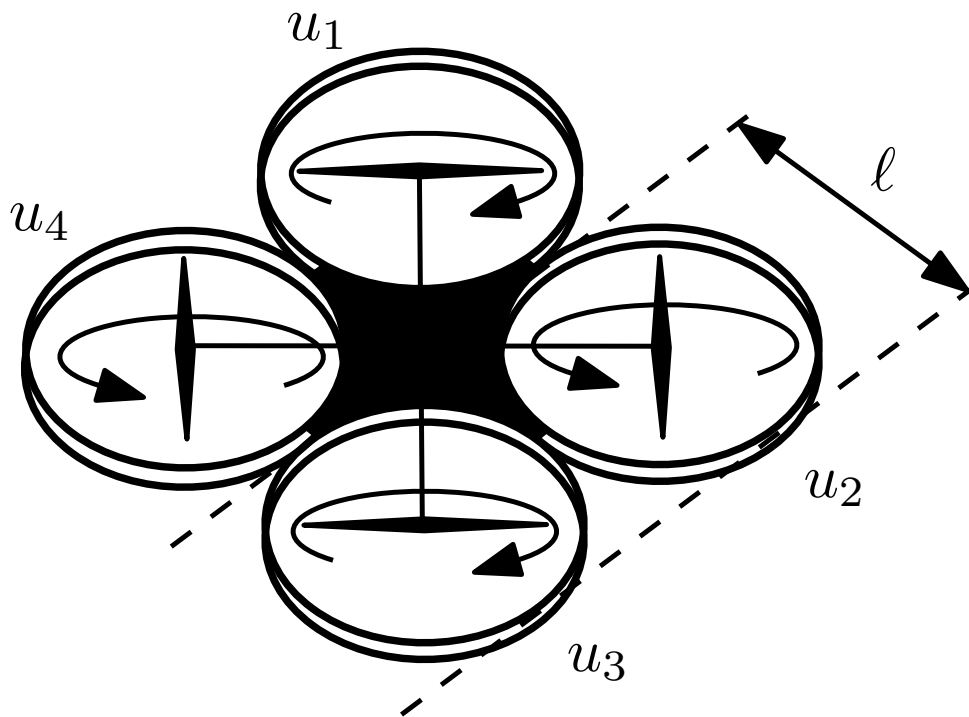


Рисунок 3.5. Схема квадрокоптера.

Рассмотрим математическую модель квадрокоптера предполагая коэффициент сопротивления формы равным нулю на малых скоростях [140]:

$$m\ddot{x} = (u_1 + u_2 + u_3 + u_4)(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi), \quad (3.62)$$

$$m\ddot{y} = (u_1 + u_2 + u_3 + u_4)(\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi), \quad (3.63)$$

$$m\ddot{z} = (u_1 + u_2 + u_3 + u_4)(\cos \theta \cos \psi) - mg, \quad (3.64)$$

$$J_\theta \ddot{\theta} = \ell(-u_1 - u_2 + u_3 + u_4), \quad (3.65)$$

$$J_\psi \ddot{\psi} = \ell(-u_1 + u_2 + u_3 - u_4), \quad (3.66)$$

$$J_\phi \ddot{\phi} = C(u_1 - u_2 + u_3 - u_4), \quad (3.67)$$

где  $x, y, z$  — декартовы координаты, определяющие положения,  $\theta, \psi, \phi$  — углы Эйлера, определяющие ориентацию (соответствуют углам тангажа, крена и рыскания),  $u_i, i = \{1, 2, 3, 4\}$  — управляющие сигналы, представляющие собой подъемную силу каждого привода,  $m$  — масса квадрокоптера,  $g$  — гравитационная постоянная,  $\ell$  — расстояние от геометрического центра квадрокоптера к линиям, соединяющим два смежных привода,  $J_\theta, J_\psi, J_\phi$  — моменты инерции,  $C$  — коэффициент пересчета от силы к моменту вращения.

Согласно Замечанию 3.3 для декомпозиции модели (3.62)–(3.67) на шесть подсистем выберем четыре квазиуправляющие сигнала исходя из следующих соображений:

- линейное движение вдоль оси  $Z$ :  $U_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ ,
- угловое движение вокруг оси  $Z$ :  $U_2 = -u_1 - u_2 + u_3 + u_4$ ,
- угловое движение вокруг оси  $Y$ :  $U_3 = -u_1 + u_2 + u_3 - u_4$ ,
- угловое движение вокруг оси  $X$ :  $U_4 = u_1 - u_2 + u_3 - u_4$ .

Тогда соотношение (4.77) примет вид

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad (3.68)$$

где квазиуправляющие сигналы  $U_i$ ,  $i = \{1, 2, 3, 4\}$  удовлетворяют условию насыщения

$$U_i = \text{sat}(v_i) = \begin{cases} U_{i,max}, & \text{при } v_i \geq u_{i,max}, \\ U_i, & \text{при } u_{i,min} < v_i < u_{i,max}, \\ U_{i,min}, & \text{при } v_i \leq u_{i,min}, \end{cases} \quad (3.69)$$

$U_{i,min}$  и  $U_{i,max}$  — пределы насыщения по входу,  $v_i$  — управляющие сигналы, генерируемые номинальными линейными регуляторами.

**Допущение 3.6.** Пределы насыщения по входу  $U_{i,min}$  и  $U_{i,max}$  равны по модулю, но и имеют противоположные знаки:

$$\begin{aligned} |U_{i,min}| &= |U_{i,max}|, \\ U_{i,min} + U_{i,max} &= 0. \end{aligned}$$

Подставим квазиуправляющие сигналы (3.68) в модель (3.62)–(3.67)

$$m\ddot{x} = U_1(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi), \quad (3.70)$$

$$m\ddot{y} = U_1(\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi), \quad (3.71)$$

$$m\ddot{z} = U_1(\cos \theta \cos \psi) - mg, \quad (3.72)$$

$$J_\theta \ddot{\theta} = \ell U_2, \quad (3.73)$$

$$J_\psi \ddot{\psi} = \ell U_3, \quad (3.74)$$

$$J_\phi \ddot{\phi} = CU_4. \quad (3.75)$$

Обратим внимание на уравнения (3.70) и (3.71) и введем новые переменные  $U_5$  и  $U_6$

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \cos \phi \underbrace{(U_1 \sin \theta \cos \psi)}_{U_5} - \sin \phi \underbrace{(-U_1 \sin \psi)}_{U_6}, \\ m\ddot{y} &= \sin \phi \underbrace{(U_1 \sin \theta \cos \psi)}_{U_5} + \cos \phi \underbrace{(-U_1 \sin \psi)}_{U_6}, \end{aligned}$$

перепишем в виде:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}, \quad (3.76)$$

где

$$U_5 = U_1 \sin \theta \cos \psi, \quad (3.77)$$

$$U_6 = -U_1 \sin \psi. \quad (3.78)$$

Соотношение между координатами относительно абсолютной (инерциальной) системы координат  $(O, X, Y)$  и локальной  $(\bar{O}, \bar{X}, \bar{Y})$  (см. Рис. 3.6) определено как

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}, \quad (3.79)$$

где  $(x^*, y^*)$ ,  $(x, y)$  — соответственно желаемые и текущие координаты квадрокоптера относительно инерциальной системы координат  $(O, X, Y)$ ,  $(\bar{x}, \bar{y})$  — локальные координаты относительно  $(\bar{O}, \bar{X}, \bar{Y})$ .

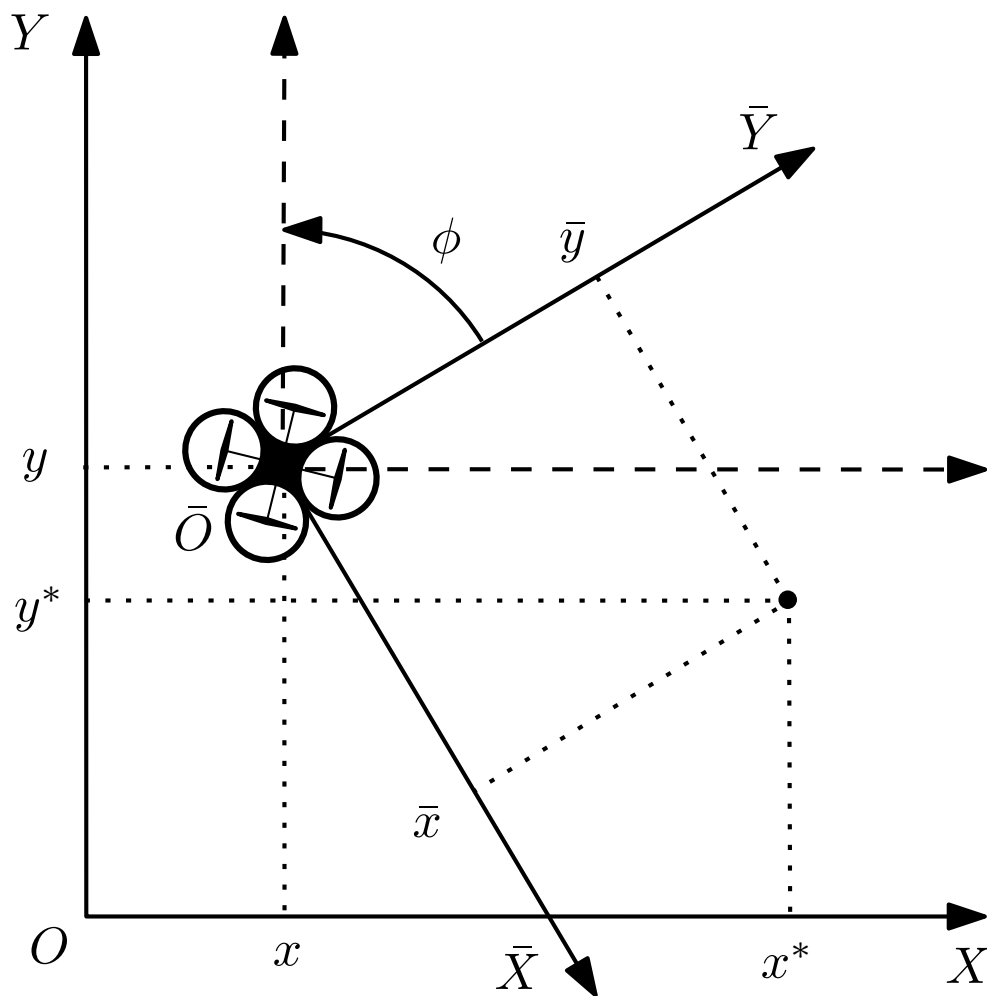


Рисунок 3.6. Системы координат: абсолютная (инерциальная)  $(O, X, Y)$ , локальная  $(\bar{O}, \bar{X}, \bar{Y})$ .

**Замечание 3.4.** Заметим, что координаты  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  представляют собой линейные смещения в плоскости в ортогональных направлениях между текущим положением объекта и заданным. Таким образом, эти функции могут рассматриваться как соответствующие сигналы ошибок относительно локальной системы координат  $(\bar{O}, \bar{X}, \bar{Y})$ .

Выразим  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  из выражения (3.79)

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* - x \\ y^* - y \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

Дважды продифференцировав (3.80), получим:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}. \quad (3.81)$$

Подставим (3.76) в (3.81) и вычислим

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} &= \frac{1}{m} \begin{bmatrix} -\cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{m} \begin{bmatrix} -\cos^2 \phi - \sin^2 \phi & \cos \phi \sin \phi - \sin \phi \cos \phi \\ \sin \phi \cos \phi - \cos \phi \sin \phi & -\sin^2 \phi - \cos^2 \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{m} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{m} \begin{bmatrix} -U_5 \\ -U_6 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

в результате чего получим модель движения в локальных координатах  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ :

$$m\ddot{\bar{x}} = -U_5, \quad (3.82)$$

$$m\ddot{\bar{y}} = -U_6. \quad (3.83)$$

Возможность перемещения квадрокоптера в плоскости, формируемой осями  $X$  и  $Y$ , достигается за счет изменения скорости вращения соответствующих исполнительных приводов, что приводит к отклонению углов крена и тангажа от нулевых значений, обеспечивая тем самым устойчивость полета. Очевидно, что во избежание падения это изменение допустимо в некотором малом диапазоне, ввиду чего справедливы приближенные тригонометрические соотношения вида

$$\sin \theta \approx \theta, \quad (3.84)$$

$$\cos \theta \approx 1, \quad (3.85)$$

$$\sin \psi \approx \psi, \quad (3.86)$$

$$\cos \psi \approx 1. \quad (3.87)$$

С учетом (3.84)–(3.87) линеаризуем уравнения (3.72), (3.77), (3.78):

$$m\ddot{z} = U_1 - mg, \quad (3.88)$$

$$U_5 = U_1\theta, \quad (3.89)$$

$$U_6 = -U_1\psi. \quad (3.90)$$

В системе (3.70)–(3.75) заменим уравнения движения в абсолютных координатах (3.70), (3.71) на модель движения в локальных координатах (3.82), (3.83) а также подсистему перемещения вдоль оси  $Z$  (3.72) на соответствующую линеаризованную модель (3.88), получим:

$$m\ddot{x} = -U_5, \quad (3.91)$$

$$m\ddot{y} = -U_6, \quad (3.92)$$

$$m\ddot{z} = U_1 - mg, \quad (3.93)$$

$$J_\theta\ddot{\theta} = \ell U_2, \quad (3.94)$$

$$J_\psi\ddot{\psi} = \ell U_3, \quad (3.95)$$

$$J_\phi\ddot{\phi} = CU_4, \quad (3.96)$$

где желаемые значения углов крена и тангажа рассчитываются из (3.89) и (3.90) как

$$\theta^* = \frac{U_5}{U_1}, \quad (3.97)$$

$$\psi^* = -\frac{U_6}{U_1} \quad (3.98)$$

**Замечание 3.5.** Для устранения сингулярности в (3.97) и (3.98) при инженерной реализации необходимо модифицировать алгоритм расчета следующим образом:

- обеспечить присвоение нулевых значений углам  $\theta^*$  и  $\psi^*$  при приближении  $U_1$  к нулю;
- включить в структуру расчета блок насыщения для ограничения значений углов  $\theta^*$  и  $\psi^*$  с соответствующими критическими пределами  $\bar{\theta}^*$  и  $\bar{\psi}^*$ .

Заметим, что относительные степени всех подсистемы (3.91)–(3.96) равны  $\rho_i = 2$ . С учетом этого для их стабилизации выберем закон управления вида

$$v_i = -\kappa_i(c_{k,i}^T \xi_i + y_i) - \gamma_i \eta_i, \quad (3.99)$$

$$\dot{\xi}_i = A_{q,i} \xi_i + b_{q,i} y_i, \quad (3.100)$$

$$\dot{\eta}_i = \kappa_i(c_{k,i}^T \xi_i + y_i) + \nu_i \varkappa_i(v_i), \quad (3.101)$$

$$\varkappa_i(v_i) = v_i - \text{sat}(v_i), \quad (3.102)$$

где  $\varkappa_i(v_i)$  — нелинейный сигнал антивиндап-коррекции,  $\kappa_i > 0$ ,  $\gamma_i > 0$ ,  $\nu_i > 0$ , матрица  $A_{q,i}$  и вектора  $b_{q,i}$ ,  $c_{k,i}$  имеют вид:

$$A_{q,i} = \begin{bmatrix} -q_{i,2}\sigma_i & 1 \\ -q_{i,1}\sigma_i^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_{q,i} = \begin{bmatrix} q_{i,2}\sigma_i \\ q_{i,1}\sigma_i^2 \end{bmatrix}, \quad c_{k,i} = \begin{bmatrix} k_{i,1} \\ k_{i,2} \end{bmatrix},$$

где  $\sigma_i > 0$ .

Для подачи управления непосредственно на объект необходимо выполнить преобразование, обратное (3.68), для того, чтобы распределить полученные квазиуправляющие сигналы между исполнительными приводами системы. Для рассматриваемой системы соотношение (3.61) примет вид:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = 0,25 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}.$$

Апробация предлагаемого алгоритма управления проводилась на базе лабораторного стенда «КОМЕКС-1» кафедры управления сложными системами Университета ИТМО (см. Рис. 3.7). Установка представляет собой деревянную стационарную конструкцию с двумя подвижными элементами. Брус, на котором жестко закреплен квадрокоптер, с помощью шарниров соединен с наружной рамой, которая, в свою очередь, соединена с вертикальными опорами. Такая конструкция определяют две степени свободы квадрокоптера в направлении углов

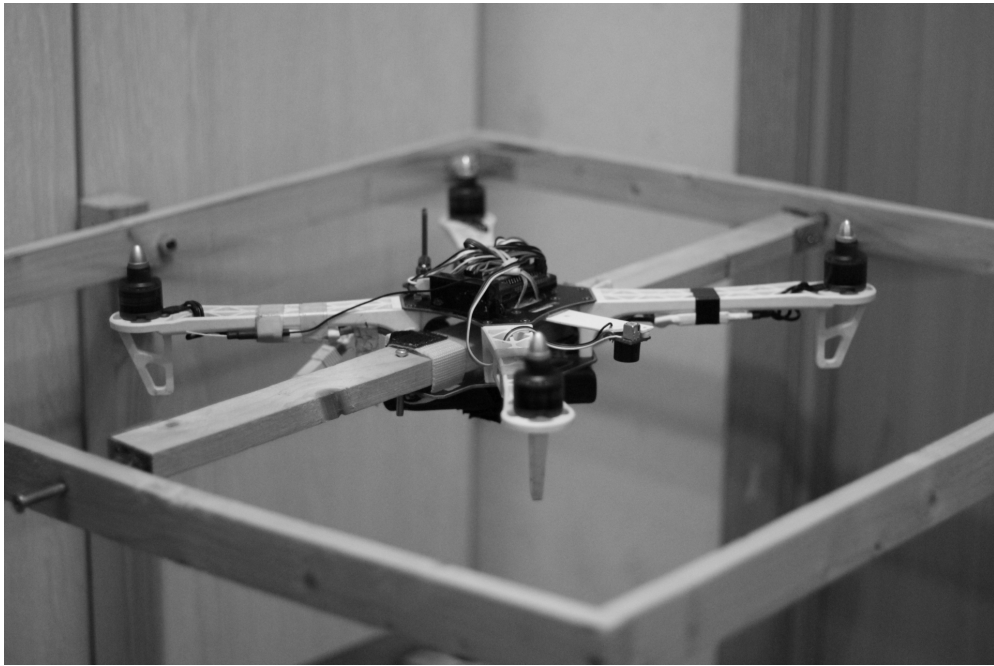


Рисунок 3.7. Лабораторный стенд «КОМЕКС-1».

крена и тангажа. Таким образом, стенд позволяет решать задачи стабилизации в двухканальном режиме в лабораторных условиях без риска поломки летательного аппарата. Канал обратной связи обеспечивается с помощью инерционного измерительного устройства (IMU), сочетающего в себе гироскоп, акселерометр и барометр. Исполнительные приводы представляют собой бесколлекторные двигатели постоянного тока с драйверами. Все необходимые сигналы, необходимые для аналитики результатов экспериментальных исследований, доступны по радиоканалу. Аппаратная и программная части используемой лабораторного стенда описаны в работах [115,116]. Эта установка, помимо выполнения экспериментальных исследований, может использоваться и в образовательных целях [117].

Для стабилизации положения квадрокоптера был выбран закон управления (3.99)–(3.102) с параметрами  $\kappa_\psi = \kappa_\theta = 5$ ,  $\gamma_\psi = \gamma_\theta = 1$ ,  $\nu_\psi = \nu_\theta = 1$ ,

$$A_{q,\psi} = A_{q,\theta} = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_{q,\psi} = b_{q,\theta} = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \end{bmatrix}, \quad c_{k,\psi} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_{k,\theta} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где  $\sigma_\psi = \sigma_\theta = 10$ .



Были определены следующие пределы насыщения для каждого канала

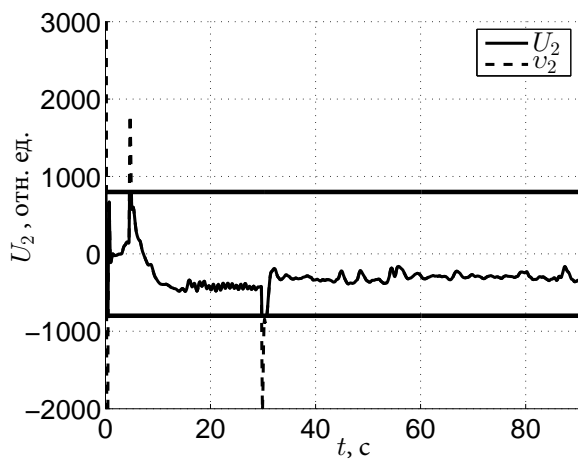
$$\begin{aligned} U_{min,\psi} &= -400, & U_{max,\psi} &= 400, \\ U_{min,\theta} &= -800, & U_{max,\theta} &= 800. \end{aligned}$$

Было проведено три эксперимента по двухканальной стабилизации квадрокоптера. Результаты экспериментальной апробации приведены на Рис. 3.8–(3.10).

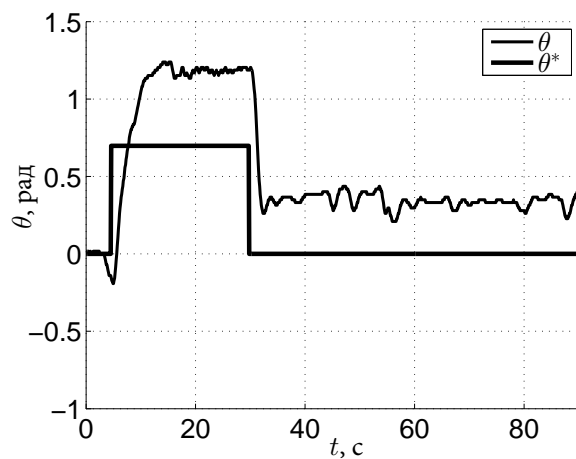
Первый эксперимент предполагал стабилизацию квадрокоптера при условии отсутствия в структуре регулятора (3.99)–(3.102) внутренней модели и схемы антивиндап-коррекции, т.е. при  $\gamma_i = 0$  и  $\nu_i = 0$ . Результаты испытаний приведены на Рис. 3.8. Как видно из графиков, система обрабатывает стабилизацию, однако с значительными установившимися ошибками, обусловленными влиянием внешнего возмущения, вызванного отражением от пола потока воздуха, наводимого винтами летательного аппарата.

Второй эксперимент предполагал стабилизацию квадрокоптера при условии отсутствия в структуре регулятора (3.99)–(3.102) схемы антивиндап-коррекции, т.е. при  $\nu_i = 0$ . Результаты испытаний приведены на Рис. 3.9. Как видно из графиков, в таком случае система становится неустойчива, что обусловлено влиянием интегрального насыщения в условиях ограниченности входных сигналов объекта.

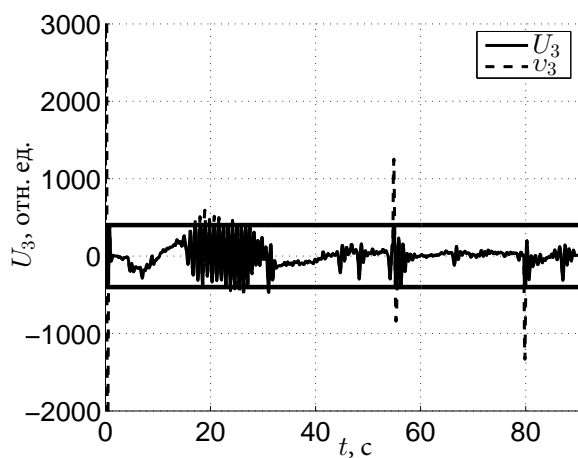
Третий эксперимент предполагал стабилизацию квадрокоптера с помощью предлагаемого алгоритма управления (3.99)–(3.102) с внутренней моделью и схемой антивиндап-коррекции. Результаты испытаний приведены на Рис. 3.10. Как видно из графиков, несмотря на влияние внешних возмущающих воздействий и насыщение по входу, поведение при этом остается устойчивым. Несмотря на колебания, ошибка регулирования сходится к нулю.



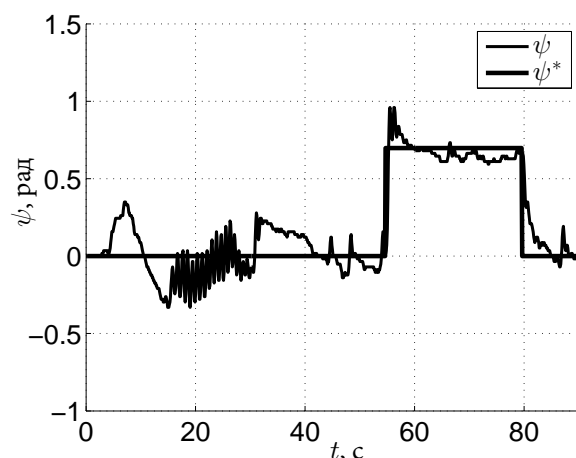
(а) Переходной процесс управляющего сигнала стабилизации тангажа



(б) Переходной процесс выходной переменной стабилизации тангажа

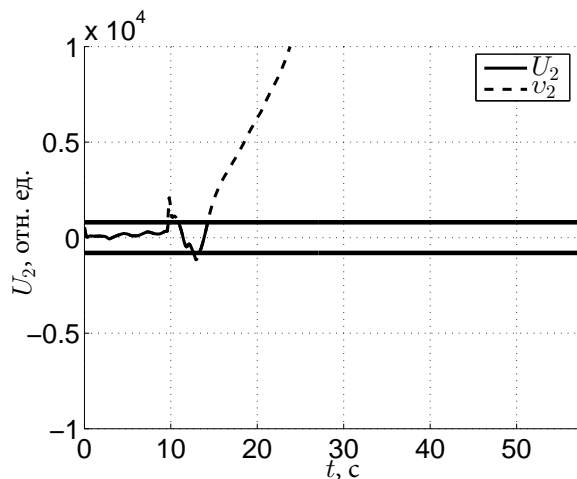


(в) Переходной процесс управляющего сигнала стабилизации крена

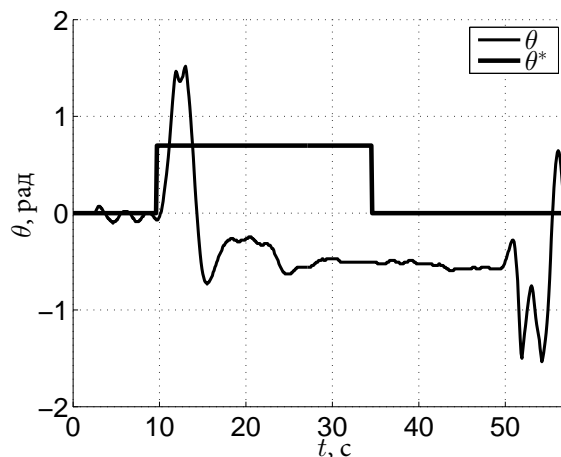


(г) Переходной процесс выходной переменной стабилизации крена

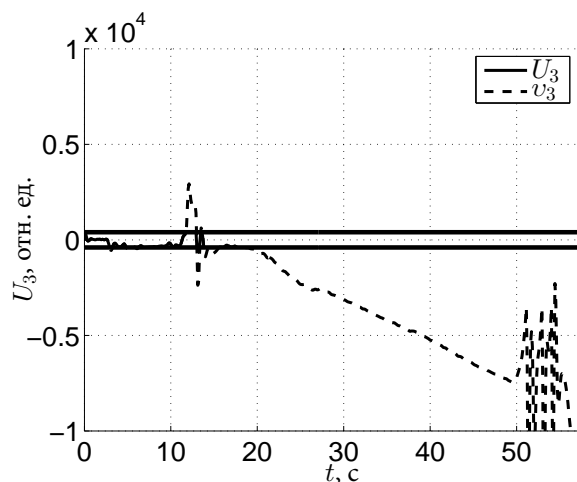
Рисунок 3.8. Результаты экспериментальной апробации при  $\gamma_i = 0$  и  $\nu_i = 0$ .



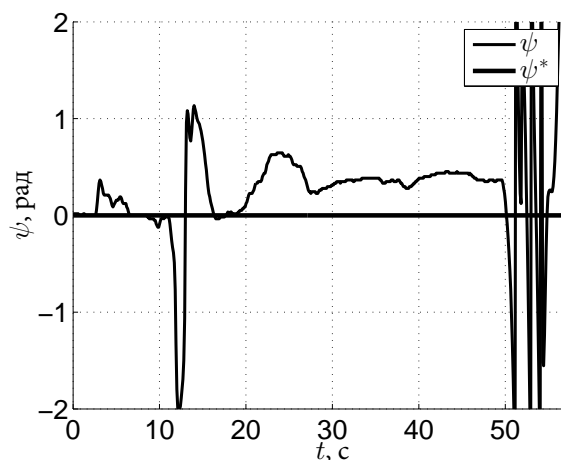
(а) Переходной процесс управляющего сигнала стабилизации тангажа



(б) Переходной процесс выходной переменной стабилизации тангажа

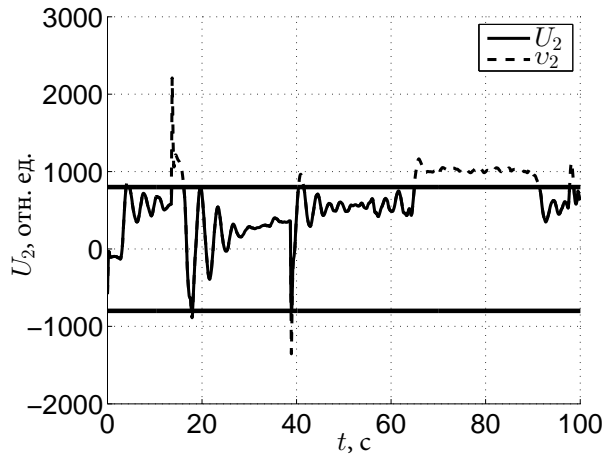


(в) Переходной процесс управляющего сигнала стабилизации крена

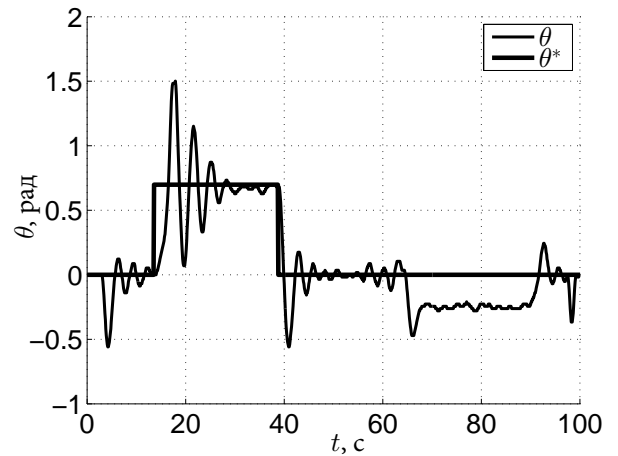


(г) Переходной процесс выходной переменной стабилизации крена

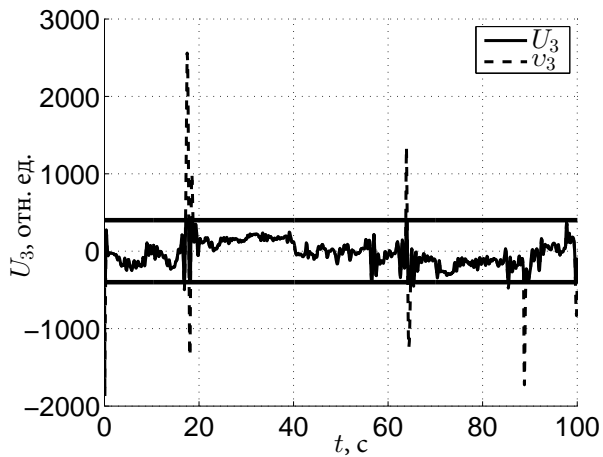
Рисунок 3.9. Результаты экспериментальной апробации при  $\nu_i = 0$ .



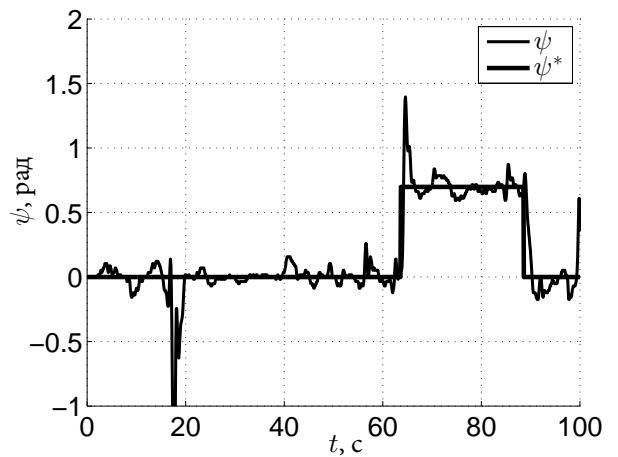
(а) Переходной процесс управляющего сигнала стабилизации тангажа



(б) Переходной процесс выходной переменной стабилизации тангажа



(в) Переходной процесс управляющего сигнала стабилизации крена



(г) Переходной процесс выходной переменной стабилизации крена

Рисунок 3.10. Результаты экспериментальной апробации предлагаемого алгоритма управления.

### **3.4 Выводы по главе**

В разделе 3.1 разработан алгоритм робастного управления по выходу с антивиндап-коррекцией для объектов с насыщением по входу и компенсацией внешних возмущений. Доказана абсолютная устойчивость замкнутой системы с помощью критерий Попова.

В разделе 3.2 описан метод декомпозиции многоканальной системы.

В разделе 3.3 приведен алгоритм стабилизации квадрокоптера с помощью разработанного алгоритма управления и метода декомпозиции и представлены результаты экспериментальных исследований на базе лабораторного стенда «КОМЕКС-1» кафедры управления сложными системами Университета ИТМО.

## Глава 4

# АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО ВЫХОДУ МНОГОКАНАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ

В настоящей главе представлено решение Задачи 3. Разработан алгоритм адаптивного управления по выходу многоканальными системами с динамически настраиваемой внутренней моделью с учетом влияния перекрестных связей. Показана устойчивость замкнутой системы с разработанным регулятором. Проведены экспериментальные исследования на макете надводного водоизмещающего судна на базе установки «CyberShip Arctic Drillship» департамента морских технологий Норвежского университета естественных и технических наук (NTNU). В ряде работ были исследованы частные случаи синтеза управления для макета надводного водоизмещающего судна с различными постановками задач [4, 5, 7, 15, 19, 23, 24, 33]. Кроме того, была зарегистрирована программа для управления роботизированным макетом надводного судна [35]. В развитие этих работ далее представлен более общий результат.

### 4.1 Постановка задачи

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = Ax + Bu + Rw, \quad (4.1)$$

$$y = Cx + Qw \quad (4.2)$$

$$y' = C'x + Q'w, \quad (4.3)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}^m$  — вектор управляющих сигналов,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  — вектор возмущающих воздействий,  $y \in \mathbb{R}^p$  — вектор выходных переменных,  $y \in \mathbb{R}^q$  — вектор дополнительных измеряемых переменных,  $A, B, R, C, Q, C', Q'$  — матрицы соответствующих размерностей.

Вектор возмущающих воздействий  $w$  рассматривается как состояние линейной системы вида

$$\dot{w} = S(\varrho)w,$$

где  $\varrho$  — вектор неизвестных параметров,  $S$  — матрица соответствующей размерности.

Все матрицы, описывающие (4.1)–(4.3) могут быть непрерывно зависимыми от вектора неизвестных параметров  $\mu$ , в общем случае отличного от  $\varrho$ . Предполагается, что все неопределенные параметры могут варьироваться в пределах ограниченных множеств.

В рамках настоящей главы ставится задача синтеза робастного управления по выходу для объекта (4.1)–(4.2), что предполагает получение регулятора вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= A_c x_c + B_c + L_c y, \\ u &= C_c x_c + D_c y' + M_c y,\end{aligned}$$

обеспечивающего асимптотическую устойчивость замкнутой системы при всех начальных условиях  $(w(0), x(0), x_c(0))$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

## 4.2 Базовые допущения и робастная минимальная фазовость

Известно [141], что если задача управления по выходу решена, то уравнения вида

$$\begin{aligned}PS(\varrho) &= AP + B\Psi + R, \\ 0 &= C\Pi + Q\end{aligned}$$

должны иметь решение  $(\Pi, \Psi)$ , зависимое от неизвестных параметров  $(\varrho, \mu)$ . Такие уравнения имеют решение для любой возможной неопределенной пары

$(R, Q)$  тогда и только тогда, когда  $(n + p) \times (n + m)$  матрица

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

имеет ранг  $n + p$  для  $\forall \lambda \in \sigma(S(\varrho))$  [142], что в свою очередь означает  $p \leq m$ ,  $C$  имеет ранг  $p$  и система

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (4.4)$$

$$y = Cx \quad (4.5)$$

правильно обратимая [143]. Таким образом, введем следующее допущение.

**Допущение 4.1.** Система (4.4), (4.5) правильно обратимая.

Решение задачи робастного управления по выходу предполагает реализуемость робастного регулятора для системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (4.6)$$

$$y = Cx, \quad (4.7)$$

$$y' = C'x, \quad (4.8)$$

рассматриваемая как система с входом  $u$  и парой выходов  $(y, y')$ . Таким образом, первым этапом сконцентрируемся на этой проблеме. Воспользуемся ключевыми понятиями и соответствующим инструментарием, развиваемыми в рамках геометрических подходов в линейных многомерных системах [144, 144].

Обозначим максимальное  $(A, B)$ -инвариантное подпространство, содержащееся в  $\text{Ker}(C)$ , как  $\mathcal{V}^*$ , а также пусть  $\mathcal{B} = \text{Im}(B)$ . Известно, что  $\mathcal{V}^*$  может быть рассчитан за конечное количество шагов с помощью рекурсивного алгоритма [144].

**Допущение 4.2.**  $\mathcal{V}^*$ -алгоритм регулярный в  $\mu$ .

Заметим, что поскольку  $C$  имеет ранг  $p$ , тогда  $\text{Ker}(C)$  имеет размерность  $n - p$  и в таком случае размерность  $\zeta$  в  $\mathcal{V}^*$  с необходимостью удовлетворяет



$\varsigma \leq n - p$ . Используя Допущения 4.1 и 4.2 возможно построить невырожденную матрицу  $n \times n$

$$T = \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix},$$

состоящую из непрерывных функций от  $\mu$ , где блочные элементы  $T_0$ ,  $T_1$  и  $T_2$  размерностей  $\varsigma \times n$ ,  $(n - \varsigma - p) \times n$  и  $p \times n$ , соответственно, удовлетворяют [142, 143, 145, 146]

$$\mathcal{V}^* = \text{Im} \left( T^{-1} \begin{bmatrix} I_\varsigma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad (4.9)$$

$$T_1 A \mathcal{V}^* = 0, \quad (4.10)$$

$$T_1 B = 0, \quad (4.11)$$

$$\text{rank}(T_2 B) = p. \quad (4.12)$$

**Замечание 4.1.** Если  $CB$  имеет ранг  $p$ , тогда Допущение 4.1 выполнено и  $\mathcal{V}^* = \text{Ker}(C)$ . Кроме того, Допущение 4.2 также выполнено и  $\varsigma = n - p$ . Таким образом, матрицы  $T_1$  не существует, поэтому можем просто принять  $T_2 = C$  или  $T_2 = MC$ , где  $M$  — невырожденная матрица.

Введем следующее допущение.

**Допущение 4.3.** Существует постоянная матрица  $\Upsilon_2$  размерности  $m \times p$  такая, что  $\det(T_2 B \Upsilon_2) \neq 0$ .

Заметим, что из Допущения 4.3 следует  $\text{rank}(T_2 B \Upsilon_2) = p$ . Таким образом, существует матрица  $\Upsilon_1$  размерности  $(m - p)$  такая, что

$$u = \Upsilon U = \Upsilon_1 U_1 + \Upsilon_2 U_2$$

представляет собой допустимую (независимая от  $\mu$ ) замену координат в пространстве входа. Заметим также, что  $\mathcal{B}_2 = \text{Im}(B \Upsilon_2)$  такое, что  $\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{V}^* = \{\emptyset\}$  и

тогда

$$\mathcal{V}^* + \mathcal{B} = \mathcal{V}^* \oplus \mathcal{B}_2.$$

Осуществим замену координат

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} x,$$

после чего система (4.6)–(4.8) примет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_0 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ 0 & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{01} & B_{02} \\ 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

$$y' = \begin{bmatrix} H'_0 & H'_1 & H'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

Более того, можно показать, что существуют такие  $T_1$  и  $T_2$ , что блочный элемент  $A_{11}$  гурвицев [142, 146].

Поскольку  $B_{22}$  невырождена по построению, существует единственная матрица  $\Phi_2$  такая, что

$$A_{20} = -B_{22}\Phi_2,$$

откуда, принимая

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Phi_2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

имеем

$$(A + B\Phi)\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^*$$

как и ожидалось, поскольку  $\mathcal{V}^*$   $(A, B)$ -инвариантно.

Ввиду последующих преобразований, удобно выполнить замену переменных таким образом, чтобы устранить  $U_2$  из вышеприведенного уравнения. Этого можно добиться выбрав

$$z = z_0 - B_{02}B_{22}^{-1}z_2.$$

Заменяя координаты таким образом, система примет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} + B_{02}\Phi_2 & \bar{A}_{01} & \bar{A}_{02} \\ 0 & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{01} & 0 \\ 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

$$y = H_1z_1 + H_2z_2, \quad (4.14)$$

$$y' = H'_0z + H'_1z_1 + \bar{H}'_2z_2. \quad (4.15)$$

Видно, что матрица  $A_{00} + B_{02}\Phi_2$  является матричным представлением ограничения  $(A + B\Phi)|_{\mathcal{V}^*}$  от  $(A + B\Phi)$  к  $\mathcal{V}^*$ . Также видно, что существует матрица  $G$  ранга  $(m - p)$  такая, что  $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* = \text{Im}(BG)$ .

Известные следующие свойства [144].

**Утверждение 4.1.** *Подпространство  $\mathcal{R} = \langle A + B\Phi | \text{Im}(BG) \rangle$  наибольшее подпространство управляемости, содержащееся в  $\text{Ker}(C)$ . Собственные числа преобразования  $\overline{A + B\Phi}$  индуцированные в  $\mathcal{V}^*/\mathcal{R}^*$  матрицей  $A + B\Phi$  являются нулями передачи системы (4.4)–(4.5).*

В локальных координатах (4.13)–(4.15) нули передачи могут быть идентифицированы с помощью собственных чисел «неуправляемой части» пары  $(A_{00} + B_{02}\Phi_2\bar{B}_{01})$ .

Очевидно, что, если собственные числа «неуправляемой части» пары  $(A_{00} + B_{02}\Phi_2\bar{B}_{01})$  имеют отрицательные вещественные части, то система

$$\dot{z} = (A_{00} + B_{02}\Phi_2)z + \bar{B}_{01}U_1$$

может быть стабилизирована некоторой обратной связью по состоянию  $U_1 = \Phi_1z$ . Этот факт может быть использован при разработке регулятора для объекта

(4.6)–(4.8). Однако, закон управления в такой форме не может быть реализован по причине того, что такая матрица  $\Phi_1$  может быть зависимой от  $\mu$ , а также состояние  $z$  не доступно прямым измерениям. Таким образом, предположим, что рассматриваемая система может быть робастно стабилизирована с помощью динамической обратной связи только на основе измеряемой выходной переменной  $y' = H'_0 z$ . Абстрагируясь от формализма координат, это свойство можно определить следующим образом.

Рассмотрим систему (4.6)–(4.8). Пусть  $\Phi$  такая, что  $(A + B\Phi)\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^*$  и  $G$  такая, что  $\mathcal{V}^* \cap \mathcal{B} = \text{Im}(BG)$ . Определим  $A_0 : \mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}^*$ ,  $B_0 : \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{V}^*$  и  $C_0 : \mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{Y}$  как

$$A_0 = (A + B\Phi)|_{\mathcal{V}^*}, \quad B_0 = BG, \quad C'_0 = C'|_{\mathcal{V}^*}.$$

*Определение 4.1. Система (4.6)–(4.8) робастно минимально фазовая, если существует динамическая система*

$$\dot{\xi} = A_s \xi + B_s y'_0, \quad (4.16)$$

$$u_0 = C_s \xi + D_s y'_0 \quad (4.17)$$

*такая, что объединение системы (4.16), (4.17) и*

$$\dot{x}_0 = A_0 x_0 + B_0 u_0,$$

$$y'_0 = C'_0 x_0$$

*устойчиво для любого значения неопределенного параметра  $\mu$ .*

Несложно видеть, что в специальных координатах, используемых в (4.13)–(4.15), рассматриваемое свойство представляет собой то, что объединение системы (4.16), (4.17) и

$$\dot{z} = (A_{00} + B_{02}\Phi_2)z + \bar{B}_{01}u_0, \quad (4.18)$$

$$y'_0 = H'_0 z \quad (4.19)$$

устойчиво для любого значения неопределенного параметра  $\mu$ .

С учетом этого выберем входной сигнал  $U_1$  системы (4.13)–(4.15) как

$$\dot{\xi} = A_s \xi + B_s y', \quad (4.20)$$

$$U_1 = C_s \xi + D_s y'. \quad (4.21)$$

Полученная система после несложных преобразований может рассматриваться как система с входом  $U_2$  и выходом  $z_2$  вида

$$\dot{z} = A_{00}z + A_{01}z_2, \quad (4.22)$$

$$\dot{z}_2 = A_{10}z + A_{11}z_2 + B_{22}U_2, \quad (4.23)$$

где  $z = \text{col}(\xi, z, z_1)$ , матрица  $A_{00}$  гурвицева для любого значения неопределенного параметра  $\mu$  (если матрицы  $T_1$  и  $T_2$  выбраны такими, что  $A_{11}$  гурвицева, что всегда возможно) и  $B_{22}$  невырождена. При незначительных допущениях на  $B_{22}$  система (4.22)–(4.23) может быть робастно стабилизирована с помощью обратной связи на основе  $z_2$ .

В литературе можно найти различные допущения на матрицу  $B_{22}$ , при которых система в форме (4.22)–(4.23) при допущении, что матрица  $A_{00}$  гурвицева, может быть стабилизирована. Ниже приведены наиболее известные.

1. Существуют невырожденные матрицы  $M$  и  $N$  такие, что матрица  $MB_{22}N$  положительно определенная. В этом случае робастная устойчивость достигается с использованием управления  $U_2 = -\kappa_2 N M^{-1} z_2$  при достаточно большом значении  $\kappa_2$ .
2. Главные миноры  $B_{22}$  имеют знаки, которые не изменяются при  $\mu$ , а также известны. В этом случае робастная устойчивость достигается с использованием управления вида  $-K E z_e$ , где  $E$  — диагональная матрица, состоящая из 1 и  $-1$  (в зависимости от знаков главных миноров  $B_{22}$ ) и  $K$  — диагональная матрица  $K = \text{diag}(\kappa_2^p, \kappa_2^{p-1}, \dots, \kappa_2)$  при достаточно большом значении  $\kappa_2$  [142, 146].

3. Существует постоянная невырожденная матрица  $B$  и число  $0 < a_0 < 1$  такое, что  $\|(B_{22} - B)B^{-1}\| \leq a_0$  для  $\forall \mu$ . В этом случае робастная устойчивость достигается с помощью соответствующей динамической обратной связи на основе  $z_2$  [147].

В последующем рассмотрим первое допущение (которое является самым сильным из трех). Выбор мотивирован возможностью использования на последующих стадиях разработки классических методов адаптивной компенсации неопределенности параметра  $\varrho$ . В этом отношении заметим, что, поскольку  $B_{22}$  является матрицей вида  $T_2 B \Upsilon_2$ , можем рассматривать матрицу  $M$ , содержащуюся в  $T_2$ , и  $N$ , содержащуюся в  $\Upsilon_2$ .

Таким образом, получим следующий результат.

**Утверждение 4.2.** *Предположим, что Допущения 4.1 и 4.2 выполнены, что матрица  $T_2 B \Upsilon_2$  положительно определенная (для любого значения неопределенного параметра  $\mu$ ), система (4.6)–(4.8) робастно стабилизируема с помощью закона управления вида*

$$\dot{\xi} = A_s \xi + B_s y', \quad (4.24)$$

$$u = \Upsilon_1 (C_s \xi + D_s y') + \Upsilon_2 (-\kappa_2 T_2 x), \quad (4.25)$$

где  $A_s$ ,  $B_s$ ,  $C_s$ ,  $D_s$  такие, что система (4.16), (4.17) стабилизирует систему (4.18), (4.19) и  $\kappa_2 > 0$  — достаточно большое число.

### 4.3 Интеграция внутренней модели и ее динамическая настройка

Как показано в работе [124] стабилизация объекта (4.1)–(4.3) по выходу возможно с использованием внутренней модели

$$\dot{\eta} = F\eta + Gy. \quad (4.26)$$

Такая внутренняя модель состоит из  $p$  идентичных систем вида

$$\dot{\eta}_i = F_0(\varrho)\eta_i + G_0 y_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

где  $F_0(\varrho)$  — матрица во фробениусовой форме, чей характеристический полином совпадает с минимальным полиномом матрицы  $S(\varrho)$  и  $G_0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ . Без потери общности, можем допустить, что

$$F_0(\varrho) = \Phi_0 + G\Gamma_0(\varrho),$$

где  $\Phi_0$  — постоянная гурвицева матрица во фробениусовой форме. Соответственно, внутренней модель может быть записана в компактном виде как

$$\dot{\eta} = (\Phi + G\Gamma_\varrho)\eta + Gy,$$

где

$$\Phi = \text{diag}(\Phi_0, \Phi_0, \dots, \Phi_0),$$

$$G = \text{diag}(G_0, G_0, \dots, G_0),$$

$$\Gamma_\varrho = \text{diag}(\Gamma_0(\varrho), \Gamma_0(\varrho), \dots, \Gamma_0(\varrho)),$$

и матрица  $\Phi$  гурвицева.

Покажем, что, если объект (4.6)–(4.8) робастно минимально фазовый, то таковым является и расширенный объект

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{4.27}$$

$$\dot{\eta} = \Phi\eta + G(\Gamma_\varrho + T_2x), \tag{4.28}$$

$$\bar{y} = \Gamma_\varrho\eta + T_2x, \tag{4.29}$$

$$y' = C'x \tag{4.30}$$

при гурвицевой матрице  $\Phi$ .

В самом деле, выражая (4.6)–(4.8) в форме (4.13)–(4.15) и принимая

$$\bar{z}_2 = \Gamma_\varrho\eta + T_2x = \Gamma_\varrho\eta + z_2,$$

видно, что рассматриваемый расширенный объект является системой в форме

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{z}_1 \\ \dot{\eta} \\ \dot{\bar{z}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} + B_{02}\Phi_2 & \bar{A}_{01} & -\bar{A}_{02}\Gamma_\rho & \bar{A}_{02} \\ 0 & A_{11} & -A_{12}\Gamma_\rho & A_{12} \\ 0 & 0 & \Phi & G \\ A_{20} & A_{21} & -\bar{A}_{22}\Gamma_\rho + \Gamma_\rho\Phi & \bar{A}_{22} + \Gamma_\rho G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ z_1 \\ \eta \\ \bar{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{01} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y} = \bar{z}_2,$$

$$y' = H'_0 z + H'_1 z_1 - \bar{H}'_2 \Gamma_\rho \eta + \bar{H}'_2 \bar{z}_2.$$

Несложно видеть, что, если (4.6)–(4.8) робастно минимально фазовый, то таковой является и расширенная система (4.27)–(4.30). Кроме того, тот же регулятор (4.20)–(4.21) может быть использован для обеспечения желаемых асимптотических свойств. Таким образом, результат, идентичен Утверждению 4.2 выполнен.

**Утверждение 4.3.** *Предположим, что Допущения 4.1 и 4.2 выполнены, что матрица  $T_2 B \Upsilon_2$  положительно определенная (для любого значения неопределенного параметра  $\mu$ ), система (4.6)–(4.8) робастно минимально фазовая. Рассмотрим расширенную систему (4.27)–(4.30) с гурвицевой матрицей  $\Phi$  (поскольку это всегда возможно). Тогда такая система может быть робастно стабилизирована с помощью закона управления вида*

$$\dot{\xi} = A_s \xi + B_s y', \quad (4.31)$$

$$u = \Upsilon_1 (C_s \xi + D_s y') + \Upsilon_2 (-\kappa_2 (\Gamma_\rho \eta + T_2 x)), \quad (4.32)$$

где  $A_s$ ,  $B_s$ ,  $C_s$ ,  $D_s$  такие, что система (4.16), (4.17) стабилизирует систему (4.18), (4.19) и  $\kappa_2 > 0$  — достаточно большое число.

В общем случае, переменная  $z_2 = T_2 x$ , необходимая в регуляторе (4.31), (4.32), не доступна прямым измерениям. Однако, можно показать, что она может быть оценена с помощью состояния  $\hat{z}_2$  наблюдателя, построенного по принципу сильной обратной связи, на вход которого подана переменная  $y$  [142, 146].



Таким образом, в рамках известной парадигмы, сконцентрируемся на специальном случае, когда  $z_2$  доступен измерениям или, что эквивалентно в настоящем контексте,  $CB$  имеет ранг  $p$ .

В таком случае (см. Замечание 4.1), Допущения 4.1 и 4.2 выполнены и  $\mathcal{V}^* = \text{Ker}(C)$ . Таким образом,  $\varsigma = n - p$  и набор координат  $z_1 = T_1x$  не существует. Можем принять  $z_2 = y$  и форма (4.13)–(4.15) сводится к

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} + B_{02}\Phi_2 & \bar{A}_{02} \\ A_{20} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{01} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

$$y = y, \quad (4.34)$$

$$y' = H'_0 z + \bar{H}'_2 y. \quad (4.35)$$

В этом специальном случае выполнено Следствие из Утверждения 4.3

*Следствие 4.1. Предположим, что существует матрица  $\Upsilon_2$  такая, что  $CB\Upsilon_2$  положительно определенная (для любого значения неопределенного параметра  $\mu$ ), система (4.6)–(4.8) робастно мнимально фазовая. Рассмотрим расширенную систему (4.27)–(4.30) с гурвицевой матрицей  $\Phi$  (поскольку это всегда возможно). Тогда такая система может быть робастно стабилизирована с помощью закона управления вида*

$$\dot{\xi} = A_s \xi + B_s y', \quad (4.36)$$

$$u = \Upsilon_1(C_s \xi + D_s y') + \Upsilon_2(-\kappa_2(\Gamma_\rho \eta + y)), \quad (4.37)$$

где  $A_s$ ,  $B_s$ ,  $C_s$ ,  $D_s$  такие, что система (4.16), (4.17) стабилизирует систему (4.18), (4.19) и  $\kappa_2 > 0$  — достаточно большое число.

Обратим внимание, что все переменные, используемые в законе управления (4.36), (4.37), а именно  $y'$ ,  $y$ ,  $\eta$  доступны измерениям.

Если вектор  $\rho$  неизвестен, тогда внутренняя модель (4.26) не может быть реализована. В таком случае, следуя подходу [129], заменим матрицу  $\Gamma_\rho$  на ее оценку

$$\hat{\Gamma} = \text{diag}(\hat{\Gamma}_0, \hat{\Gamma}_0, \dots, \hat{\Gamma}_0).$$

Покажем, как может быть определена динамика  $\hat{\Gamma}_0$  таким образом, чтобы объект

$$\dot{x} = Ax + Bu + Rw, \quad (4.38)$$

$$y = Cx + Qw, \quad (4.39)$$

$$y' = C'x + Q'w \quad (4.40)$$

стабилизировался законом управления вида

$$u = \Upsilon_1(C_s\xi + D_s y') + \Upsilon_2(-\kappa_2(\hat{\Gamma}\eta + y)), \quad (4.41)$$

$$\dot{\xi} = A_s\xi + B_s y', \quad (4.42)$$

$$\dot{\eta} = \Phi\eta + G(\hat{\Gamma}\eta + y) \quad (4.43)$$

обеспечивая асимптотическую сходимость выходной переменной  $y(t)$  к нулю.

Сохраним допущение, принятое ранее, о том, что  $B$  такое, что  $CB\Upsilon_2 > 0$  для некоторого  $\Upsilon_2$ . При этом допущении после некоторой необходимой замены координат (см. (4.33)–(4.35)), объект (4.38)–(4.40) может быть переписан в виде:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{00} + B_{02}\Phi_2 & \bar{A}_{02} \\ A_{20} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{01} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_0 \\ R_2 \end{bmatrix} w, \\ y &= y, \\ y' &= H'_0 z + \bar{H}'_2 e + R_{y'} w, \end{aligned}$$

где  $B_{22}$  — положительно определенная матрица.

Определим ошибку оценивания как

$$\tilde{\Gamma} = \hat{\Gamma} - \Gamma_e.$$

Объединяя (4.38)–(4.40) с (4.41)–(4.43) получим замкнутую модель

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} + B_{02}\Phi_2 + \bar{B}_{01}D_s H'_0 & \bar{B}_{01}C_s & 0 & \bar{A}_{02} + \bar{B}_{01}D_s \bar{H}'_2 \\ B_s H'_0 & A_s & 0 & B_s \bar{H}'_2 \\ 0 & 0 & \Phi + G\Gamma_e & G \\ A_{20} + B_{21}D_s H'_0 & B_{21}C_s & -\kappa_2 B_{22}\Gamma_e & \bar{A}_{22} + B_{21}D_s \bar{H}'_2 - \kappa_2 B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \xi \\ \eta \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G \\ \kappa_2 B_{22} \end{bmatrix} \tilde{\Gamma}\eta + \begin{bmatrix} R_0 \\ R_2 \\ 0 \\ R_{y'} \end{bmatrix} w.$$

Временно предположим, что  $\tilde{\Gamma} = 0$ . Из Следствия 4.1 известно, что, если число  $\kappa_2$  достаточно большое и  $A_s, B_s, C_s, D_s$  выбраны корректно, тогда система без возмущений ( $w = 0$ ) устойчива. Следовательно, установившийся режим определяется решением соответствующего уравнения Сильвестра

$$\begin{bmatrix} \Pi_z \\ \Pi_\xi \\ \Sigma \\ \Pi_y \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} A_{00} + B_{02}\Phi_2 + \bar{B}_{01}D_sH'_0 & \bar{B}_{01}C_s & 0 & \bar{A}_{02} + \bar{B}_{01}D_s\bar{H}'_2 \\ B_sH'_0 & A_s & 0 & B_s\bar{H}'_2 \\ 0 & 0 & \Phi + G\Gamma_\rho & G \\ A_{20} + B_{21}D_sH'_0 & B_{21}C_s & -\kappa_2 B_{22}\Gamma_\rho & \bar{A}_{22} + B_{21}D_s\bar{H}'_2 - \kappa_2 B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_z \\ \Pi_\xi \\ \Sigma \\ \Pi_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_0 \\ R_2 \\ 0 \\ R_y \end{bmatrix}.$$

Известно [124, 142], что ввиду специальной структуры матриц  $\Phi, \Gamma, \Gamma_\rho$ , уравнение третьей блочной строки, а именно

$$\Sigma S = (\Phi + G\Gamma_\rho)\Sigma + G\Pi_y$$

показывает, что  $\Pi_y = 0$ .

Пересчитаем значения переменных в установившемся режиме, используя соответствующие матрицы

$$\tilde{z} = z - \Pi_z w,$$

$$\tilde{\xi} = \xi - \Pi_\xi w,$$

$$\tilde{\eta} = \eta - \Sigma w.$$

Сигнал выходной переменной не был пересчитан, поскольку  $\Pi_y = 0$ .

Теперь вернемся к случаю, когда  $\tilde{\Gamma} \neq 0$ . С помощью пересчета значений переменных в установившемся режиме удалось устранить  $w$  в итоговой замкнутой системе, поэтому введем расширенный вектор состояния  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \tilde{z} & \tilde{\xi} & \tilde{\eta} & y \end{bmatrix}^T$  и перепишем систему в компактном виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\tilde{\Gamma}\eta),$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x},$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{00} + B_{02}\Phi_2 + \bar{B}_{01}D_s H'_0 & \bar{B}_{01}C_s & 0 & \bar{A}_{02} + \bar{B}_{01}D_s \bar{H}'_2 \\ B_s H'_0 & A_s & 0 & B_s \bar{H}'_2 \\ 0 & 0 & \Phi + G\Gamma_\rho & G \\ A_{20} + B_{21}D_s H'_0 & B_{21}C_s & -\kappa_2 B_{22}\Gamma_\rho & \bar{A}_{22} + B_{21}D_s \bar{H}'_2 - \kappa_2 B_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G \\ \kappa_2 B_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Воспользуемся следующим результатом.

**Утверждение 4.4.** *Существует положительно определенная матрица  $\mathbf{P}$  и число  $\kappa_2^*$  такие, что при  $\kappa_2 > \kappa_2^*$*

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} < 0, \quad (4.44)$$

$$\mathbf{P}\mathbf{B} = (-\kappa_2)\mathbf{C}^T. \quad (4.45)$$

*Доказательство.* Из Следствия 4.1 известно, что, если число  $\kappa_2$  достаточно большое и  $A_s, B_s, C_s, D_s$  выбраны корректно, тогда матрица  $\mathbf{A}$  гурвицева и, следовательно, существует положительно определенная матрица  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ , удовлетворяющая (4.44). Покажем, как найти матрицу  $\mathbf{P}$  такой, чтобы дополнительно выполнялось соотношение (4.45). Для этого рассмотрим невырожденную матрицу

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_2 I & GB_{22}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

С помощью несложных вычислений получим

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1},$$

где

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A_{00} + B_{02}\Phi_2 + \bar{B}_{01}D_s H'_0 & \bar{B}_{01}C_s & 0 & \bar{A}_{02} + \bar{B}_{01}D_s \bar{H}'_2 \\ B_s H'_0 & A_s & 0 & B_s \bar{H}'_2 \\ GB_{22}^{-1}(A_{20} + B_{21}D_s H'_0) & GB_{22}^{-1}B_{21}C_s & \Phi & GB_{22}^{-1}(\bar{A}_{22} + B_{21}D_s \bar{H}'_2) - \Phi GB_{22}^{-1} \\ A_{20} + B_{21}D_s H'_0 & B_{21}C_s & -B_{22}\Gamma_\varrho & \bar{A}_{22} + B_{21}D_s \bar{H}'_2 + \Gamma_\varrho G - \kappa_2 B_{22} \end{bmatrix},$$

где использовались соотношения

$$B_{22}(\Gamma_\varrho G)B_{22}^{-1} - B_{22}(\gamma_0 I)B_{22}^{-1} = \gamma_0 I = (\Gamma_\varrho G),$$

а также

$$\mathbf{T}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\kappa_2 B_{22} \end{bmatrix}.$$

Перепишем  $\tilde{\mathbf{A}}$  как

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} - \kappa_2 B_{22} \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} A_{00} + B_{02}\Phi_2 + \bar{B}_{01}D_s H'_0 & \bar{B}_{01}C_s & 0 \\ B_s H'_0 & A_s & 0 \\ GB_{22}^{-1}(A_{20} + B_{21}D_s H'_0) & GB_{22}^{-1}B_{21}C_s & \Phi \end{bmatrix},$$

при этом остальные блочные элементы  $\mathbf{A}_{12}$ ,  $\mathbf{A}_{21}$ ,  $\mathbf{A}_{22}$  определены аналогично в соответствии с матрицей  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Заметим, что все такие матрицы, а также  $B_{22}$ , могут быть зависимы от неизвестных параметров  $(\mu, \varrho)$ , но независимы от коэффициента усиления  $\kappa_2$ .

Согласно принятому допущению, верхний левый блочный элемент матрицы  $\mathbf{A}_{11}$

$$\begin{bmatrix} A_{00} + B_{02}\Phi_2 + \bar{B}_{01}D_s H'_0 & \bar{B}_{01}C_s \\ B_s H'_0 & A_s \end{bmatrix}$$

гурвицев. Фактически, этот элемент представляет собой матрицу, характеризующую объединение (4.16)–(4.17) и (4.18)–(4.19) в замкнутую систему, которая

устойчива, как следствие из допущения о робастно минимальной фазовости. Более того, матрица  $\Phi$  может быть выбрана гурвицевой, как было рассмотрено выше. Таким образом, вся матрица  $A_{11}$  является гурвицевой. Тогда существует матрица  $P_1 = P_1^T > 0$ , удовлетворяющая неравенству Ляпунова

$$P_1 A_{11} + A_{11}^T P_1 < 0,$$

и которая также может зависеть от параметра  $\mu$ . Рассмотрим положительно определенную матрицу

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & B_{11}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Известно, что существует число  $\kappa_2^*$  (в общем случае зависимое от ограниченного множества, на котором  $(\mu, \varrho)$  могут варьироваться) такое, что при  $\kappa_2 > \kappa_2^*$  неравенство

$$\tilde{P}\tilde{A} + \tilde{A}^T\tilde{P} < 0$$

выполнено для любых  $(\mu, \varrho)$ . При этом определим

$$P = T^T \tilde{P} T$$

и найдем, что

$$PA + A^T P = T^T (\tilde{P}\tilde{A} + \tilde{A}^T\tilde{P}) T < 0.$$

Более того,

$$PB = T^T \tilde{P} T B = T^T \tilde{P} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -kB_{22} \end{bmatrix} = T^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\kappa_2 I \end{bmatrix} = -\kappa_2 C^T,$$

что и требовалось доказать.

□□□

Следующим этапом определим закон адаптации. Рассмотрим

$$\tilde{\Gamma}_0 = \hat{\Gamma}_0 - \Gamma_0(\varrho)$$

как типовой  $i$ -й блочный элемент блочно-диагональной матрицы  $\tilde{\Gamma}$  (все эти блоки идентичны). Найдем, что

$$\dot{\tilde{\Gamma}}_0^T = \dot{\tilde{\Gamma}}_0^T$$

и зададим

$$\dot{\tilde{\Gamma}}_0^T = \varphi_0(\cdot).$$

Рассмотрим кандидат-функцию Ляпунова для всей системы в целом

$$V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \kappa_2 \tilde{\Gamma}_0 K^{-1} \tilde{\Gamma}_0^T, \quad (4.46)$$

где  $K = K^T > 0$ .

Дифференцируя (4.46), получим

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{x}^T (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{x} + 2 \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \tilde{\Gamma} \eta + 2 \kappa_2 \tilde{\Gamma}_0 K^{-1} \varphi_0(\cdot) = \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{x} + 2 \mathbf{x}^T (-\kappa_2) \mathbf{C}^T \tilde{\Gamma} \eta + 2 \kappa_2 \tilde{\Gamma}_0 K^{-1} \varphi_0(\cdot) = \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{x} - 2 \kappa_2 y^T \tilde{\Gamma} \eta + 2 \kappa_2 \tilde{\Gamma}_0 K^{-1} \varphi_0(\cdot). \end{aligned}$$

Найдем, что

$$y^T \tilde{\Gamma} \eta = \tilde{\Gamma}_0 \left( \sum_{i=1}^p \eta_i y_i \right),$$

тогда, приняв

$$\varphi(\cdot) = K \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_p \end{bmatrix} y = K \sum_{i=1}^p \eta_i y_i,$$

где заметим, что все переменные в правой части доступны измерениям, получим

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{x}.$$

Как видим, получили отрицательную полуопределенную функцию от  $(\mathbf{x}, \tilde{\Gamma}_0^T)$ . Таким образом, все траектории ограничены и сходятся к наибольшему инвариантному множеству, содержащемуся в годографе, где  $\dot{V} = 0$ . Следовательно, выходная переменная  $y$  стремится к нулю, а задача управления по выходу решена, несмотря на неопределенность  $\rho$ .

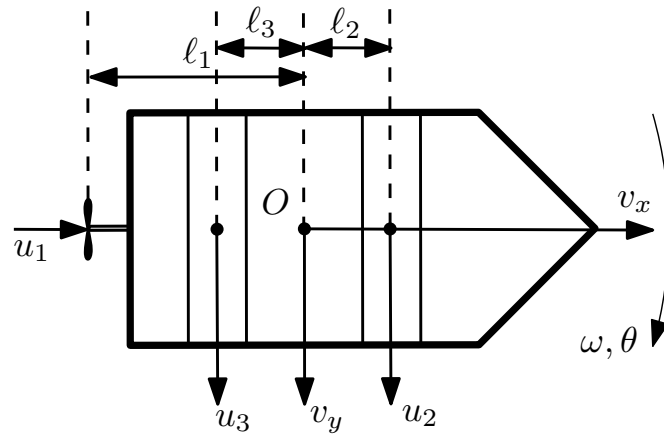


Рисунок 4.1. Конфигурация надводного водоизмещающего судна.

#### 4.4 Моделирование системы стабилизации скорости надводного водоизмещающего судна

Для иллюстрации работы предлагаемого алгоритма управления, решим задачу стабилизации скорости движения надводного водоизмещающего судна. Без потери общности рассмотрим конфигурацию надводного судна, изображенную на Рис. 4.1, которая является довольно распространенной. Судно снабжено маршевым двигателем, центральным рулем и двумя подруливающими устройствами туннельного типа на носу и на корме.

Будем использовать следующие обозначения:

- $v_x$  — скорость продольного движения;
- $v_y$  — скорость поперечного (бокового) движения;
- $\omega$  — угловая скорость поворота;
- $\theta$  — курсовой угол;
- $u_1, u_2, u_3$  — силы тяги, создаваемые маршевым двигателем и двумя подруливающими устройствами;
- $\alpha_1$  — угол перекладки руля.



–  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  – расстояния от геометрического центра до двигателей (предполагаются известными).

Заметим, что для рассматриваемой конфигурации в режиме швартовки руль может не использоваться, поэтому примем  $\alpha_1 = 0$ . Синтезируем закон управления для  $u_1, u_2$  и  $u_3$ .

Упрощенная модель надводного судна может быть записана в виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{x\theta} & 0 \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{y\theta} & 0 \\ a_{\theta x} & a_{\theta y} & a_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_2\ell_2 & -b_3\ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_\theta \\ 0 \end{bmatrix} w, \quad (4.47)$$

где  $a_{ij}, i, j = \{x, y, \theta\}$  – физические параметры,  $b_1, b_2$  и  $b_3$  – коэффициенты усиления соответствующих приводов. Возмущение  $w$  представляет собой регулярную составляющую влияния ветра, течения и волн. Таким образом, параметры  $p_x, p_y$  и  $p_\theta$  связаны с ветровым сносом, осадкой судна и другими параметрами, которые определяют входную матрицу объекта по возмущению.

Предположим, что линейные скорости доступны измерениям, равно как и угловая скорость перекладки руля или курсовой угол. Введем ошибки

$$e_1 = v_x - v_x^*,$$

$$e_2 = v_y - v_y^*,$$

$$e_3 = \omega - \omega^*,$$

$$e_4 = \theta - \theta^*.$$

Сформулируем две задачи.

### Задача 1

Если  $\omega$  измеряемый, тогда необходимо обеспечить ограниченность всех сигналов и

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} e_1 &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e_2 &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e_3 &= 0,\end{aligned}$$

### Задача 2

Если  $z$  измеряемый, тогда необходимо обеспечить ограниченность всех сигналов и

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} e_1 &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e_2 &= 0.\end{aligned}$$

#### 4.4.1 Регулирование всех выходных переменных

Для решения Задачи 1 выберем закон управления

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \Upsilon_2 \begin{bmatrix} -\kappa_{2x}(e_1 + \hat{\Gamma}_0 \eta_1) \\ -\kappa_{2y}(e_2 + \hat{\Gamma}_0 \eta_2) \\ -\kappa_{2z}(e_3 + \hat{\Gamma}_0 \eta_3) \end{bmatrix},$$

где  $\kappa_{2x} > 0$ ,  $\kappa_{2y} > 0$ ,  $\kappa_{2z} > 0$ ,  $\Upsilon_2$  выбран в форме

$$\Upsilon_2 = \frac{1}{\ell_2 + \ell_3} \begin{bmatrix} \ell_2 + \ell_3 & 0 & 0 \\ 0 & \ell_3 & 1 \\ 0 & \ell_2 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.48)$$

а также переменные  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_3$  и оценка  $\hat{\Gamma}_0$  определены как

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_i &= \Phi \eta_i + G(e_i + \hat{\Gamma}_0 \eta_i), \quad i = 1, 2, 3, \\ \dot{\hat{\Gamma}}_0 &= K(e_1 \eta_1 + e_2 \eta_2 + e_3 \eta_3).\end{aligned}$$

**Замечание 4.2.** Выбор  $\Upsilon_2$  неограничен и совпадает с Допущением 4.3. В самом деле, вычислим

$$\Delta = \det (T_2 B \Upsilon_2)$$

$$\text{для } T_2 = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \det \left( \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_2 \ell_2 & -b_3 \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_2 + \ell_3 & 0 & 0 \\ 0 & \ell_3 & 1 \\ 0 & \ell_2 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\ell_2 + \ell_3} \right) = \\ &= \det \left( \begin{bmatrix} b_1(\ell_2 + \ell_3) & 0 & 0 \\ 0 & b_2 \ell_3 + b_3 \ell_2 & b_2 - b_3 \\ 0 & \ell_2 \ell_3 (b_2 - b_3) & b_2 \ell_3 + b_3 \ell_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\ell_2 + \ell_3} \right) = \\ &= \frac{1}{(\ell_2 + \ell_3)^2} ((b_2 \ell_3 + b_3 \ell_2)^2 - \ell_2 \ell_3 (b_2 - b_3)^2). \end{aligned}$$

Если  $\ell_2 = \ell_3$  или  $b_2 = b_3$ , то получим  $\Delta > 0$ . Если  $\ell_2 < \ell_3$ , тогда очевидно, что подруливающее устройство на носу должно оказывать большее влияние, т.е.  $b_2 > b_3$ . Таким образом, несложно показать, что  $\Delta > 0$ . Аналогичные рассуждение можно применить к  $\ell_2 > \ell_3$ . Во всех случаях заметим, что  $\Upsilon_2$  не зависит от  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$ .

#### 4.4.2 Стабилизация и частичное регулирование выходных переменных

Для решения Задачи 2 (при недоступности прямым измерениям угловой скорости поворота  $\omega$ ) перепишем модель (4.47) в форме:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{e}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{\theta\theta} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ e_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{\theta x} & a_{\theta y} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_3 \ell_3 \\ 0 \end{bmatrix} U_1 + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & b_2 \ell_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_2 + \begin{bmatrix} a_{\theta x} & a_{\theta y} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x^* \\ x_y^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_\theta \\ 0 \end{bmatrix} w, \\ \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{x\theta} & 0 \\ a_{y\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ e_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_3 \end{bmatrix} U_1 + \\ &+ \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} U_2 + \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x^* \\ x_y^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} w, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= u_3, \\ U_2 &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Видно, что получена система представлена в форме, которая рассматривается в настоящей главе. Заметим, что составляющая, соответствующая  $z_1$  отсутствует, поскольку относительная степень равна  $\{1, 1\}$ . В частности имеем

$$\begin{aligned} A_{00} &= \begin{bmatrix} a_{\theta\theta} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & A_{02} &= \begin{bmatrix} a_{\theta x} & a_{\theta y} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & A_{20} &= \begin{bmatrix} a_{x\theta} & 0 \\ a_{y\theta} & 0 \end{bmatrix}, & A_{22} &= \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{bmatrix}, \\ B_{01} &= \begin{bmatrix} -b_3 \ell_3 \\ 0 \end{bmatrix}, & B_{02} &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, & B_{21} &= \begin{bmatrix} 0 \\ b_3 \end{bmatrix}, & B_{22} &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Заметим, что матрица  $B_{22}$  невырождена и может быть легко выбрана положительно определенной.

Далее проверим допущение о строгой минимальной фазовости. Для этого определим

$$z = \begin{bmatrix} \omega \\ e_4 \end{bmatrix} - B_{02}B_{22}^{-1} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

и продифференцируем

$$\dot{z} = (A_{00} - B_{02}B_{22}^{-1}A_{20})z + (B_{01} - B_{02}B_{22}^{-1}B_{21})U_1.$$

Предполагая, что курсовой угол  $\theta$  известен, воспользуемся дополнительным измерением

$$y = H_0z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} z = \theta.$$

Необходимо проверить, является ли эта система робастно стабилизируемой с помощью обратной связи от  $y$  к  $U_1$ . Имеем

$$\begin{aligned} A_{00} - B_{02}B_{22}^{-1}A_{20} &= \begin{bmatrix} a_{\theta\theta} - a_{y\theta\ell_2} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_{01} - B_{02}B_{22}^{-1}B_{21} &= \begin{bmatrix} -b_3(\ell_2 + \ell_3) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ H_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Такая система действительно робастно стабилизируема для всех  $\ell_2$  и  $\ell_3$ . В этом случае система имеет относительную степень 2, поэтому есть два полюса и нет нулей. Она может быть стабилизирована с помощью динамической обратной связи по выходу с передаточной функцией

$$G(s) = k \frac{s + \delta}{s + \sigma},$$

где  $\delta > 0$ ,  $\sigma > 0$  и число  $k > 0$  достаточно большое.

Итоговый закон управления, записанный в форме (4.41)–(4.43), имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} &= \Upsilon_1(\kappa_{1\theta}\xi + \kappa_{1\theta}e_4) + \Upsilon_2 \begin{bmatrix} -\kappa_{2x}(e_1 + \hat{\Gamma}_0\eta_1) \\ -\kappa_{2y}(e_2 + \hat{\Gamma}_0\eta_2) \end{bmatrix}, \\ \dot{\xi} &= -\sigma\xi + \sigma e_4, \\ \dot{\eta}_i &= \Phi\eta_i + G(e_i + \hat{\Gamma}_0\eta_i), \quad i = 1, 2, \\ \dot{\hat{\Gamma}} &= K(e_1\eta_1 + e_2\eta_2), \end{aligned}$$

где  $\kappa_{2x} > 0$ ,  $\kappa_{2y} > 0$ ,  $\kappa_{2\theta} > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\Upsilon_1$  и  $\Upsilon_2$  могут быть выбраны в соответствии с (4.48)

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &= \frac{1}{\ell_2 + \ell_3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \\ \Upsilon_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Результаты моделирования предлагаемого алгоритма управления приведены на Рис. 4.2. Параметры модели (4.47) при  $\ell_2 = 7$  и  $\ell_3 = 8$ :

$$A = \begin{bmatrix} -0,0167 & -0,005 & 0,01 & 0 \\ -0,0300 & -0,1 & 0,01 & 0 \\ -0,001 & 0,01 & -0,0333 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0,03 & 0,025 \\ 0 & 0,21 & -0,2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Внешнее возмущение представлено общим смещением и одной синусоидой

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,0439 & 0 \end{bmatrix}, \quad w^T(0) = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 1 & 0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Параметры регулятора выбраны следующими:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Gamma}_0^T = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{\rho}(0) \\ 2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Как видно из графиков, обе Задачи 1 и 2 решены.

#### 4.5 Интеграция наблюдателя по принципу сильной обратной связи и схемы антивиндап-коррекции

Рассмотрим общий случай, когда переменная  $z_2 = T_2x$  недоступна прямым измерениям. Допустим, что объект робастно минимально-фазовый и матрица  $T_2B\Upsilon_2$  положительно определенная. Выберем закон управления вида

$$u = \Upsilon_1(C_s\zeta + D_sy') + \Upsilon_2(-\kappa_2(\hat{\Gamma}^T\eta + z_2)), \quad (4.49)$$

$$\dot{\zeta} = A_s\zeta + B_sy' \quad (4.50)$$

$$\dot{\eta} = \Phi\eta + G(\hat{\Gamma}^T\eta + z_2). \quad (4.51)$$

Из рассуждений, приведенных выше, следует, что после пересчета координат в установившемся режиме при  $\hat{\Gamma} = \Gamma_\rho$ , получим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\tilde{\Gamma}^T\eta), \quad (4.52)$$

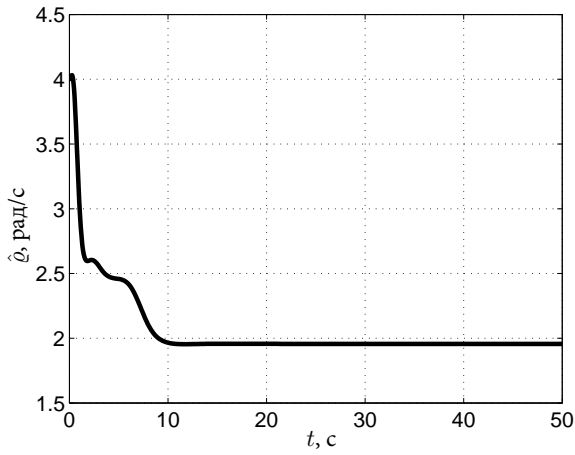
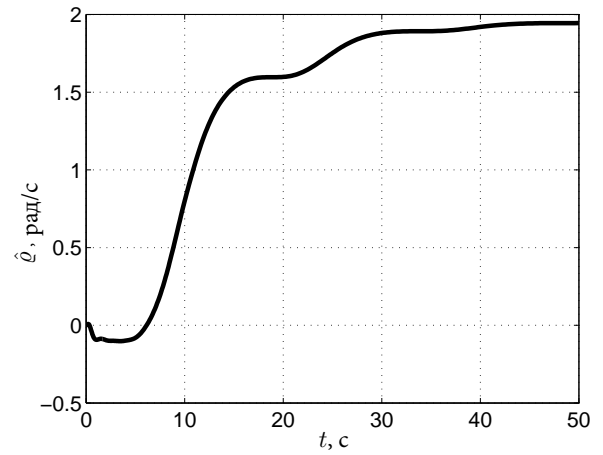
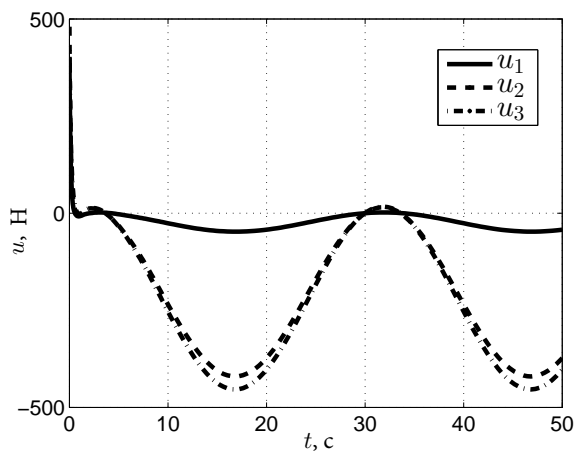
$$z_2 = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad (4.53)$$

при  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  таких, что свойство Утверждения 4.4 выполняется, тогда следует, что если закон адаптации  $\hat{\Gamma}^T = \text{diag}(\hat{\Gamma}_0^T, \dots, \hat{\Gamma}_0^T)$  выбран как

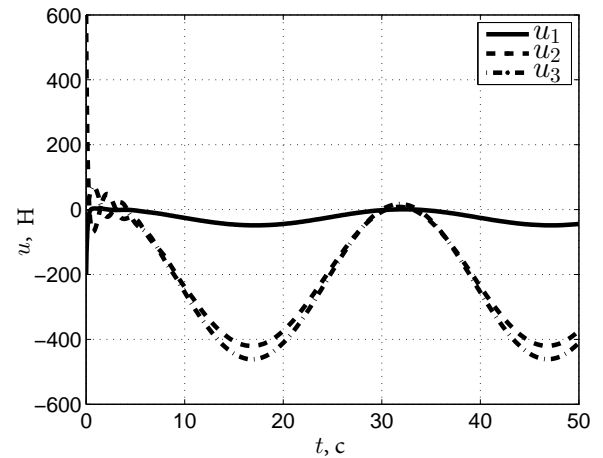
$$\dot{\hat{\Gamma}}_0 = K \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_p \end{bmatrix} z_2, \quad (4.54)$$

то получим

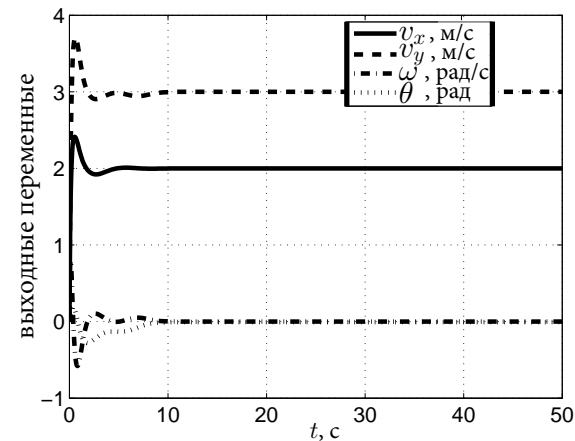
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$$

(а) Переходной процесс оценки  $\hat{\theta}$ (б) Переходной процесс оценки  $\hat{\theta}$ 

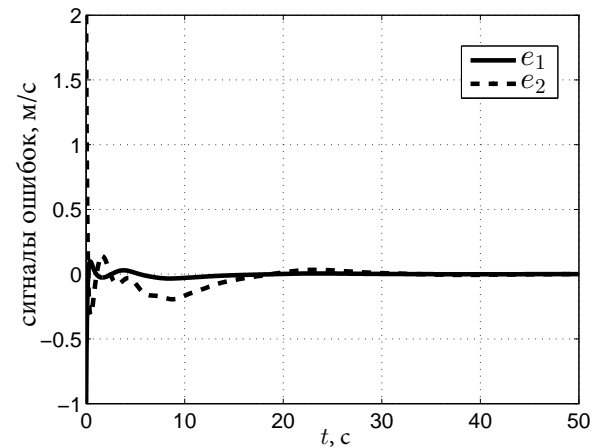
(в) Переходной процесс вектора управляющего сигнала



(г) Переходной процесс вектора управляющего сигнала



(д) Переходной процесс вектора выходных переменных



(е) Переходной процесс вектора выходных переменных

Рисунок 4.2. Результаты численного моделирования предлагаемого алгоритма управления.



при ограниченном  $\hat{\Gamma}^T(t)$ . В частности, обе переменные  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$  асимптотически сходятся к нулю, что говорит о выполнении задачи регулирования.

Поскольку  $z_2$  недоступен прямым измерениям, заменим его оценкой  $\hat{z}_2$ , которая является выходом системы

$$\dot{\xi} = A_q \xi + B_q y \quad (4.55)$$

$$\hat{z}_2 = C_k \xi. \quad (4.56)$$

Структура наблюдателя в частном виде зависит от частной структуры объекта. Например, если  $p = 1$  и объект, рассматриваемый как система с входом  $u$  и выходом  $y$ , имеет относительную степень  $\rho > 1$

$$CB = CAB = \dots = CA^{\rho-2}B = 0, \quad CA^{\rho-1}B \neq 0,$$

переменные  $z_1$  и  $z_2$  определены следующим образом. Для  $i = 1, \dots, \rho$  примем

$$\zeta_i = y^{(i-1)} = CA^{i-1}x + Qw,$$

где

$$\dot{\zeta}_i = \zeta_{i+1} \quad \text{для } i = 1, \dots, \rho - 1,$$

$Q$  — матрица, рассчитываемая как

$$Q = \begin{cases} CR + QS & \text{при } i = 2, \\ CAR + (CR + QS)S & \text{при } i = 3, \\ CAAR + (CAR + (CR + QS)S)S & \text{при } i = 4, \\ \vdots & \end{cases}$$

Тогда  $z_1$  и  $z_2$  определены как

$$z_1 = [\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \dots \quad \zeta_{\rho-1}]^T, \quad z_2 = [k_0 \quad \dots \quad k_{\rho-2} \quad 1] \zeta$$

где

$$\zeta = \text{col}(\zeta_1, \dots, \zeta_\rho)$$

и параметры  $k_i$  такие, что полином

$$k(s) = k_0 + k_1s + \dots + k_{\rho-2}s^{\rho-2} + s^{\rho-1}$$

гурвицев. В результате получим

$$\dot{z}_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2$$

где матрица  $A_{11}$  гурвицева.

В этом случае динамическая модель наблюдателя (4.55)–(4.56) имеет вид

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 + \sigma q_{\rho-1}(y - \xi_1) \quad (4.57)$$

$$\dot{\xi}_2 = \xi_3 + \sigma^2 q_{\rho-2}(y - \xi_1) \quad (4.58)$$

...

$$\dot{\xi}_{\rho-1} = \xi_{\rho} + \sigma^{\rho-1} q_1(y - \xi_1) \quad (4.59)$$

$$\dot{\xi}_{\rho} = \sigma^{\rho} q_0(y - \xi_1) \quad (4.60)$$

и

$$\hat{z}_2 = k_0\xi_1 + k_1\xi_2 + \dots + k_{\rho-2}\xi_{\rho-1} + \xi_{\rho}. \quad (4.61)$$

Если  $p > 1$  и объект, рассматриваемый как система с входом  $u$  и выходом  $y$ , имеет векторную относительную степень  $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p\}$ , динамическая модель оценивателя (4.55)–(4.56) состоит из набора из  $p$  отдельных подсистем вида (4.57)–(4.60), на вход  $i$ -го из которых (со степенью  $\rho_i$ ) подается  $i$ -ая компонента вектора  $y$  и выходом которого является  $i$ -ая компонента  $\hat{z}_2$  с помощью преобразования вида (4.61).

Рассмотрим расширенную систему (4.49)–(4.54), дополненную динамикой генератора возмущений, который может рассматриваться как система вида

$$\dot{w} = Sw \quad (4.62)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}_0^T(L\mathbf{x} + \Sigma w)_1 \\ \dots \\ \tilde{\Gamma}_0^T(L\mathbf{x} + \Sigma w)_p \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

$$\dot{\tilde{\Gamma}}_0 = K \left[ (L\mathbf{x} + \Sigma w)_1 \quad \dots \quad (L\mathbf{x} + \Sigma w)_p \right] M\mathbf{x}. \quad (4.64)$$

Рассматриваемая система представляет собой автономную нелинейную систему с состоянием  $(w, \mathbf{x}, \tilde{\Gamma}_0)$ . Предположим, что начальные условия заданы в виде  $\mathcal{B} = \{(w, \mathbf{x}, \tilde{\Gamma}_0) : w \in W, (\mathbf{x}, \tilde{\Gamma}_0) \in \Omega_c\}$  где  $W$  — компактное множество инвариантное динамике  $\dot{w} = Sw$  и  $\Omega_c$  — зафиксированное подмножество функции Ляпунова  $V(\mathbf{x}, \tilde{\Gamma}_0) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \kappa_2 \tilde{\Gamma}_0^T K^{-1} \tilde{\Gamma}_0$  (т.е. множество всех  $(\mathbf{x}, \tilde{\Gamma}_0)$  такое, что  $V(\mathbf{x}, \tilde{\Gamma}_0) \leq c$ ). Поскольку  $V(\mathbf{x}, \tilde{\Gamma}_0^T)$  не возрастает вдоль траекторий, компактное множество  $\mathcal{B}$  положительно инвариантно. Пусть  $\omega(\mathcal{B})$  представляет собой множество  $\mathcal{B}$ , ограниченное  $\omega$ . Известно, что  $\omega(\mathcal{B})$ , компактное инвариантное множество динамики расширенной системы 4.62–(4.64), асимптотически устойчиво с аттрактором, содержащим  $\mathcal{B}$ . Более того, из предыдущего анализа следует, что  $\omega(\mathcal{B}) \subset \{(w, \mathbf{x}, \tilde{\Gamma}_0) \in \mathcal{B} : \mathbf{x} = 0\}$ .

Без потери общности рассмотрим случай, когда наблюдатель (4.55)–(4.56) имеет вид (4.57)–(4.61) и заменим  $z_2$  в (4.49)–(4.54) на  $\text{sat}(\hat{z}_2)$ . Иными словами, рассмотрим закон управления вида

$$u = \Upsilon_1(C_s \zeta + D_s y') + \Upsilon_2(-\kappa_2(\hat{\Gamma}^T \eta + \text{sat}(C_k \xi))) \quad (4.65)$$

$$\dot{\zeta} = A_s \zeta + B_s y' \quad (4.66)$$

$$\dot{\eta} = \Phi \eta + G(\hat{\Gamma}^T \eta + \text{sat}(C_k \xi)) \quad (4.67)$$

$$\dot{\hat{\Gamma}}_0 = K \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_p \end{bmatrix} \text{sat}(C_k \xi) \quad (4.68)$$

$$\dot{\xi} = A_q \xi + B_q y, \quad (4.69)$$

где  $A_q, B_q, C_k$  определены в соответствии с (4.57)–(4.61).

Выберем новую переменную  $\chi$  вида

$$\chi = \sigma^\rho D_\sigma^{-1}(\zeta - \xi)$$

где

$$D_\sigma = \text{diag}(\sigma, \sigma^2, \dots, \sigma_\rho),$$

с учетом чего запишем

$$\xi = \zeta - \sigma^{-\rho} D_\sigma \chi,$$

и  $\|\sigma^{-\rho}D_\sigma\| = 1$  при  $\sigma > 1$ . Поскольку по построению  $z_2 = C_k\zeta$ , составляющая  $C_k\xi$ , содержащаяся в законе управления (4.65)–(4.68), может быть выражена как

$$C_k\xi = z_2 - C_k\sigma^{-\rho}D_\sigma\chi.$$

После несложных преобразований можно заметить, что система с законом управления (4.65)–(4.68) может быть представлена как взаимосвязная система вида

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \Phi(X) + G(X, \sigma, \chi) \\ \dot{\chi} &= \sigma A_s\chi + B_s(X, \sigma, \chi)\end{aligned}$$

где  $\Phi(X)$  представляет собой систему 4.62–(4.64) и матрица  $A_s$  гурвицева в силу соответствующего выбора коэффициентов  $q_0, \dots, q_{\rho-1}$  наблюдателя (4.57)–(4.60). С использованием свойства асимптотической устойчивости  $\dot{X} = \Phi(x)$  (т.е. существования компактного инвариантного множества  $\omega(\mathcal{B})$ ) можно показать, что, если начальные условия системы находятся в множестве  $\mathcal{B} \times Z$ , где  $Z$  представляет собой фиксированное ограниченное множество начальных условий состояния (4.57)–(4.60), то можно выбрать предел насыщения такой, что для любой сколь угодно малой  $\varepsilon > 0$  существует число  $\sigma^*$  и время  $T^*$  такое, что, если  $\sigma > \sigma^*$ , то все траектории ограничены и

$$\text{dist}(X(t), \omega(\mathcal{B})) \leq \varepsilon \quad \forall t \geq T^*.$$

Поскольку  $\mathbf{x} = 0$  на  $\omega(\mathcal{B})$ , то отсюда следует, что  $|\mathbf{x}(t)|$  строго ограничена функцией  $\varepsilon$  и задача регулирования выполнена.

Для компенсации интегрального насыщения в условиях ограниченности входных воздействий объекта, необходимо модифицировать закон управления

(4.65)–(4.68) следующим образом

$$u = \Upsilon_1(C_s\zeta + D_s y') + \Upsilon_2 v, \quad (4.70)$$

$$v = -\kappa_2(\hat{\Gamma}^T \eta + \text{sat}(C_k \xi)), \quad (4.71)$$

$$\dot{\zeta} = A_s \zeta + B_s y' \quad (4.72)$$

$$\dot{\eta} = \Phi \eta + G(\hat{\Gamma}^T \eta + \text{sat}(C_k \xi) + \varkappa(v)) \quad (4.73)$$

$$\dot{\hat{\Gamma}}_0 = K \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_p \end{bmatrix} \text{sat}(C_k \xi) \quad (4.74)$$

$$\dot{\xi} = A_q \xi + B_q y, \quad (4.75)$$

$$\varkappa(v) = v - \text{sat}(v), \quad (4.76)$$

где  $\varkappa(v)$  — векторный нелинейный сигнал антивиндап-коррекции,  $\nu > 0$ .

**Замечание 4.3.** Доказательство абсолютной устойчивости замкнутой системы с законом управления (4.71)–(4.76), содержащим векторную функцию без памяти  $\varkappa(v)$ , может быть получено аналогично результатам, представленным в разделе 3.1.2.

#### 4.6 Стабилизация макета надводного водоизмещающего судна

Апробация предлагаемого алгоритма управления проводилась на базе установки «CyberShip Arctic Drillship» департамента морских технологий Норвежского университета естественных и технических наук (NTNU) (см. Рис. 4.3).

Конфигурация расположения приводов макета приведена на Рис. 4.4. Как видно из схемы, судно снабжено двумя маршевыми двигателями, производящими силы тяги  $u_3$  и  $u_4$ , а также двумя азимутальными подруливающими устройствами, производящие силы тяги  $u_1$  и  $u_2$  с соответствующими углами поворота  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  подруливающего устройства.

Вектора  $U_1$ ,  $U_2$  представляют собой равнодействующие всех сил вдоль продольной и поперечной осей,  $U_3$  — суммарный момент вращения вокруг оси суд-

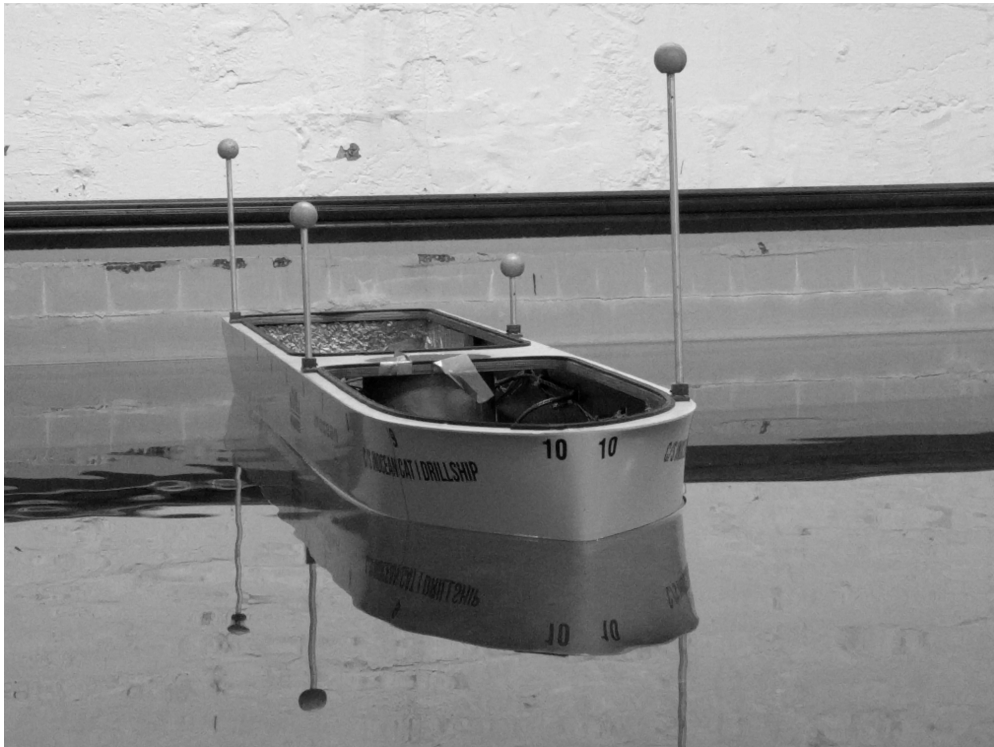


Рисунок 4.3. Макет надводного водоизмещающего судна установки «CyberShip Arctic Drillship».

на. Рассмотрим соотношение векторов управляющих сигналов [148]

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ell_1 & 0 & \ell_2 & -\ell_3 & -\ell_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad (4.77)$$

где  $u_{1x}$ ,  $u_{1y}$ ,  $u_{2x}$ ,  $u_{2y}$  — проекции векторов сил тяги  $u_1$  и  $u_2$  на продольную и поперечную оси судна.

Заметим, что соотношение (4.77) соответствует сверхприводной системе. Для преобразования ее к полноприводной введем ограничения вида

$$\begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}, \quad (4.78)$$

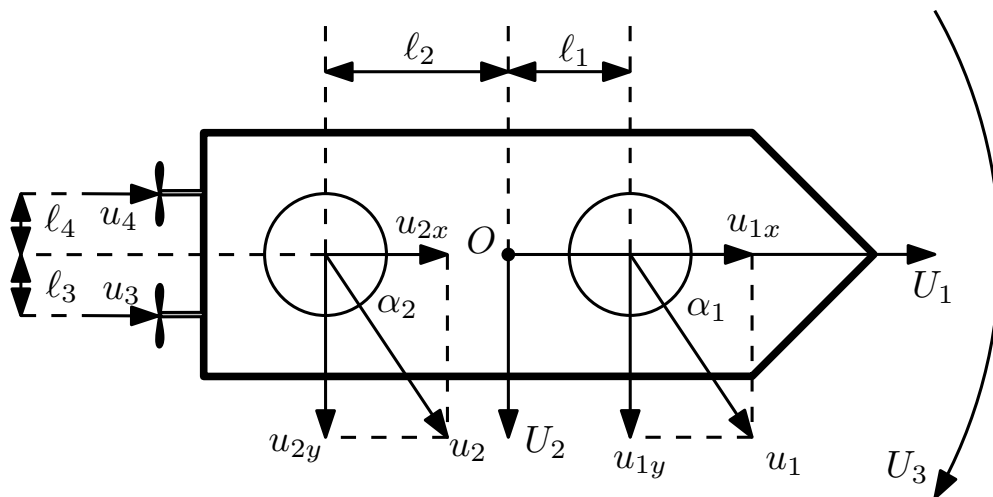


Рисунок 4.4. Конфигурация расположения приводов макета надводного судна.

где  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$ ,  $\delta_3 > 0$ , тогда перепишем (4.77)

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l_2 & -l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & \delta_3 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & l_1\delta_2 & -l_4\delta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix},$$

откуда имеем

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 - \delta_1 & 0 & -\delta_3 \\ 0 & 1 - \delta_2 & 0 \\ 0 & -l_1\delta_2 & 1 + l_4\delta_3 \end{bmatrix}}_{\Lambda_1} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l_2 & -l_3 \end{bmatrix}}_{\Lambda_2} \begin{bmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что матрица  $\Lambda_2$  обратима. Для существования однозначной связи между векторами управляющих сигналов выберем параметры  $\delta_i$ ,  $i = \{1, 2, 3\}$  так, чтобы матрица  $\Lambda_1$  также была обратима.

Выразим

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ell_2 & -\ell_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 - \delta_1 & 0 & -\delta_3 \\ 0 & 1 - \delta_2 & 0 \\ 0 & -\ell_1 \delta_2 & 1 + \ell_4 \delta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\ell_2}{\ell_3} & \frac{1}{\ell_3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\ell_2}{\ell_3} & -\frac{1}{\ell_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \delta_1 & 0 & -\delta_3 \\ 0 & 1 - \delta_2 & 0 \\ 0 & -\ell_1 \delta_2 & 1 + \ell_4 \delta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 - \delta_1 & \frac{\ell_2(\delta_2 - 1) - \ell_1 \delta_2}{\ell_3} & \frac{1 + \ell_4 \delta_3 - \ell_3 \delta_3}{\ell_3} \\ 0 & 1 - \delta_2 & 0 \\ 0 & \frac{\ell_2 + (1 - \delta_2)\ell_3 + \ell_1 \delta_2}{\ell_3} & -\frac{1 + \ell_4 \delta_3}{\ell_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}. \quad (4.79)
 \end{aligned}$$

Объединим (4.79) с (4.78) и получим статический распределитель упоров

$$\begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 1 - \delta_1 & \frac{\ell_2(\delta_2 - 1) - \ell_1 \delta_2}{\ell_3} & \frac{1 + \ell_4 \delta_3 - \ell_3 \delta_3}{\ell_3} \\ 0 & 1 - \delta_2 & 0 \\ 0 & \frac{\ell_2 + (1 - \delta_2)\ell_3 + \ell_1 \delta_2}{\ell_3} & -\frac{1 + \ell_4 \delta_3}{\ell_3} \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{bmatrix}}_{\Lambda} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}.$$

Силы тяги подруливающих устройств могут быть вычислены как

$$u_1 = \sqrt{u_{1x}^2 + u_{1y}^2}, \quad u_2 = \sqrt{u_{2x}^2 + u_{2y}^2},$$

а углы поворотов подруливающих устройств как

$$\alpha_1 = \begin{cases} \arccos \frac{u_{1x}}{u_1} & \text{при } u_{1y} \geq 0, \\ -\arccos \frac{u_{1x}}{u_1} & \text{при } u_{1y} < 0, \end{cases} \quad \alpha_2 = \begin{cases} \arccos \frac{u_{2x}}{u_2} & \text{при } u_{2y} \geq 0, \\ -\arccos \frac{u_{2x}}{u_2} & \text{при } u_{2y} < 0 \end{cases}$$

или

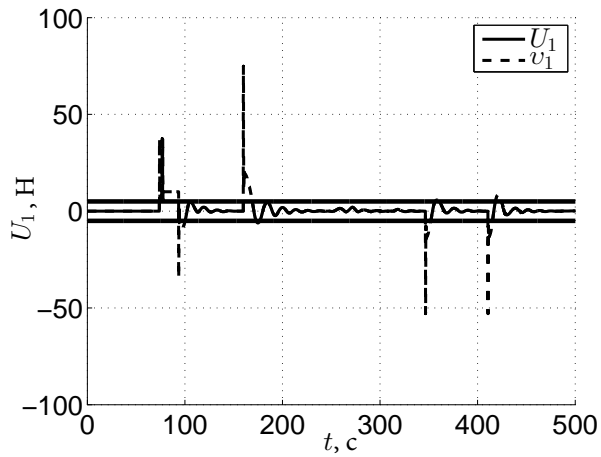
$$\alpha_1 = \text{sign}(u_{1y}) \arccos \frac{u_{1x}}{u_1}, \quad \alpha_2 = \text{sign}(u_{2y}) \arccos \frac{u_{2x}}{u_2}.$$



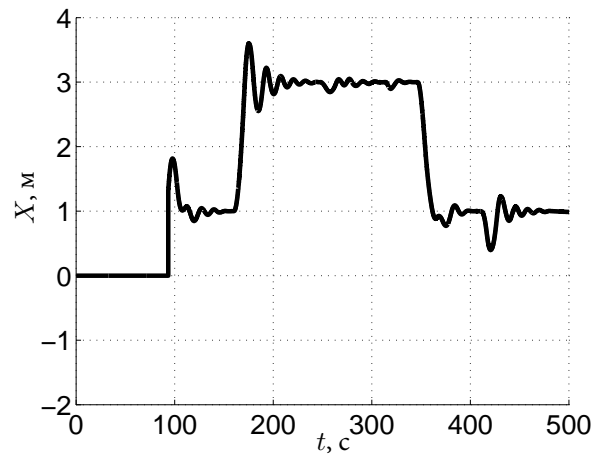
Для стабилизации положения надводного водоизмещающего судна был выбран закон управления (4.70)–(4.76) при  $\Upsilon_2 = \Lambda$ . Были определены следующие пределы насыщения по входу

$$U_{min,i} = -5 \text{ Н}, \quad U_{max,i} = 5 \text{ Н}, \quad i = \{1, 2, 3\}.$$

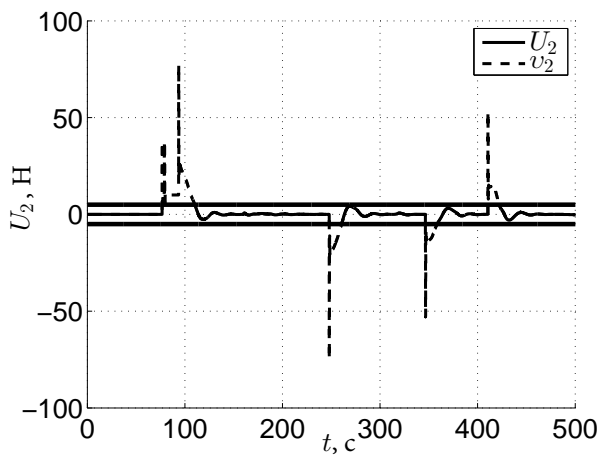
Экспериментальные исследования представляют собой классический тест системы динамического позиционирования («DP 4 corner test»), который заключается в последовательном обходе четырех углов квадрата со сменой курсового угла [149]. Результаты эксперимента представлены на Рис. 4.5. Как видно из графиков, система устойчива по всем выходным переменным многоканальной системы в условиях наличия ограничений по управлению.



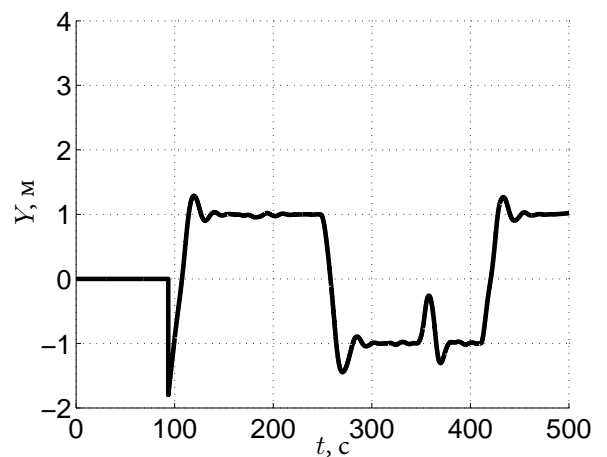
(а) Переходной процесс управляющего сигнала



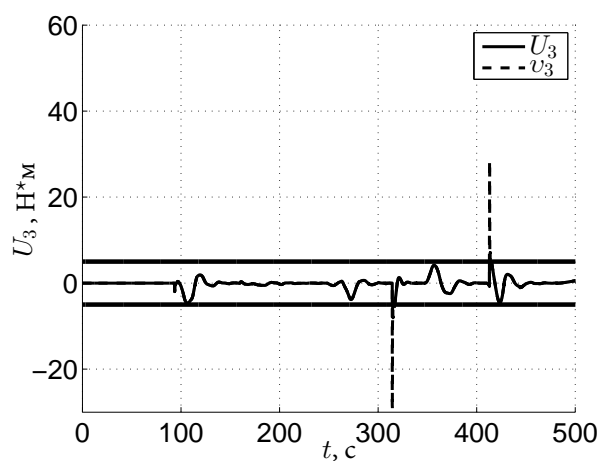
(б) Переходной процесс выходной переменной



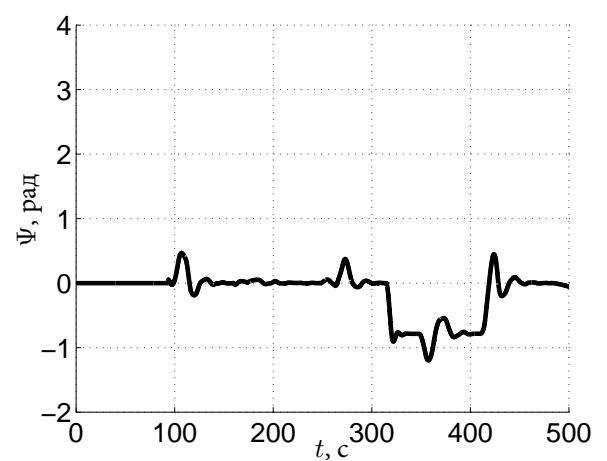
(в) Переходной процесс управляющего сигнала



(г) Переходной процесс выходной переменной



(д) Переходной процесс управляющего сигнала



(е) Переходной процесс выходной переменной

Рисунок 4.5. Результаты экспериментальной апробации предлагаемого алгоритма управления.

#### 4.7 Выводы по главе

В разделе 4.1 сформулирована постановка задачи, решаемой в рамках настоящей главы.

В разделе 4.2 приведены принятые базовые допущения, а также описано понятие робастной минимальной фазовости объекта, используемое при синтезе управления многоканальной системой.

В разделе 4.3 показана интеграция внутренней модели внешнего возмущения и синтез закона адаптации для ее настройки.

В разделе 4.5 приведено расширение предлагаемого решения на случай произвольной относительной степени объекта с помощью введения наблюдателя по принципу сильной обратной связи. Закон управления был также дополнен схемой антивиндап-коррекции для компенсации интегрального насыщения в условиях наличия ограничений по управлению.

В разделе 4.4 приведено численное моделирование для иллюстрации предлагаемого подхода. Решены две задачи регулирования скорости движения надводного водоизмещающего судна при различных сигналах, доступных измерению.

В разделе 4.6 представлены результаты экспериментальных исследований на базе установки «CyberShip Arctic Drillship» департамента морских технологий Норвежского университета естественных и технических наук (NTNU).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа предлагает комплекс новых алгоритмов робастного управления по принципу сильной обратной связи, синтезированных в пространстве состояний для стабилизации многоканальных систем с насыщением по входу и подверженных влиянию внешних возмущающих воздействий.

Первая глава содержит подробный обзор методов адаптивного и робастного управления для параметрически неопределенных объектов с насыщением по входу и подверженных влиянию внешних возмущающих воздействий.

Во второй главе представлен алгоритм синтеза робастных регуляторов по выходу в пространстве состояний на основе принципа сильной обратной связи. Предложен алгоритм обеспечения заданного быстродействия при известных номинальных параметрах объекта и проведен анализ робастности. С использованием метода внутренней модели синтезирован алгоритм компенсации внешних возмущений, проведен анализ устойчивости замкнутой системы и сходимости ошибки регулирования к нулю.

В третьей главе представлен алгоритм робастного управления по выходу с антивиндап-коррекцией для объектов с насыщением по входу. Приведено доказательство абсолютной устойчивости замкнутой системы с разработанным регулятором с помощью критерия Попова. С использованием метода декомпозиции разработанный регулятор применен в задаче стабилизации беспилотного летательного аппарата типа квадрокоптер. Проведены экспериментальные исследования на базе лабораторного стенда «КОМЕКС-1» кафедры управления сложными системами Университета ИТМО.

В четвертой главе представлен алгоритм адаптивного и робастного управления по выходу многоканальными системами с динамически настраивающейся внутренней моделью внешнего возмущения с учетом влияния перекрестных связей. Показана устойчивость замкнутой системы с разработанным регулято-

ром. Проведены экспериментальные исследования на базе установки «CyberShip Arctic Drillship» департамента морских технологий Норвежского университета естественных и технических наук (NTNU).

В будущем планируется продолжение исследований этих задач с целью усиления достигнутых результатов. Большой интерес представляют задачи адаптивного управления нелинейными многоканальными параметрически неопределенными системами с обеспечением заданных показателей качества переходных процессов. На основе разработанных алгоритмов адаптивного и робастного управления ожидается получение принципиально новых и более простых в реализации методов стабилизации систем с насыщением по входу.

## СЛОВА БЛАГОДАРНОСТИ

Соискатель благодарен своему научному руководителю доценту Пыркину Антону Александровичу за огромный вклад в настоящую работу и научную деятельность аспиранта, за полученные фундаментальные знания, опыт и практические навыки в современной теории нелинейных, адаптивных и робастных систем управления.

Соискатель благодарен профессору Бобцову Алексею Алексеевичу за организацию благоприятной научной среды на кафедре систем управления и информатики Университета ИТМО и содействие в профессиональном развитии аспиранта.

Соискатель благодарен профессору Альберто Исидори за сотрудничество в области адаптивного и робастного управления многоканальными системами, результаты которого представлены в Главе 4.

Соискатель благодарен аспиранту Томашевичу Станиславу Игоревичу за сотрудничество и организацию экспериментальных исследований на базе лабораторного стенда «КОМЕКС-1» кафедры управления сложными системами Университета ИТМО, результаты которых представлены в Главе 3, а также опубликованы в работе [12].

Соискатель благодарен аспиранту Андреасу Далу, ведущему инженеру Торгейр Уол, Джон Бьерне и Бенедикту Элизе Флегум департамента морских технологий Норвежского университета естественных и технических наук (NTNU) за неоценимое содействие в проведении экспериментальных исследований на базе установки «CyberShip Arctic Drillship», результаты которых представлены в Главе 4. Настоящему международному научному сотрудничеству содействовал Норвежский университетский центр в Санкт-Петербурге (Представительство Университета Осло), финансируемый и работающий при поддержке четырех норвежских университетов (гг. Осло, Берген, Тромсе и Тронхейм).

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Робототехническая следящая система с быстрой адаптацией к неизвестной траектории движения [Текст] / О.И. Борисов, В.С. Громов, А.А. Ведяков, С.В. Шаветов // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. — 2017. — Т. 60, № 9. — С. 832–839.
2. Быстрое оценивание параметров генератора хаотического сигнала [Текст] / О.И. Борисов, А.А. Бобцов, В.С. Громов, А.А. Пыркин // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. — 2017. — Т. 60, № 6. — С. 487–494.
3. Борисов, О.И. Новый метод синтеза алгоритмов робастного управления по выходу [Текст] / О.И. Борисов, А.А. Пыркин // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. — 2017. — Т. 17, № 3. — С. 564–567.
4. Система технического зрения для роботизированного макета надводного судна [Текст] / О.И. Борисов, В.С. Громов, С.М. Власов, А.А. Пыркин // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. — 2016. — Т. 16, № 4. — С. 749–752.
5. Алгоритмы адаптивного и робастного управления по выходу роботизированным макетом надводного судна [Текст] / О.И. Борисов, С.М. Власов, В.С. Громов [и др.] // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2016. — Т. 17, № 1. — С. 18–25.
6. Управление квадрокоптером с компенсацией ветровых возмущений [Текст] / О.И. Борисов, И.В. Петраневский, В.С. Громов, А.А. Пыркин // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. — 2015. — Т. 15, № 6. — С. 1045–1053.

7. Робастная система динамического позиционирования для роботизированного макета надводного судна [Текст] / О.И. Борисов, С.М. Власов, В.С. Громов [и др.] // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. — 2015. — Т. 58, № 9. — С. 713–719.
8. Компенсация полигармонического возмущения, действующего на состояние и выход линейного объекта с запаздыванием в канале управления [Текст] / О.И. Борисов, А.А. Пыркин, А.А. Бобцов [и др.] // Автоматика и телемеханика. — 2015. — Т. 12. — С. 43–64.
9. Borisov, O.I. Design of the High-Payload Grasping Device for Assistive Manipulation [Text] / O.I. Borisov, I.I. Borisov, S.A. Kolyubin // IEEE International Conference on Industrial Informatics (INDIN). — 2017. — P. 977–981.
10. Adaptive Tracking of a Multi-Sinusoidal Signal with DREM-Based Parameters Estimation [Text] / O.I. Borisov, V.S. Gromov, A.A. Vedyakov [et al.] // IFAC-PapersOnLine. — 2017. — P. 4366–4371.
11. The DREM Approach for Chaotic Oscillators Parameter Estimation with Improved Performance [Text] / O.I. Borisov, V.S. Gromov, A.A. Pyrkin [et al.] // IFAC-PapersOnLine. — 2017. — P. 7288–7292.
12. Experimental Study on Robust Output Control for Quadcopters [Text] / O.I. Borisov, S.I. Tomashevich, V.S. Gromov [et al.] // 25th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2017. — 2017. — P. 1029–1034.
13. Simple adaptive control for quadcopters with saturated actuators [Text] / O.I. Borisov, A.A. Bobtsov, A.A. Pyrkin, V.S. Gromov // AIP Conference Proceedings. — 2017. — Vol. 1798.



14. Human-free robotic automation of industrial operations [Text] / O.I. Borisov, V.S. Gromov, S.A. Kolyubin [et al.] // IECON Proceedings (Industrial Electronics Conference). — 2016. — P. 6867–6872.
15. Output robust control with anti-windup compensation for robotic boat [Text] / O.I. Borisov, V.S. Gromov, A.A. Pyrkin [et al.] // 2016 21st International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR 2016. — 2016. — P. 13–18.
16. Stabilization of linear plants with unknown delay and sinusoidal disturbance compensation [Text] / O.I. Borisov, V.S. Gromov, A.A. Pyrkin, A.A. Bobtsov // 24th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2016. — 2016. — P. 426–430.
17. Advanced educational tool for remote control study [Text] / O.I. Borisov, S.V. Shavetov, A.A. Vedyakov [et al.] // IFAC-PapersOnLine. — 2016. — Vol. 49, no. 6. — P. 303–308.
18. Output Robust Control with Anti-Windup Compensation for Quadcopters [Text] / O.I. Borisov, V.S. Gromov, A.A. Pyrkin [et al.] // IFAC-PapersOnLine. — 2016. — Vol. 49, no. 13. — P. 287–292.
19. Robotic Boat Setup for Control Research and Education [Text] / O.I. Borisov, V.S. Gromov, A.A. Pyrkin [et al.] // IFAC-PapersOnLine. — 2016. — Vol. 49, no. 6. — P. 256–261.
20. Manipulation Tasks in Robotics Education [Text] / O.I. Borisov, V.S. Gromov, A.A. Pyrkin [et al.] // IFAC-PapersOnLine. — 2016. — Vol. 49, no. 6. — P. 22–27.
21. Adaptive Multisinusoidal Signal Tracking System with Input Delay [Text] / O.I. Borisov, V.S. Gromov, A.A. Vedyakov [et al.] // IFAC-PapersOnLine. — 2016. — Vol. 49, no. 13. — P. 105–110.

22. Compensation of polyharmonic disturbance of state and output of a linear plant with delay in the control channel [Text] / O.I. Borisov, A.A. Pyrkin, A.A. Bobtsov [et al.] // Automation and Remote Control.— 2015.— Vol. 76, no. 12.— P. 2124–2142.
23. Adaptive controller implementation for surface robotic vessel [Text] / O. Borisov, J. Wang, V. Gromov [et al.] // Chinese Control Conference, CCC.— 2015.— Vol. 2015-September.— P. 3230–3235.
24. Output Control Algorithms of Dynamic Positioning and Disturbance Rejection for Robotic Vessel [Text] / O.I. Borisov, J. Wang, A.A. Pyrkin [et al.] // IFAC-PapersOnLine.— 2015.— Vol. 48, no. 11.— P. 295–300.
25. Simple Robust and Adaptive Tracking Control for Mobile Robots [Text] / O.I. Borisov, A.A. Pyrkin, A.A. Bobtsov [et al.] // IFAC-PapersOnLine.— 2015.— Vol. 48, no. 11.— P. 143–149.
26. Output controller for quadcopters based on mathematical model decomposition [Text] / O.I. Borisov, A.A. Pyrkin, A.A. Bobtsov [et al.] // 2014 22nd Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2014.— 2014.— P. 1281–1286.
27. Output control approach for delayed linear systems with adaptive rejection of multiharmonic disturbance [Text] / O.I. Borisov, A.A. Pyrkin, A.A. Bobtsov [et al.] // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline).— 2014.— Vol. 19.— P. 12110–12115.
28. Stabilization of nonlinear system with input delay and biased sinusoidal disturbance [Text] / O.I. Borisov, A.A. Pyrkin, A.A. Bobtsov [et al.] // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline).— 2014.— Vol. 19.— P. 12104–12109.

29. Output controller for quadcopters with wind disturbance cancellation [Text] / O.I. Borisov, A.A. Pyrkin, A.A. Bobtsov [et al.] // 2014 IEEE Conference on Control Applications, CCA 2014. — 2014. — P. 166–170.
30. Output adaptive controller for linear system with input delay and multisinusoidal disturbance [Text] / O.I. Borisov, A.A. Pyrkin, A.A. Bobtsov [et al.] // 2014 IEEE Conference on Control Applications, CCA 2014. — 2014. — P. 1777–1782.
31. Fast compensation of unknown multiharmonic disturbance for nonlinear plant with input delay [Text] / O.I. Borisov, A.A. Pyrkin, A.A. Bobtsov [et al.] // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). — 2013. — Vol. 11, no. PART. — P. 546–551.
32. Simple output stabilization approach for robotic systems [Text] / O.I. Borisov, A.A. Pyrkin, A.A. Bobtsov [et al.] // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). — 2013. — P. 1873–1878.
33. Dynamic positioning system for nonlinear MIMO plants and surface robotic vessel [Text] / O.I. Borisov, A.A. Pyrkin, A.A. Bobtsov [et al.] // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). — 2013. — P. 1867–1872.
34. Борисов, О.И. Методы управления робототехническими приложениями. Учебное пособие [Текст] / О.И. Борисов, В.С. Громов, А.А. Пыркин. — СПб. : Университет ИТМО, 2016. — С. 108. — 3,375/2,194 п.л.
35. Программа для управления роботизированным макетом надводного судна [Текст] / О.И. Борисов, В.С. Громов, А.А. Пыркин [и др.] // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. № 2014661674. — 11.11.2014.
36. Программа для управления робототехнической системой в условиях мультигармонических возмущений [Текст] / О.И. Борисов, А.А. Ведяков,

- В.С. Громов [и др.] // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. № 2015615898. — 27.05.2015.
37. Программа для управления робототехнической системой посредством силомоментного датчика [Текст] / О.И. Борисов, А.О. Клюнин, И.В. Петраневский [и др.] // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. № 2016619315. — 17.08.2016.
38. Программа для поиска и определения координат объекта манипулирования робототехнической системы [Текст] / О.И. Борисов, С.О. Глаголев, И.В. Петраневский [и др.] // Свидетельство о государственное регистрации программы для ЭВМ. № 2016619488. — 22.08.2016.
39. Щербаков, П.С. Построение регуляторов заданной структуры при соблюдении инженерных требований [Текст] / П.С. Щербаков // Пробл. управл. — 2009. — № 5. — С. 9–17.
40. Поляк, Б.Т. Робастная устойчивость и управление [Текст] / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. — М. : Наука, 2002. — С. 302.
41. Rusnak, I. Improving the performance of existing missile autopilot using simple adaptive control [Text] / I. Rusnak, H. Weiss, I. Barkana // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. — 2014. — Vol. 28, no. 7-8. — P. 732–749.
42. Bobtsov, A.A. Adaptive control of libration angle of a satellite [Text] / A.A. Bobtsov, N.A. Nikolaev, O.V. Slita // Mechatronics. — 2007. — Vol. 17, no. 4. — P. 271–276.
43. Fradkov, A.L. Adaptive passification-based fault-tolerant flight control [Text] / A.L. Fradkov, B.R. Andrievsky, D. Peaucelle // Automatic Control in Aerospace. — Vol. 17. — [S. l. : s. n.], 2007. — P. 715–720.

44. Kaufman, H. Direct adaptive control algorithms: theory and applications [Text] / H. Kaufman, I. Barkana, K. Sobel. — USA : Springer Science & Business Media, 1998. — P. 424.
45. A simple adaptive control approach for trajectory tracking of electrically driven nonholonomic mobile robots [Text] / B.S. Park, S.J. Yoo, J.B. Park, Y.H. Choi // Control Systems Technology, IEEE Transactions on. — 2010. — Vol. 18, no. 5. — P. 1199–1206.
46. Zhang, S. An improved simple adaptive control applied to power system stabilizer [Text] / S. Zhang, F.L. Luo // Power Electronics, IEEE Transactions on. — 2009. — Vol. 24, no. 2. — P. 369–375.
47. Bobtsov, A.A. A note to output feedback adaptive control for uncertain system with static nonlinearity [Text] / A.A. Bobtsov // Automatica. — 2005. — Vol. 41, no. 12. — P. 2177–2180.
48. Бобцов, А.А. Алгоритм робастного управления в задаче слежения за командным сигналом с компенсацией паразитного эффекта внешнего неограниченного возмущения [Текст] / А.А. Бобцов // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 8. — С. 108–117.
49. Бобцов, А.А. Синтез управления нелинейными системами с функциональными и параметрическими неопределенностями на основе теоремы Фрадкова [Текст] / А.А. Бобцов, Н.А. Николаев // Автоматика и Телемеханика. — 2005. — № 1. — С. 118–129.
50. Бобцов, А.А. Алгоритм управления по выходу с компенсацией гармонического возмущения со смещением [Текст] / А.А. Бобцов // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 8. — С. 25–32.

51. Поляк, Б.Т. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств [Текст] / Б.Т. Поляк, М.В. Хлебников, П.С. Щербаков. — М. : УРСС, 2014. — С. 560.
52. Bobtsov, A.A. Adaptive compensation of biased sinusoidal disturbances with unknown frequency [Текст] / A.A. Bobtsov, A.S. Kremlev // IFAC World Congress, Prague, Czech Republic. — Т. 16. — [Б. м. : б. и.], 2005. — С. 131–136.
53. Бобцов, А.А. Алгоритм компенсации неизвестного синусоидального возмущения для линейного не минимально фазового объекта [Текст] / А.А. Бобцов, А.С. Кремлев // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2008. — № 10. — С. 14–17.
54. Bobtsov, A.A. New approach to the problem of globally convergent frequency estimator [Text] / A.A. Bobtsov // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. — 2008. — Vol. 22, no. 3. — P. 306–317.
55. Бобцов, А.А. Адаптивное управление по выходу с компенсацией гармонического смещенного возмущения [Текст] / А.А. Бобцов // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2009. — № 1. — С. 45–48.
56. Бобцов, А.А. Синтез наблюдателя в задаче компенсации конечномерного квазигармонического возмущения [Текст] / А.А. Бобцов, А.С. Кремлев // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2005. — № 3. — С. 5–11.
57. Бобцов, А.А. Алгоритм компенсации неконтролируемого возмущения в задаче стабилизации выходной переменной линейного объекта с неизвестными параметрами [Текст] / А.А. Бобцов // Изв. ВУЗов. Приборостроение. — 2003. — № 1. — С. 22–27.
58. Бобцов, А.А. Синтез закона управления для стабилизации нелинейной системы по измерениям выхода с компенсацией неизвестного возмущения

- [Текст] / А.А. Бобцов, Н.А. Николаев // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2005. — № 5. — С. 16–22.
59. Nikiforov, V.O. Adaptive servocompensation of input disturbances [Text] / V.O. Nikiforov // World IFAC Congress. — Vol. 13. — [S. l. : s. n.], 1996. — P. 175–180.
60. Никифоров, В.О. Нелинейная система управления с компенсацией внешних детерминированных возмущений [Текст] / В.О. Никифоров // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1997. — № 4. — С. 69–73.
61. Nikiforov, V.O. Adaptive non-linear tracking with complete compensation of unknown disturbances [Text] / V.O. Nikiforov // European Journal of Control. — 1998. — Vol. 4, no. 2. — P. 132–139.
62. Nikiforov, VO. Adaptive servocompensation of external unknown disturbances [Text] / VO Nikiforov // Proc. 14th IFAC World Congress. — [S. l. : s. n.], 1999. — P. 283–289.
63. Никифоров, В.О. Наблюдатели внешних детерминированных возмущений I. Объекты с известными параметрами [Текст] / В.О. Никифоров // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 10. — С. 13–24.
64. Никифоров, В.О. Робастное управление линейным объектом по выходу [Текст] / В.О. Никифоров // Автоматика и телемеханика. — 1998. — № 9. — С. 87–99.
65. Никифоров, В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений [Текст] / В.О. Никифоров. — СПб. : Наука, 2003. — С. 282.
66. Marino, R. Global estimation of n unknown frequencies [Text] / R. Marino, P. Tomei // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2002. — Vol. 47, no. 8. — P. 1324–1328.

67. Marino, R. Robust adaptive compensation of biased sinusoidal disturbances with unknown frequency [Text] / R. Marino, G.L. Santosuosso, P. Tomei // *Automatica*. — 2003. — Vol. 39, no. 10. — P. 1755–1761.
68. Marino, R. Adaptive regulation of uncertain linear minimum phase systems with unknown exosystems [Text] / R. Marino, P. Tomei // *IEEE Conference on Decision and Control / IEEE*. — Vol. 45. — [S. l. : s. n.], 2006. — P. 1099–1104.
69. Marino, R. Adaptive stabilization of linear systems with outputs affected by unknown sinusoidal disturbances [Text] / R. Marino, G.L. Santosuosso, P. Tomei // *European Control Conference 2007*. — [S. l. : s. n.], 2007. — P. 129–134.
70. Marino, R. Output regulation for linear minimum phase systems with unknown order exosystem [Text] / R. Marino, P. Tomei // *Automatic Control, IEEE Transactions on*. — 2007. — Vol. 52, no. 10. — P. 2000–2005.
71. Marino, R. Regulation of linear systems with unknown additive sinusoidal sensor disturbances [Text] / R. Marino, G.L. Santosuosso, P. Tomei // *Proc 17th World Congress of IFAC*. — [S. l. : s. n.], 2008. — P. 4102–4107.
72. Marino, R. Adaptive regulator for uncertain linear minimum phase systems with unknown undermodeled exosystems [Text] / R. Marino, P. Tomei // *Proc. 17th World Congress of IFAC*. — [S. l. : s. n.], 2008. — P. 11293–11298.
73. Xia, X. Global Frequency Estimation Using Adaptive Identifiers [Text] / X. Xia // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2002. — Vol. 47, no. 7. — P. 1188–1193.
74. Hou, M. Amplitude and frequency estimator of a sinusoid [Text] / M. Hou // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2005. — Vol. 50, no. 6. — P. 855–858.



75. Tomei, P. Observer-based speed tracking control for sensorless permanent magnet synchronous motors with unknown load torque [Text] / P. Tomei, C. Maria Verrelli // *Electrical Machines (ICEM), 2010 XIX International Conference on / IEEE*. — [S. l. : s. n.], 2010. — P. 1–6.
76. Гайдук, А.Р. Управление нелинейными объектами с компенсацией неопределенного возмущения [Текст] / А.Р. Гайдук, Е.А. Плаксиенко // *Мехатроника, автоматизация, управление*. — 2013. — № 1. — С. 2–8.
77. Krstić, M. Adaptive nonlinear output-feedback schemes with Marino-Tomei controller [Text] / M. Krstić, P.V. Kokotović // *IEEE transactions on Automatic Control*. — 1996. — Vol. 41, no. 2. — P. 274–280.
78. Hsu, L. A globally convergent frequency estimator [Text] / L. Hsu, R. Ortega, G. Damm // *Automatic Control, IEEE Transactions on*. — 1999. — Vol. 44, no. 4. — P. 698–713.
79. Mojiri, M. An adaptive notch filter for frequency estimation of a periodic signal [Text] / M. Mojiri, A.R. Bakhshai // *Automatic Control, IEEE Transactions on*. — 2004. — Vol. 49, no. 2. — P. 314–318.
80. Робастный алгоритм идентификации частоты синусоидального сигнала [Текст] / С.В. Арановский, А.А. Бобцов, А.С. Кремлев, Г.В. Лукьянова // *Известия РАН. Теория и системы управления*. — 2007. — № 3. — С. 39–44.
81. Identification of frequency of biased harmonic signal [Text] / S.V. Aranovskiy, A.A. Bobtsov, A.S. Kremlev [et al.] // *European Journal of Control*. — 2010. — Vol. 16, no. 2. — P. 129–139.
82. Benchmark on adaptive regulation—rejection of unknown/time-varying multiple narrow band disturbances [Text] / I.D. Landau, A.C. Silva, T.-B. Airimitoai [et al.] // *European Journal of control*. — 2013. — Vol. 19, no. 4. — P. 237–252.

83. Aranovskiy, S.A. Adaptive compensation of disturbances formed as sums of sinusoidal signals with application to an active vibration control benchmark [Text] / S.A. Aranovskiy, L.B. Freidovich // European Journal of Control. — 2013. — Vol. 19, no. 4. — P. 253–265.
84. Aranovskiy, S.A. Adaptive attenuation of disturbance formed as a sum of sinusoidal signals applied to a benchmark problem [Text] / S.A. Aranovskiy // Control Conference (ECC), 2013 European / IEEE. — [S. l. : s. n.], 2013. — P. 2879–2884.
85. Bodson, M. Adaptive algorithms for the rejection of sinusoidal disturbances with unknown frequency [Text] / M. Bodson, S.C. Douglas // Automatica. — 1997. — Vol. 33, no. 12. — P. 2213–2221.
86. Кустов, А.Ю. Синтез формирующего фильтра, обеспечивающего на своем выходе заданный уровень средней анизотропии [Текст] / А.Ю. Кустов, А.П. Курдюков // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 3. — С. 51–66.
87. Kurdyukov, A.P. Constructing Signals with Prescribed Mean Anisotropy Level [Text] / A.P. Kurdyukov, A. Kustov // Adaptation and Learning in Control and Signal Processing. — Vol. 11. — [S. l. : s. n.], 2013. — P. 489–494.
88. Фрадков, А.Л. Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта [Текст] / А.Л. Фрадков // Автоматика и Телемеханика. — 1974. — № 12. — С. 96–103.
89. Fradkov, A. Passification of non-square linear systems and feedback Yakubovich-Kalman-Popov lemma [Text] / A. Fradkov // European journal of control. — 2003. — Vol. 9, no. 6. — P. 577–586.
90. Barkana, I. Parallel feedforward and simplified adaptive control [Text] / I. Barkana // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. — 1987. — Vol. 1, no. 2. — P. 95–109.

91. Barkana, I. Comments on “Design of strictly positive real systems using constant output feedback” [Text] / I. Barkana // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2004. — Vol. 49, no. 11. — P. 2091–2093.
92. Andrievsky, B.R. Necessary and sufficient conditions for almost strict positive realness and their application to direct implicit adaptive control systems [Text] / B.R. Andrievsky, A.L. Fradkov, H. Kaufman // American Control Conference, 1994 / IEEE. — Vol. 2. — [S. l. : s. n.], 1994. — P. 1265–1266.
93. Polyak, B. An LMI approach to structured sparse feedback design in linear control systems [Text] / B. Polyak, M. Khlebnikov, P. Shcherbakov // 2013 European Control Conference, ECC 2013. — 2013. — P. 833–838.
94. Мирошник, И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы [Текст] / И.В. Мирошник. — СПб. : Питер, 2005. — С. 336.
95. Мирошник, И.В. Нелинейные системы. Анализ и управление [Текст] / И.В. Мирошник. — СПб. : СПбГУИТМО(ТУ), 2002. — С. 169.
96. Поляк, Б.Т. Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению [Текст] / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков // Автомат. и телемех. — 2005. — № 5. — С. 7–46.
97. Поляк, Б.Т. Сверхустойчивые линейные системы управления. I. Анализ [Текст] / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков // Автомат. и телемех. — 2002. — № 11. — С. 37–53.
98. Поляк, Б.Т. Сверхустойчивые линейные системы управления. II. Синтез [Текст] / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков // Автомат. и телемех. — 2002. — № 11. — С. 56–75.

99. Хлебников, М.В. Задача линейно-квадратичного управления: I. Новое решение [Текст] / М.В. Хлебников, П.С. Щербаков, В.Н. Честнов // Автомат. и телемех. — 2015. — № 12. — С. 65–79.
100. Khalil, H.K. Nonlinear Systems [Text] / H.K. Khalil. — New Jersey : Prentice Hall, 2002. — P. 750.
101. Ioannou, P.A. Robust Adaptive Control [Text] / P.A. Ioannou, J. Sun. — New Jersey : Prentice Hall, 1996.
102. Åström, K.J. PID Controllers: Theory, Design, and Tuning [Text] / K.J. Åström, T. Hägglund. — North Carolina : ISA, 1995. — P. 343.
103. Åström, K.J. Advanced PID Control [Text] / K.J. Åström, T. Hägglund. — North Carolina : ISA, 2006. — P. 460.
104. Управление летательными аппаратами с АW-коррекцией [Текст] / Г.А. Леонов, Б.Р. Андриевский, Н.В. Кузнецов, Погромский А.Ю. // Дифференциальные управления и процессы управления. — 2012. — № 3. — С. 1–36.
105. Андриевский, Б.Р. Методы подавления нелинейных колебаний в астатических системах автопилотирования летательных аппаратов [Текст] / Б.Р. Андриевский, Н.В. Кузнецов, Г.А. Леонов // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2017. — № 3. — С. 118–134.
106. Андриевский, Б.Р. Скрытые колебания и возбуждение интегратора при насыщении в контуре управления летательных аппаратов [Текст] / Б.Р. Андриевский, Н.В. Кузнецов, Г.А. Леонов // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. — [Б. м. : б. и.], 2014. — С. 482–490.
107. Hidden oscillations in aircraft flight control system with input saturation [Text] / B.R. Andrievsky, N.V. Kuznetsov, G.A. Leonov, A.Yu. Pogromsky // IFAC

- Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). — 2013. — Vol. 5, no. PART 1. — P. 75–79.
108. Convergence based anti-windup design method and its application to flight control [Text] / B.R. Andrievsky, N.V. Kuznetsov, G.A. Leonov, A.Y. Pogromsky // International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops. — 2012. — P. 212–218.
109. Andrievsky, B. Convergence-based analysis of robustness to delay in anti-windup loop of aircraft autopilot [Text] / B. Andrievsky, N. Kuznetsov, G. Leonov // IFAC-PapersOnLine. — 2015. — Vol. 28, no. 9. — P. 144–149.
110. Aircraft control with anti-windup compensation [Text] / G.A. Leonov, N.V. Kuznetsov, A.Y. Pogromskii, B.R. Andrievskii // Differential Equations. — 2012. — Vol. 48, no. 13. — P. 1700–1720.
111. An anti-windup based approach to the control of manufacturing systems [Text] / W.A.P. Van Den Bremer, R.A. Van Den Berg, A.Yu. Pogromsky, J.E. Rooda // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). — 2008. — Vol. 17, no. 1 PART 1.
112. Хлебников, М.В. Синтез оптимальной обратной связи при ограниченном управлении [Текст] / М.В. Хлебников, П.С. Щербаков // Автомат. и телемех. — 2014. — № 2. — С. 177–192.
113. Turner, M.C. Mathematical Methods for Robust and Nonlinear Control: EPSRC Summer School [Text] / M.C. Turner, D.G. Bates. — Verlag London : Springer, 2007. — P. 367.
114. Gomes da Silva Jr., J.M. A analysis of regions of stability for linear systems with saturating inputs through an anti-windup scheme [Text] / J.M. Gomes da Silva Jr., S. Tarbouriech, R. Reginatto // IEEE Conference on Control Applications - Proceedings. — 2002. — Vol. 2. — P. 1106–1111.

115. Tomashevich, S.I. 2DOF indoor testbed for Quadrotor identification and control [Text] / S.I. Tomashevich, A.O. Belyavskiy // 23rd Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2016 - Proceedings. — 2016. — P. 373–376.
116. Tomashevich, S. Passification based simple adaptive control of quadrotor attitude: Algorithms and testbed results [Text] / S. Tomashevich, A. Belyavskiy, B. Andrievsky // AIP Conference Proceedings. — 2017. — Vol. 1798.
117. Belyavskiy, A.O. Application of 2DOF Quadrotor-based Laboratory Testbed for Engineering Education [Text] / A.O. Belyavskiy, S.I. Tomashevich, B. Andrievsky // 25th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2017. — 2017. — P. 939–944.
118. Amelin, K. Recursive Identification of Motion Model Parameters for ultralight UAV [Text] / K. Amelin, S. Tomashevich, B. Andrievsky // IFAC-PapersOnLine. — 2015. — Vol. 48, no. 11. — P. 233–237.
119. Tomashevich, S. Passification Based Simple Adaptive Control Of Quadrotor [Text] / S. Tomashevich, A. Belyavskiy // IFAC-PapersOnLine. — 2016. — Vol. 49, no. 13. — P. 281–286.
120. Fradkov, A.L. Adaptive control design and experiments for laas "helicopter" benchmark [Text] / A.L. Fradkov, B. Andrievsky, D. Peaucelle // European Journal of Control. — 2008. — Vol. 14, no. 4. — P. 329–339.
121. Magnussen, O. Experimental validation of a quaternion-based attitude estimation with direct input to a quadcopter control system [Text] / O. Magnussen, M. Ottestad, G. Hovland // 2013 International Conference on Unmanned Aircraft Systems, ICUAS 2013 - Conference Proceedings. — 2013. — P. 480–485.
122. On the tracking trajectory using optimal control in a quadrotor helicopter: Experimental results [Text] / O. García, O. Santos, H. Romero, S. Salazar //

- 2015 Workshop on Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems, RED-UAS 2015. — 2016. — P. 142–151.
123. Disturbance accomodation control for wind rejection of a quadcopter [Text] / J.X.J. Bannwarth, Z.J. Chen, K.A. Stol, B.A. MacDonald // 2016 International Conference on Unmanned Aircraft Systems, ICUAS 2016. — 2016. — P. 695–701.
124. Francis, B. Synthesis of multivariable regulators: the internal model principle [Text] / B. Francis, O.A. Sebakhy, W.M. Wonham // Applied Math. and Optimiz. — 1974. — Vol. 1, no. 1. — P. 64–86.
125. Hou, M. Estimation of sinusoidal frequencies and amplitudes using adaptive identifier and observer [Text] / M. Hou // IEEE Trans. on Aut. Contr. — 2007. — Vol. 52, no. 3. — P. 493–499.
126. Identification of frequency of biased harmonic signal [Text] / S. Aranovskiy, A. Bobtsov, A. Kremlev [et al.] // Europ. J. of Control. — 2010. — Vol. 16, no. 2. — P. 129–139.
127. Estimation of polyharmonic signal parameters [Text] / A.A. Pyrkin, A.A. Bobtsov, A.A. Vedyakov, S.A. Kolyubin // Autom. and Remote Contr. — 2015. — Vol. 76, no. 8. — P. 1400–1416.
128. Switched algorithm for frequency estimation with noise rejection [Text] / A.A. Pyrkin, A.A. Bobtsov, D.V. Efimov, A. Zolghadri // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2012. — Vol. 57, no. 9. — P. 2400–2404.
129. Serrani, A. Semi-global nonlinear output regulation with adaptive internal model [Text] / A. Serrani, A. Isidori, L. Marconi // IEEE Trans. on Aut. Contr. — 2001. — Vol. 46, no. 8. — P. 1178–1194.

130. Output control algorithm for unstable plant with input delay and cancellation of unknown biased harmonic disturbance [Text] / A.A. Pyrkin, A. Smyshlyaev, N. Bekiaris-Liberis, M. Krstic // Time Delay Systems. — Vol. 9. — Prague, Czech Republic : IFAC, 2010. — P. 39–44.
131. Aranovskiy, S. Adaptive compensation of disturbances formed as sums of sinusoidal signals with application to an active vibration control benchmark [Text] / S. Aranovskiy, L.B. Freidovich // Europ. J. of Control. — 2013. — Vol. 19, no. 4. — P. 253–265.
132. Pyrkin, A.A. Adaptive controller for linear system with input delay and output disturbance [Text] / A.A. Pyrkin, A.A. Bobtsov // IEEE Trans. on Aut. Contr. — 2015. — (in print).
133. Marine Vessel and Power Plant System Simulator [Text] / T.I. Bø, A.R. Dahl, T.A. Johansen [et al.] // IEEE Access. — 2015. — Vol. 3. — P. 2065–2079.
134. Real-Time Marine Vessel and Power Plant Simulation [Text] / Torstein I Bø, Tor A Johansen, Andreas R Dahl [et al.] // ASME 2015 34th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering / American Society of Mechanical Engineers. — [S. l. : s. n.], 2015. — P. V001T01A007–V001T01A007.
135. Фрадков, А.Л. Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта [Текст] / А.Л. Фрадков // Автомат. и телемех. — 1974. — № 12. — С. 96–103.
136. Бесекерский, В.А. Теория систем автоматического управления [Текст] / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. — СПб. : Изд-во «Профессия», 2003. — С. 752.
137. Баландин, Д.В. Синтез регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимнообратных матриц [Текст] /



- Д.В. Баландин, М.М. Коган // Автомат. и телемех. — 2005. — № 1. — С. 82–99.
138. Баландин, Д.В. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств [Текст] / Д.В. Баландин, М.М. Коган. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. — С. 280.
139. Некоторые методы синтеза регуляторов пониженного порядка и заданной структуры [Текст] / В.А. Бойченко, А.П. Курдюков, В.Н. Тимин [и др.] // Управление большими системами: сборник трудов. — 2007. — № 19. — С. 23–126.
140. Altuğ, E. Control of a quadrotor helicopter using visual feedback [Text] / E. Altuğ, J.P. Ostrowski, R. Mahony // Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation. — 2002. — Vol. 1. — P. 72–77.
141. Francis, B. The linear multivariable regulator problem [Text] / B. Francis // SIAM J. on Contr. and Optimiz. — 1977. — Vol. 15, no. 3. — P. 486–505.
142. Isidori, A. Lectures in Feedback Design for Multivariable Systems [Text] / A. Isidori. — International Publishing Switzerland : Springer, 2016.
143. Morse, A.S. Structural invariants of linear multivariable systems [Text] / A.S. Morse // SIAM J. on Control. — 1973. — Vol. 11, no. 3. — P. 446–465.
144. Wonham, W.M. Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems: a geometric approach [Text] / W.M. Wonham, A.S. Morse // SIAM J. on Control. — 1970. — Vol. 8, no. 1. — P. 1–18.
145. Isidori, A. Nonlinear Control Systems [Text] / A. Isidori. — Verlag London : Springer, 1995.

146. Wang, L. Global stabilization of a class of invertible MIMO nonlinear systems [Text] / L. Wang, A. Isidori, H. Su // IEEE Trans. on Aut. Contr. — 2015. — Vol. 60, no. 3. — P. 616–631.
147. Praly, L. Semiglobal stabilization in the presence of minimum-phase dynamic input uncertainties [Text] / L. Praly, Z.P. Jiang // NOLCOS. — Vol. 98. — [S. 1. : s. n.], 1998. — P. 325–330.
148. Fossen, T.I. Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control [Text] / T.I. Fossen. — [S. 1.] : John Wiley & Sons, 2014. — P. 575.
149. Time-Varying Model-Based Observer for Marine Surface Vessels in Dynamic Positioning [Text] / S. A. Værnø, A. H. Brodtkorb, R. Skjetne, V. Calabrò // IEEE Access. — 2017. — Vol. 5. — P. 14787–14796.